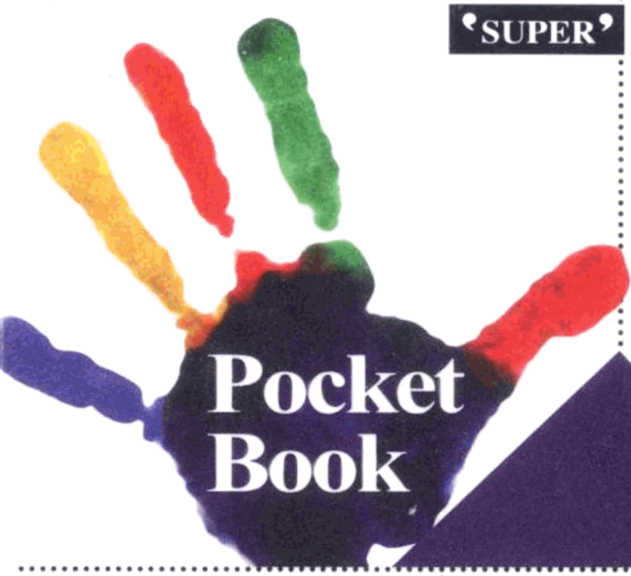
'SUPER'

无敌®

人教版·新课标



绝对暗记

必4修

高中数学

- 小小口袋书　惊喜处处
- 从学习之门轻松出发
- 惊艳知识淬炼之美
- 感受快乐学习
- 幸福面对升学应考

- 紧贴学年教学进度
- 随时随地强化记忆

外文出版社
FOREIGN LANGUAGES PRESS

光照学海
知识无敌

无敌®

绝对暗记 高中数学·必修4

图书在版编目(CIP)数据

无敌绝对暗记.高中数学.4:必修/赵平易等编著.—北京:外文出版社,2009
ISBN 978-7-119-06085-9

I.无… II.赵… III.数学课-高中-教学参考资料
IV.G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第185021号

2009年11月第1版
2009年11月第1版第1次印刷

出　　版	外文出版社·北京市西城区百万庄大街24号·邮编:100037
责任编辑	吴运鸿
经　　销	新华书店/外文书店
印　　刷	北京市京津彩印有限公司
印　　次	2009年11月第1版第1次印刷
开　　本	1/48,787×1092mm,2.5印张
书　　号	ISBN 978-7-119-06085-9
定　　价	9.80元
总监制	张志坚
作　　者	赵平易　李晓辉
总编辑	吴锴鋆
主　　编	陈　茜
执行责编	王占景　金会芳
美术编辑	李可欣　王晓京
美术设计	Kaiyun　李子奇
行销企划	北京光海文化用品有限公司 北京市海淀区车公庄西路乙19号 北塔六层　邮编:100048
集团电话	(010) 88018838(总机)
发行部	(010) 88018956(专线)
订购传真	(010) 88018952
读者服务	(010) 88018838转53、10(分机)
选题征集	(010) 88018958(专线)
网　　址	http://www.super-wudi.com
E-mail	service@super-wudi.com

'SUPER'

Pocket Book

人教版

绝对暗记

高中数学

必修 4

外文出版社
FOREIGN LANGUAGES PRESS

contents 目录

高中数学·必修④

第 1 章

基本的初等函数(II)

第1章 基本的初等函数(Ⅱ)

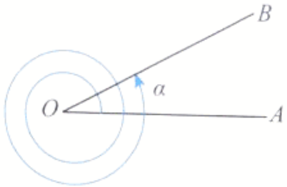
1.1 任意角的概念与弧度制

角的概念的推广

必记知识

【必记知识1】正角、负角、零角概念

■一条射线由原来位置OA，绕着它的端点O，按逆时针方向旋转，转到OB形成的角规定为正角，如图中角α；把按顺时针方向旋转所形成的角规定为负角，如图中的β；射线没作任何旋转时，我们认为它这时也形成了一个角，



并把这个角规定为零角，与初中所学角概念一样，OA、OB、点O分别叫该角的始边、终边、角顶点.

注 意

(1)在画图时，常用带箭头的弧来表示旋转的方向和旋转的绝对量，这样就能区分开任意角的大小.

(2)角的旋转定义十分重要，它不仅把角的概念推广到任意角，而且也是我们研究有关角的问题的一种重要途径.

例1 射线OA绕端点O顺时针旋转260°到达位置OB，再由OB位置逆时针旋转一周到达OC位置，再由OC位置顺时针旋转80°到达OD位置，求$\angle AOD$的大小，并画出图形进行验证.

