

现代声学科学与技术丛书

非线性声学

(第二版)

钱祖文 著



科学出版社

www.sciencep.com

现代声学科学与技术丛书

非线性声学

(第二版)

钱祖文 著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书系统地介绍了无界和有界空间中有限振幅声波的传播,其中包括黎曼-厄恩肖非线性波理论、冲击波形成前的富比尼解、冲击波理论、非理想介质(包括频散介质)中的有限振幅波的传播理论、声散射声、声参量阵、声辐射力、声冲流、气泡的有限振幅振动、二阶和三阶非线性参数、水波孤子、声学混沌、分形学在声学中的应用、固体中的非线性声学。

本书讨论深入,反映当代最新发展,可供相关专业科研工作者、研究生及高年级本科生参考。

图书在版编目(CIP)数据

非线性声学 / 钱祖文著. -2版. —北京: 科学出版社, 2009

(现代声学科学与技术丛书)

ISBN 978-7-03-025157-2

I. 非… II. 钱… III. 非线性声学 IV. 0422.7..

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第134404号

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

新蕾印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009年8月第 一 版 开本: B5(720×1000)

2009年8月第一次印刷 印张: 26 3/4

印数: 1-2 000 字数: 519 000

定价: 78.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

第二版前言

本书第一版的印刷量太小，书店很快就脱销，许多读者来函索书，但我手头存书有限，难以一一满足，爱莫能助。现在，“非线性”已经成为各门学科及其应用领域共同面临的问题。随着我国改革开放的大潮日趋汹涌，有关的科技工作者对这门学科的需求也是今非昔比，希望对这部分知识作较为深入的了解，从而跟踪和探索其新的应用领域。加之，近 20 年来，非线性声学也有了进一步的发展，因此，第一版的内容也需要作相应的更新。

本书在其第一版的基础上，作了适当的修改和补充，尽量改正了第一版中的笔误以及印刷错误。在第 2 章中补充了关于富比尼解的进一步研究，广义黎曼-厄恩肖解的讨论及其应用。第 11 章增加了欧拉体系中的辐射力及其应用。第 13 章中增加了气泡大振幅振动的 $Q-X$ 方程及其应用部分。在第 14 章中增加了三阶非线性系数理论。在第 15 章中补充了二维孤波部分。在第 17 章中强调了积累解的重要性，在二阶势理论的基础上提出定解问题的方程组和求解步骤，具体讨论了各种波入射时的解答，并对非线性表面波作了较为深入的研究。近年来分形学在声学领域有了许多应用，故本书的第 18 章纳入了这部分内容。

本书得到中国科学院科学出版基金的资助，作者表示深切的感谢。

限于知识和精力，书中不免（特别是繁杂的具体计算）有不妥之处，还望不吝指正。

作者

2009 年于中国科学院声学研究所

第一版前言

在 20 世纪 70 年代前期，国外先后出版了三部非线性声学专著，即 Зарембо 和 Красильников 的《非线性声学引论》、Руденко 和 Солуян 的《非线性声学原理》以及 Beyer 的《非线性声学讲义》，而作者之所以撰写此书是基于下述 4 点考虑：第一，这三本著作不包括近 20 年飞速发展的成就；第二，由于它们的作者兴趣不同，其内容各有侧重；第三，可能由于文字上或者别的什么原因，国外的著作很少反映我国的工作；第四，迄今为止，尚无一本非线性声学的中文书。

20 世纪 70 年代后期，作者在中国科学院声学研究所为有关同事讲授了非线性声学课程，当时的讲稿即为本书的雏形。1980 年，声学所所长汪德昭先生建议作者撰写这本书，并向现代物理学丛书编委会推荐而被列入出版计划。在写作过程中，作者得到了汪先生和魏荣爵先生的鼓励、关怀和指导，魏先生审阅了本书的早期初稿，提出不少有益意见。由于“讲课容易成书难”的弊病，作者总有点“足将进而踟蹰”，迟迟未能交稿，错过了大好时光。后来，出版经费日趋紧张，这份手稿也就被暂时束之高阁了。1990 年，马大猷先生再次鼓励作者出版此书，并向我院出版基金委员会鼎力推荐，得到了批准和资助，此书因而得以问世。作者在此对我的前辈师长们、和我作过有益讨论的同行们以及资助本书的院出版基金委员会表示由衷的感谢。

由于作者才疏学浅，差错和不妥在所难免，敬请批评指正。

作 者

1991 年于中国科学院声学研究所

目 录

第二版前言

第一版前言

绪论	1
参考文献	3
第 1 章 连续介质力学和热力学初步	5
1.1 拉格朗日体系	5
1.2 欧拉体系	8
1.3 物态方程	10
1.4 纳维-斯托克斯方程	12
1.5 能量关系	14
1.6 欧拉量与拉格朗日量之间的联系	17
1.7 黏热流体中的拉格朗日方程	19
1.8 线性声学的应用范围	23
1.9 热力学初步	24
参考文献	30
第 2 章 理想介质中的有限振幅平面波	31
2.1 黎曼-厄恩肖解与简单波	33
2.2 冲击波间断面的位置	36
2.3 贝塞尔-富比尼解	42
2.4 特征线族与 R-E 不变量及其应用	46
参考文献	52
第 3 章 冲击波	53
3.1 间断面的连接条件——兰金-于戈尼奥关系	53
3.2 冲击波的形成距离	57
3.3 弱冲击波理论	58
3.4 冲击波的宽度	64
3.5 弱冲击波理论的应用限制	69
3.6 关于有限振幅波衰减问题的后记	71
参考文献	71

第 4 章 无界黏热流体中的有限振幅平面波	72
4.1 伯格斯方程	72
4.2 伯格斯方程的解	75
4.3 布莱克斯托克桥函数	85
参考文献	88
第 5 章 有限振幅球面波与柱面波	90
5.1 伯格斯方程	90
5.2 大雷诺数情况下伯格斯方程的解	92
5.3 小雷诺数情况下发散波伯格斯方程的解	94
5.4 发散波冲击波	98
5.5 芬伦理论	101
参考文献	104
第 6 章 频散介质中的有限振幅波	105
6.1 弛豫介质中物态方程的修正	107
6.2 有限振幅波在弛豫介质中的传播	109
6.3 KdV 方程的解与弧波	115
参考文献	117
第 7 章 有界空间的有限振幅波	118
7.1 有限振幅驻波	118
7.2 有限振幅共振器	119
7.3 有限振幅波在边界面上的反射	121
7.4 有限波束声源的有限振幅反射波	130
7.5 有限振幅波的折射	134
参考文献	139
第 8 章 声散射声	140
8.1 流体动力发声的莱特希尔理论	140
8.2 两正交准直束的声散射声	145
8.3 两列平面波的声散射声	146
8.4 两正交准直束相互作用的一般讨论	152
8.5 一列平面波与一列行波脉冲的声散射声	155
8.6 声束的相互作用	159
8.7 声散射声的实验	162
结束语	163
参考文献	164
第 9 章 声参量发射阵	166