解 依题意知：

$\angle AOB=-260°$，$\angle BOC=360°$，$\angle COD=-80°$，

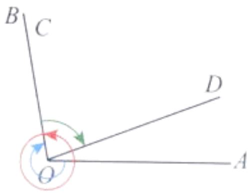
$\therefore \angle AOD$

$=\angle AOB+\angle BOC+\angle COD$

$=(-260°)+360°+(-80°)$

$=20°$.

画图进行验证如图：



【必记知识2】象限角与轴上角

- 如果把角顶点与直角坐标系原点重合，角的始边与x轴的正半轴重合，这时，角的终边落在第几象限，就称这个角是第几象限角，特别地，如果角的终边落在坐标轴上，就说该角不属于任何象限，习惯上称其为轴上角.

注意

象限角与轴上角都是强调把始边放在x轴的非负半轴上，而看终边所在的位置.

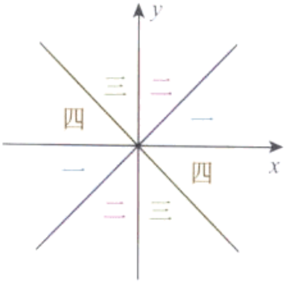
【必记知识3】终边相同的角

- 一般地，我们把所有与角α终边相同的角，连同角α在内的一切角，记成$\beta=\alpha+k\cdot 360°$，$k\in\mathbf{Z}$或写成集合$S=\{\beta\mid\beta=\alpha+k\cdot 360°,k\in\mathbf{Z}\}$的形式.

常见规律

【常见规律1】确定半角的象限

- 当α分别是第一、二、三、四象限的角时，$\frac{\alpha}{2}$则顺次是第一或三、一或三、二或四、二或四象限的角，图形如图所示：



【常见规律2】各象限角的集合表示

1 第一象限角集合为$\{\alpha \mid k\cdot 360^\circ<\alpha<90^\circ+k\cdot 360^\circ, k\in \mathbf{Z}\}$；

2 第二象限角集合为$\{\alpha \mid k\cdot 360^\circ+90^\circ<\alpha<k\cdot 360^\circ+180^\circ, k\in \mathbf{Z}\}$；

3 第三象限角集合为$\{\alpha \mid k\cdot 360^\circ+180^\circ<\alpha<k\cdot 360^\circ+270^\circ, k\in \mathbf{Z}\}$；

4 第四象限角集合为$\{\alpha \mid k\cdot 360^\circ+270^\circ<\alpha<k\cdot 360^\circ+360^\circ, k\in \mathbf{Z}\}$.

【常见规律3】轴上角的集合表示

1 x轴上的角的集合为$\{\alpha \mid \alpha=k\cdot 180^\circ, k\in \mathbf{Z}\}$；

2 y轴上的角的集合为$\{\alpha \mid \alpha=k\cdot 180^\circ+90^\circ, k\in \mathbf{Z}\}$.

常用方法

【常用方法1】旋转的方法

- 由于角的概念是使用旋转定义的，所以旋转思想方法在角的表示和计算中十分重要，用好也十分方便.

例2 分别写出：

(1)终边落在第一、三象限角平分线上的角的集合；

(2)终边落在四个象限角平分线上的角的集合.

⋆ 解 (1)我们可以先写出符合条件的一个最小正角，即$45°$，然后我们利用旋转的思想方法可知，每旋转$180°$能使得角的终边落在符合条件的位置上，因此结论是$\{\alpha|\alpha=45°+k\cdot180°, k\in\mathbf{Z}\}$.

(2)同样道理，符合条件的一个最小正角是$45°$，每旋转$90°$就能使得角的终边落在符合条件的位置上，因此结论是$\{\alpha|\alpha=45°+k\cdot90°, k\in\mathbf{Z}\}$.

【常用方法2】分类讨论的方法

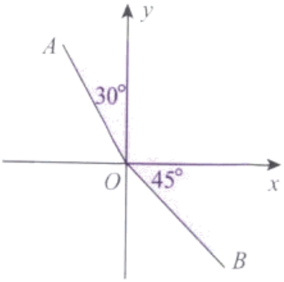
▪ 分类讨论的思想方法是数学中十分重要的方法，在这节运用也相当广泛. 如可用分类讨论的方法由α所在象限，讨论出2α、3α、$\frac{\alpha}{2}$、$\frac{\alpha}{3}$所在象限. 如下表：

α	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ
2α	Ⅰ、Ⅱ	Ⅲ、Ⅳ	Ⅰ、Ⅱ	Ⅲ、Ⅳ
3α	Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ	Ⅰ、Ⅱ、Ⅳ	Ⅰ、Ⅲ、Ⅳ	Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ
$\frac{\alpha}{2}$	Ⅰ、Ⅲ	Ⅰ、Ⅲ	Ⅱ、Ⅳ	Ⅱ、Ⅳ
$\frac{\alpha}{3}$	Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ	Ⅰ、Ⅱ、Ⅳ	Ⅰ、Ⅲ、Ⅳ	Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ

【常用方法3】数形结合的思想

▪ 角本身就是一个形的东西，借助数形结合的思想方法求解是十分方便的事.