9.1 韦斯特维尔特线源参量阵理论	166
9.2 线源参量阵的一般讨论	171
9.3 矩形孔径参量阵	177
9.4 圆形活塞换能器参量阵的设计模型	179
9.5 宽带参量阵	186
结束语	196
参考文献	196
第 10 章 参量接收器	198
10.1 准直束泵波参量接收器	198
10.2 球面泵波参量接收器	201
10.3 参量接收器阵	203
10.4 行波参量放大	204
参考文献	206
第 11 章 声辐射力	208
11.1 拉格朗日量和欧拉量之间关系的进一步讨论	208
11.2 艾里-富比尼(积累)解	211
11.3 流体中的(时间)平均压力	214
11.4 瑞利辐射力和朗之万辐射力	215
11.5 欧拉体系中的辐射力及其应用	219
参考文献	221
第 12 章 声流	223
12.1 厄卡特理论	223
12.2 梅德温-拉德尼克修正	231
12.3 有限振幅声波声流	234
参考文献	236
第 13 章 气泡的有限振幅振动	237
13.1 气泡的振动方程组和边界条件	238
13.2 不可压缩液体中的气泡振动	241
13.3 可压缩液体中的气泡振动	244
参考文献	253
第 14 章 非线性参数及其在医学超声中的应用	255
14.1 非线性参数的热力学理论	255
14.2 测量非线性参数的有限振幅声波法	259
14.3 非线性参数成像法	262
14.4 非线性参数的混合规则	264

14.5	三阶非线性参数	266
	参考文献	270
第 15 章	水波孤子	272
15.1	线性水波	273
15.2	浅水中的非线性波	277
15.3	求解 KdV 方程初值问题的散射反演法	282
15.4	深水中的非线性波	290
15.5	拉克斯理论	291
15.6	扎哈罗夫-沙巴特理论和阿布洛维奇方法	295
15.7	二维孤波	298
15.8	非传播性孤波	299
	参考文献	300
第 16 章	声学中的混沌	302
16.1	几个混沌现象	302
16.2	分岔现象	304
16.3	时间序列与混沌	306
16.4	耗散系统及其吸子	311
16.5	声场中的气泡分岔和混沌	313
16.6	马蒂厄方程	319
16.7	希尔方程和弗洛凯定理	325
16.8	马蒂厄方程解的稳定性	326
	参考文献	330
第 17 章	固体中的非线性弹性波	332
17.1	应变矩阵	332
17.2	运动方程	335
17.3	各向同性弹性固体的三阶弹性能	336
17.4	各向同性弹性固体中的非线性波	342
17.5	附加静压力或者常应力的各向同性弹性体中波的传播	347
17.6	固体中有限振幅波的二阶势方程	357
17.7	各向异性固体中的三阶弹性能	365
17.8	沿立方晶体[100]方向传播的有限振幅平面波	371
17.9	沿立方晶体[110]方向传播的有限振幅平面波	373
17.10	沿立方晶体[111]方向传播的有限振幅平面波	376
17.11	波动方程组的正交变换	377
17.12	附加压力或应力的立方晶体中的波	378

17.13 固体中有限振幅波在边界的反射	384
17.14 平面半空间的二阶谐波	391
17.15 二阶谐表面波	397
参考文献	399
第 18 章 分形学在声学中的应用	401
18.1 分数维	403
18.2 分形表面的散射	405
18.3 形状不规则颗粒构成的介质中的声传播	409
参考文献	411

绪 论

近年来非线性声学有了迅速发展,在学术上和实际应用中均很受重视。在研究声传播时,总离不开运动方程、连续性方程和物态方程。对于理想介质来说,运动方程是欧拉方程,即^[1]

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p \quad (0.1)$$

式中, ρ 为介质密度, $\mathbf{v}$ 为流点的速度矢量, p 是声压, 而

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \quad (0.2)$$

显然, 上式右端第二项是非线性项, 在流体力学中, 称其为对流项, 或者运动非线性项。

连续性方程可写为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (0.3)$$

式中, ρ 为流体的密度, 上式第二项为非线性项。

物态方程为 $p = p(\rho)$, 服从这种物态方程的流体称为正压流体, 即压力仅是密度的函数。但在一般情况下, 压力不仅是密度的函数, 而且是熵 S 的函数。如果声传播过程是等熵的, 则这种流体在这些意义下可以称为正压流体。将物态方程展为泰勒级数, 于是有

$$P = P_0 + \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s (\rho - \rho_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2} \right)_s (\rho - \rho_0)^2 + \dots \quad (0.4)$$

式中, ρ_0 和 P_0 分别为密度和压力的静态值, 上式右端第三项开始即出现介质的非线性项。

在线性声学中, 上述几个方程中的所有非线性项都被忽略。由此可见, 运动非线性或者介质非线性不能都忽略的声学问题即属于非线性声学问题。

根据线性声学的概念可知, 一列单频声波在线性介质中传播时, 除了它的振幅衰减和相位变化之外, 其波形并不发生变化。另外, 如果运动非线性(如振幅足够大)或者介质非线性发生作用时, 一列单频正弦波就会产生它的谐波、分频波、和频波以及差频波, 由于这些波的出现, 波的叠加原理不再成立, 线性声学规律

不再遵守,从而必须代之以一门新的学科分支——非线性声学。

早在 18 世纪中叶,科学工作者就已经注意到许多非线性现象了^[2]。1808 年,泊桑提出了后来被称为简单波(或者后来称为黎曼^[3](Riemann)-厄恩肖(Earnshaw)^[4]解)的形式解。1860 年黎曼和厄恩肖各自独立地发表了非线性一维波动方程的严格解,即黎曼-厄恩肖的简单波理论解(简称黎曼解)。众所周知,在线性声学中,声波传播可以用著名的达朗贝尔解来描述,而单频声波的传播速度被介质的特性唯一决定。而在非线性声学中,与达朗贝尔解相对应的为黎曼解,在这种情况下,声传播速度不仅取决于介质特性,而且还与质点振动幅度有关,质点振动速度的代数值大的地方波速大,代数值小的地方波速少。对于正弦扰动的传播而言,波峰传得最快,波谷传得最慢,故传播一段时间之后,波峰赶上波谷,将有可能形成锯齿波或者冲击波,因此,黎曼解对于冲击波的形成过程给出了一个清晰的图像。

1870 年和 1889 年兰金(Rankine)和休戈尼奥特(Hugoniot)先后发表了冲击波波面两侧力学量的守恒关系式,后来称其为兰金-休戈尼奥特关系式^[5,6],对冲击波的传播特性有了进一步的了解。

尽管如此,由于条件所限,以前人们只能将非线性现象当作一类“有害成分”来处理,除了从学科意义上对它进行探索以外,在实用方面也仅仅是尽量不要产生它^[7]。

当一列声波在非线性介质中传播时,它激励了介质运动使之成为非线性波源——分布型辐射源,它分布于传播路径上,从而使得非线性波存在“积累解”,它可表示为 kx 的 $n-1$ 阶多项式的形式,式中 k 和 x 分别为声波波数和距离。通常声波的吸收系数 $\alpha \ll k$,故当 αx 接近于 1 时,在这样的距离范围内,由于 $kx \gg 1$,积累解的贡献大大超过声吸收所引起的衰减,因而积累解是主要的贡献者。

到了 20 世纪 50 年代,莱特希尔^[8](Lighthill)在空气动力声学方面取得了重要成就,在他的建议下,韦斯特维尔特(Westervelt)^[9]提出了一种新型声源——声参量阵,它是一种分布型的源。由于它的指向性很尖锐,频带很宽,可以提高空间分辨率,抗混响,并可能获得较高的信号处理增益,它给非线性声学的应用带来光辉的前景。参量阵的缺点是效率低,但我们不妨认为,它的上述优点是以低效率为代价的。

参量阵也用于接收,称为参量接收器^[10]。在讨论这种接收器的指向性时,允许两束声(泵波和信号波)传播方向不同。但根据声散射声的结论,在这种情况下并不存在参量声的源函数,故本书在讨论这个问题时,只是假设可以用源函数概念来处理。当然这并不表示作者同意此种观点^[7, 11~14]。