◣ 例3 (1)如图，终边落在OA位置时的角的集合是______；终边落在OB位置，且在$[-360°, 360°]$内的角的集合是______；终边落在蓝色部分(含边界)的角的集合是______.

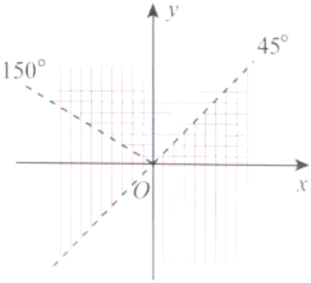


(2)已知$A=\{\alpha \mid k\cdot 360^\circ<\alpha<150^\circ+k\cdot 360^\circ, k\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{\beta \mid -90^\circ+k\cdot 360^\circ<\beta<45^\circ+k\cdot 360^\circ$ 或 $90^\circ+k\cdot 360^\circ<\beta<225^\circ+k\cdot 360^\circ, k\in\mathbf{Z}\}$，求$A\cap B$与$A\cup B$.

★ 解 (1)由图形直观可得：终边落在OA位置时角的集合是$\{\alpha \mid \alpha=120^\circ+k\cdot 360^\circ, k\in\mathbf{Z}\}$；终边落在$OB$位置，且在$[-360^\circ, 360^\circ]$内的角的集合是$\{-45^\circ, 315^\circ\}$；终边落在蓝色部分(含边界)的角的集合是：

$\{\beta \mid -45^\circ+k\cdot 360^\circ\leqslant\beta\leqslant 120^\circ+k\cdot 360^\circ, k\in\mathbf{Z}\}$.

(2)分别在直角坐标平面上画出表示集合A、B的示意图(A为横线部分，B为竖线部分，如图)，再由图形直观得出：



$A\cap B=\{\alpha \mid 90^\circ+k\cdot 360^\circ<\alpha<150^\circ+k\cdot 360^\circ$，或$k\cdot 360^\circ<\alpha<45^\circ+k\cdot 360^\circ, k\in\mathbf{Z}\}$；

$A\cup B=\{\alpha \mid -90^\circ+k\cdot 360^\circ<\alpha<225^\circ+k\cdot 360^\circ, k\in\mathbf{Z}\}$.

弧度制和弧度制与角度制的换算

必记知识

【必记知识1】弧度制定义

1 我们把等于半径长的圆弧所对的圆心角叫做1弧度的角，如图1所示，$\overset{\frown}{AB}$的长等于半径r，$\overset{\frown}{AB}$所对的圆心角$\angle AOB$就是1弧度的角，弧度制的单位符号是rad，读作弧度.

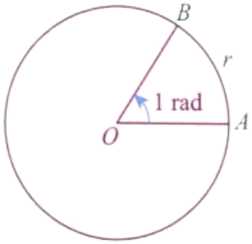


图1

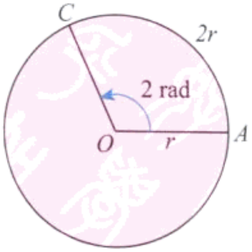


图2

图1，$\angle AOB$的弧度数$=\frac{l}{r}=\frac{r}{r}=1$；

图2，$\angle AOC$的弧度数$=\frac{l}{r}=\frac{2r}{r}=2$.

2 一般地，可以得到：正角的弧度数是一个正数，负角的弧度数是一个负数，零角的弧度数是0；角α的弧度数的绝对值$|\alpha|=\frac{l}{r}$，其中l是以角α作为圆心角时所对的弧长，r是圆的半径，这种以弧度作为单位来度量角的单位制，叫做弧度制.

【必记知识2】角度制与弧度制的换算

1 角度与弧度的互化关系是：π rad=180°，

因此：$1\ \text{rad}=\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}\approx 57.30^{\circ}=57^{\circ}18'$；

$1^{\circ}=\frac{\pi}{180}\ \text{rad}\approx 0.017\,45\ \text{rad}$.