在非线性声学领域中还存在若干有争议的问题,如声散射声^[11~14]及辐射压力^[15~17]等问题。这些问题产生的原因看来不仅有物理上,也许还有数学上的原因。

如果引入间断性的声场,则会出现虚假的声散射声。在对某些展开项进行不同取舍时,会得到不同的瑞利辐射压力等。因此,某些数学上的简化,在线性声学中可能是容许的,而在非线性声学中则不容许,因为后者处理的属于次级效应,这些不合理的简化会带来人为的源函数。

非线性声学主要采用逐步近似方法来处理问题,大部分内容仅限于二级近似。这样得到的方程总是将低阶波作为高阶波的源函数,而在线性声学中各阶波之间是独立的。可是在推导空化气泡振动方程时,除了个别作者以外,大部分工作都不采用逐步近似方法,而是引入一些简化假设,从而将定解问题适定的偏微方程组化归非线性的常微分方程。如果这些简化假定与原问题一致,则问题依然是适定的,否则将使问题成为超定的。

非线性边值问题也是一个有待发展的问题^[7, 18, 19]。在线性边值问题中我们早已知道,各阶谐波的定解问题的陈述是相互不交叉的,而在非线性声学领域中,不仅在方程中各阶谐波是交叉的,而且在边界条件中亦然,这就给数学处理带来很大的不方便,有时甚至出现困难。

非线性参数 B/A 是描写介质非线性的一个特征量^[20],近年来某些作者主张将它用来作为超声成像的特征参数,对于超声诊断可能会增加一定的信息。

近年来,高声强聚焦超声(HIFU)已经成为医学超声的研究课题^[21],有关的医疗设备也已经应用于临床治疗,聚焦声的功率和声场的测量以及有关的换能器校准问题^[22]、空化气泡群体带来的影响等已成为这方面的从业者关注的焦点。可是目前非线性声学有效处理具体问题的“能力”仅能达到二级近似,更为迫切的是人体组织的物理模型如何适应非线性问题的需要。

近代物理学中的孤子和混沌现象在声波和振动领域也陆续观察到^[23],这将会推动非线性声学的发展,而且使已和物理学分道扬镳多年的声学在这个方面将会“分久必合”。

限于篇幅,本书没有涉及随机非线性声学及非线性振动等方面的问题。

参 考 文 献

- [1] Landau L D, Lifshitz E M. Fluid mechanics, course of theoretical physics. Vol. 6. New York: Pergamon Press, 1959
- [2] Poisson S D. Memoir on the theory of sound. In: Beyer BT. Nonlinear acoustics in fluids. Brown University, Providence, Rhode Island, VNR Comp, 1984. 23~28
- [3] Riemman B. The propagation of plane sound waves of finite amplitude. In: Beyer BT. Nonlinear acoustics in fluids. Brown University, Providence, Rhode Island, VNR Comp, 1984. 42~60
- [4] Earnshaw S. On the mathematical theory of sound. Phil Trans Roy Soc, 1859, 8: 75~102;

- Benchmark paper in acoustics. *In*: Lindsay R B. acoustics: historical and philosophical development. Brown University, Dowden Hutchinson & Ross, Inc, 291
- [5] Rankine WJM. On the thermodynamic theory of waves of finite longitudinal disturbance. *In*: Beyer B T. Nonlinear acoustics in fluids. Brown University, VNR Comp, 1984. 65~76
- [6] Hugoniot H. Memoir on the propagation of motion in bodies, especially in a perfect gas. *In*: Beyer B T Nonlinear Acoustics in Fluids. Brown University, VNR Comp, 1984. 77~89
- [7] 钱祖文. 非线性声学概述. 物理, 1991, 20: 261~265
- [8] Lighthill M J. On sound generated aerodynamically. *Proc Roy Soc*, 1952, A211: 564~587
- [9] Westervelt P J. Parametric acoustic array. *Jour Acoust Soc Am*, 1963, 35: 535~537
- [10] Berkta H O. Parametric amplification by the use of acoustic non-linearities and some possible applications, *J Sound and Vib*, 1965, 2: 462~270
- [11] Westervelt P J. Scattering of sound by sound. *Jour Acoust Soc Am*, 1957, 29: 199~203
- [12] Westervelt P J, Scattering of sound by sound., *Jour Acoust Soc Am*, 1957, 29: 934~935
- [13] 钱祖文. 关于声散射声. 物理学报, 1976, 25: 472~480
- [14] 钱祖文. 平面波与平面行波脉冲的声相互作用. 物理学报, 1988, 37: 221~228
- [15] Baotah C, Apfel R E. Acoustic radiation pressure produced by a beam of sound. *Jour Acoust Soc Am*, 1982, 72: 1673~1687
- [16] Baotah C, Apfel R E. Response to the comments of Nyborg and Rooney. *J Acoust Soc Am*, 1984, 75: 283~264; *Jour Acoust Soc Am*, 1984, 75: 1003~1004
- [17] Rooney J A, Nyborg W L. Acoustic radiation pressure in a traveling plane wave. *Amer Jour Phys*, 1972, 40: 1825~1830
- [18] 钱祖文. 我国非线性声学方面的研究进展. 物理, 1999, 28: 593~600
- [19] Blackstock D T. *Amer. Institute of Physical Handbook*. 3rd ed. McGraw-Hill Book Company, 1972. 3~183
- [20] Beyer R T. Nonlinear Acoustics. Department of the Navy, Sea System Command. 1974
- [21] 钱祖文. 高强度聚焦超声 (HIFU) —— 一门多学科的研究课题. 物理, 2007, 36: 701~707
- [22] Qian Z W, Zhu Z, Ye S. Acoustic radiation force on objects and power measurements of focusing source (HIFU). *Proc 2008 IEEE International Ultrasonics Symposium (IUS)*, Beijing, China, 2008
- [23] Scolt A C, Chu F Y F, McLaughlin D W. The soliton: a new concept in applied science. *Proc IEEE*, 1973, 61: 1443~1482

第 1 章 连续介质力学和热力学初步

经典声学是连续介质力学的一个分支,它是研究机械扰动的产生、接收及其在连续介质中传播的一门学科,因此我们首先介绍这方面的有关基础知识。连续介质力学分为弹性力学和流体力学,前者研究的介质是固体,后者是液体和气体,这里只介绍后者。我们引入流点(流体质点)的概念,流点是这样的一个流体团,其中必须包含大量的流体分子,以使得其大小比分子之间的平均距离大得多,从而可以将它看成是一个连续体;但流点的尺度又要足够小,以使所有有关物理量在整个流点上看不出变化,从而成为点函数。历史上研究流体力学有两种数学描述体系,即欧拉体系和拉格朗日体系,在非线性声学领域内,两种体系都使用,下面分别介绍。

1.1 拉格朗日体系^[1]

设连续的流体空间被无限个流点所充满,我们取流点在某个初始时刻(如 $t=t_0$)所在空间位置的笛卡儿坐标 a, b, c 为自变量,随着时间的变化,流点在空间运动,其瞬时位置为 x, y, z 。显然,不同的流点(其起始坐标用 a, b, c 描写)在空间运动到不同的位置,其瞬时位置 x, y, z 依赖于 a, b, c 和 t , 即

$$\left. \begin{aligned} x &= x(a, b, c; t) \\ y &= y(a, b, c; t) \\ z &= z(a, b, c; t) \end{aligned} \right\} \quad (1.1.1)$$

同样地,流体力学中各种物理量均取决于流点的位置和时间,从而恒可表示为 a, b, c, t 的函数。通常将 a, b, c 称为拉格朗日空间坐标,而将 $a, b, c; t$ 称为拉格朗日变量。下面将导出拉格朗日体系下的连续性方程和运动方程。