可见弧度化角度，乘以$\frac{180^{\circ}}{\pi}$；角度化弧度，乘以$\frac{\pi}{180}$.

2 用角度制和弧度制度量角，零角既是0°，又是0 rad角，除此之外，同一个非零角的度数和弧度数是不同的.

【必记知识3】一些特殊角的弧度数

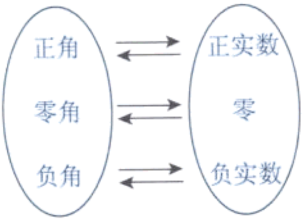
角度	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

【必记知识4】角集合与实数集R之间的一一对应

1 用弧度制来度量角，实际上是在角的集合与实数集**R**之间建立这样的一一对应关系(如下图所示).

2 每一个角都有唯一的一个实数(即这个角的弧度数)与它对应；反过来，每一个实数也都有唯一的一个

角(角的弧度数等于这个实数)与它对应. 于是，就可以把三角函数看成是以实数为自变量的函数，它的自变量的意义可以有多种解释，从而使三角函数的应用更加广泛，在数学与科学研究中之所以普遍采用弧度制，这是原因之一.



【必记知识5】有关公式

1 弧长$l=|\alpha|\cdot r$.

2 $S_{扇形}=\frac{1}{2}l\cdot r=\frac{1}{2}r^2|\alpha|$.

常见规律

【常见规律1】转化一般形式判断象限

1 用弧度制表示终边相同的角的方法是$\beta=2k\pi+\alpha$，$k\in\mathbf{Z}$，$2k\pi$是π的偶数倍，而不是整数倍.

2 把一角化为$2k\pi+\alpha$形式，其中$k\in\mathbf{Z}$，$\alpha\in[0, 2\pi)$，从而可判断角所在象限.

3 在同一问题求解过程中，两种单位不能混用，如$\{\alpha\,|\,\alpha=2k\pi+30^\circ, k\in\mathbf{Z}\}$写法不妥.

【常见规律2】面积最大值

■ 弧度制下的弧长公式及扇形面积公式配合利用，不仅可以求值，而且还可以求扇形面积的最值问题等.

例1 已知扇形的周长是30，当它的半径R和圆心角α各取多少时，扇形面积S最大？并求出面积最大值.

解 设扇形的弧长为l，则$\begin{cases} l+2R=30, \\ S=\frac{1}{2}lR. \end{cases}$

$\therefore S=\frac{1}{2}(30-2R)R=-\left(R-\frac{15}{2}\right)^2+\frac{225}{4}$.

$\therefore$ 当$R=\dfrac{15}{2}$时，扇形面积最大，最大值为$\dfrac{225}{4}$.

此时$l=15$，中心角$\alpha=\dfrac{l}{R}=\dfrac{15}{\frac{15}{2}}=2(\text{rad})$.

注 意

解题时，一般情况是由扇形面积公式及弧长公式转化成二次函数，再利用二次函数的最值问题求解. 在审题时应详细分析，去其表，露其质.

常用方法

【常用方法1】弧长公式解决实际问题

例2 直径为24 cm的轮子，每5 min转1 000圈，试求：

(1)它的平均角速度(1 s经过的弧度数)；

(2)轮沿上一点1 s经过的距离；

(3)轮沿上一点经过1 000° 所经过的距离.

【思路引导】这是利用弦长公式来解决某些实际问题，考查平均角速度的概念，与物理学相联系.

解 (1)因为5 min转1 000圈，

故1 s转$\dfrac{1\ 000}{5\times 60}=\dfrac{10}{3}$(圈)，

故平均角速度为$\dfrac{10}{3}\times 2\pi=\dfrac{20\pi}{3}$.

(2)$l=|\alpha|R=\dfrac{20\pi}{3}\times 12=80\pi$(cm).

(3)$l=|\alpha|R=1\ 000\times\dfrac{\pi}{180}\times 12$

$=\dfrac{200\pi}{3}$(cm).

【常用方法2】特殊值法判断集合的关系

例3 集合$M=\left\{x \middle| x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$，$N=\left\{x \middle| x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$，则有(　　).

A. $M=N$　　B. $M\supsetneqq N$　　C. $M\subsetneqq N$　　D. $M\cap N=\varnothing$

【思路引导】对集合M中的整数k依次取0, 1, 2, 3, 得角$\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$, 对集合N中的整数k依次取-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5可得角$\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{4}\pi$, π, $\frac{5}{4}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$, 因此选C.