1. 连续性方程

连续性方程实为质量守恒定律。设空间任一流点在初始时刻 $t=t_0$ 的坐标为 a, b, c , 它所占据的体积元为 $dV_0 = da db dc$, 其质量为 $dm_0 = \rho_0 da db dc$, ρ_0 是它在 $t = t_0$ 时的密度。在 t 时刻,它运动到 x, y, z 位置,其体元变为 $dV = dx dy dz$, 其密度为 ρ , 质量为 $dm = \rho dx dy dz$ 。对于任一流点,由于质量守恒,故有

$$\rho_0 da db dc = \rho dx dy dz$$

从数学分析可知, 体元 $da db dc$ 变到 $dx dy dz$ 有如下关系:

$$dx dy dz = |J| da db dc$$

$|J|$ 为雅可比函数行列式, 且

$$|J| = \begin{vmatrix} x_a & x_b & x_c \\ y_a & y_b & y_c \\ z_a & z_b & z_c \end{vmatrix}$$

式中, $x_a = \frac{\partial x}{\partial a}$, 以此类推。于是拉格朗日变量下的连续性方程可表示为

$$\rho_0 = \rho \begin{vmatrix} x_a & x_b & x_c \\ y_a & y_b & y_c \\ z_a & z_b & z_c \end{vmatrix} \quad (1.1.2a)$$

引入流点沿三个直角坐标方向的位移 ξ, η, ζ , 它们都是 $a, b, c; t$ 的函数, 且有

$$\left. \begin{aligned} x &= a + \xi \\ y &= b + \eta \\ z &= c + \zeta \end{aligned} \right\} \quad (1.1.3)$$

代入(1.1.2a)式, 很容易得到

$$\rho_0 = \rho \begin{vmatrix} 1 + \xi_a & \xi_b & \xi_c \\ \eta_a & 1 + \eta_b & \eta_c \\ \zeta_a & \zeta_b & 1 + \zeta_c \end{vmatrix} \quad (1.1.2b)$$

退化到二维情况下的连续性方程为

$$\rho_0 = \rho \begin{vmatrix} 1 + \xi_a & \xi_b \\ \eta_a & 1 + \eta_b \end{vmatrix} \quad (1.1.4)$$

同理, 一维情况下的连续性方程是

$$\rho_0 = \rho(1 + \xi_a) \quad (1.1.5)$$

2. 运动方程

首先我们讨论理想流体。所谓理想流体是指，它在运动中不出现机械能的损耗，在这种流体中，流点只是在压力的作用下运动，不存在其他外力。以后将会看出，理想流体是实际流体在雷诺数很大时的近似。在这种情况下，与非线性对流项的贡献比较，耗散对流动的影响可以忽略不计。非理想流体的运动方程将留待 1.4 节中讨论。

设有一块流体，其体积为 τ ，包围这块体积的表面积为 S ，根据牛顿第二定律

$$\int_{\tau} \rho \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial t^2} d\tau = - \int_S p \mathbf{n} dS \quad (1.1.6)$$

式中， $\mathbf{R} = ix + jy + kz$ 为位置向量， i, j, k 分别为沿 x, y, z 方向的单位向量。根据高斯定理，有

$$\int_S p \mathbf{n} dS = \int_{\tau} \nabla P d\tau \quad (1.1.7)$$

式中， $\mathbf{n}$ 为表面 S 的单位法线向量，由表面向外是正方向。将上式代入(1.1.6)式得到

$$\int_{\tau} \left(\rho \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial t^2} + \nabla P \right) d\tau = 0$$

由于积分体积 τ 的任意性，要使上式始终成立，只有被积函数为零，于是

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial t^2} = -\nabla P \quad (1.1.8)$$

或写成方程组的形式为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (1.1.9)$$

将上面的三式分别乘以 $\frac{\partial x}{\partial a}$, $\frac{\partial y}{\partial a}$, $\frac{\partial z}{\partial a}$, ..., 相加后得到