答 C

1.2 任意角的三角函数

三角函数的定义

必记知识

【必记知识1】任意角的三角函数定义

1 如图，设α是任意角，α的终边上任意一点P的坐标是(x, y)，它与原点的距离为r，则

$$r=\sqrt{|x|^2+|y|^2}=\sqrt{x^2+y^2}>0.$$

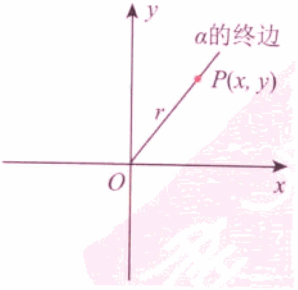


图1

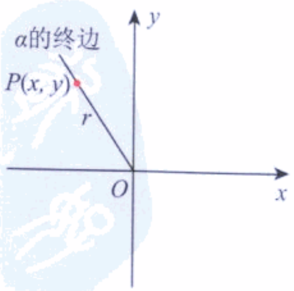


图2

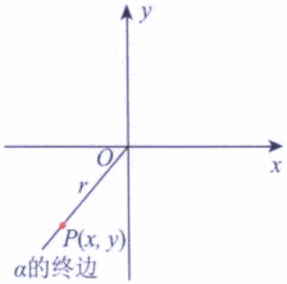


图3

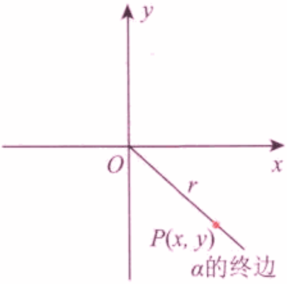


图4

2 定义:

(1)比值$\frac{y}{r}$叫做α的正弦,记作$\sin\alpha$,即$\sin\alpha=\frac{y}{r}$.

(2)比值$\frac{x}{r}$叫做α的余弦,记作$\cos\alpha$,即$\cos\alpha=\frac{x}{r}$.

(3)比值$\frac{y}{x}$叫做α的正切,记作$\tan\alpha$,即$\tan\alpha=\frac{y}{x}$.

(4)比值$\frac{x}{y}$叫做α的余切,记作$\cot\alpha$,即$\cot\alpha=\frac{x}{y}$.

(5)比值$\frac{r}{x}$叫做α的正割,记作$\sec\alpha$,即$\sec\alpha=\frac{r}{x}$.

(6)比值$\frac{r}{y}$叫做α的余割,记作$\csc\alpha$,即$\csc\alpha=\frac{r}{y}$.

我们把正弦、余弦,正切、余切,正割及余割都看成是以角为自变量,以比值为函数值的函数,以上六种函数统称三角函数.

注意

(1)不论点P在终边上的位置如何,任意角α的三角函数值的大小都是定值,它们只由角α的大小决定,而与P点在角α的终边上的位置无关;

(2)三角函数是以实数为自变量的函数,即:实数→角(其弧度数等于这个实数)→三角函数值(实数).

【必记知识2】任意角的三角函数的定义域

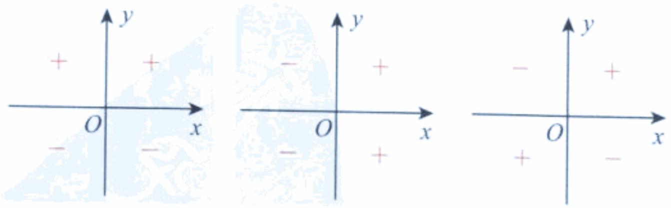
三角函数	定义域
$\sin\alpha$	$\mathbf{R}$
$\cos\alpha$	$\mathbf{R}$
$\tan\alpha$	$\left\{\alpha \middle| \alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})\right\}$
$\cot\alpha$	$\{\alpha \mid \alpha\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})\}$
$\sec\alpha$	$\left\{\alpha \middle| \alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})\right\}$
$\csc\alpha$	$\{\alpha \mid \alpha\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})\}$

【必记知识3】特殊角的三角函数值

角度	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在	0	不存在	0

【必记知识4】三角函数值的符号

- 根据三角函数定义可知，$\sin\alpha$与$\csc\alpha$，$\cos\alpha$与$\sec\alpha$，$\tan\alpha$与$\cot\alpha$互为倒数，因此它们的符号规律相同. $\sin\alpha$、$\cos\alpha$、$\tan\alpha$三个三角函数值在各象限内的符号如图所示.



$\sin\alpha$，$\csc\alpha$　　$\cos\alpha$，$\sec\alpha$　　$\tan\alpha$，$\cot\alpha$

可以表达为正弦和余割上正下负，余弦与正割左负右正，正切与余切一、三象限为正，二、四象限为负.

第1章