FOCUS 聚焦图书

聚骄公司全心专业设计

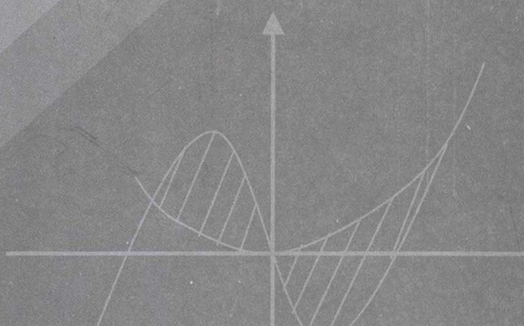
2010版考研数学复习指南

课后习题答案全解

（经济类）

$$F'(\xi)=\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) \end{vmatrix}=0$$

$$f^{(n)}(x)=\frac{1}{2}\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}+\frac{1}{2}\frac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}}$$



目　　录

第一篇　微积分

第二篇　线性代数

第三篇　概率论与数理统计

第一篇　微积分

第一章　函数·极限·连续

一、填空题

1. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{ax}=\int_{-\infty}^{a}te^{t}\mathrm{d}t$，则 $a=$ ________.

【解】 可得 $e^{a}=\int_{-\infty}^{a}te^{t}\mathrm{d}t=(te^{t}-e^{t})\Big|_{-\infty}^{a}=ae^{a}-e^{a}$，所以 $a=2$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^{2}+n+1}+\dfrac{2}{n^{2}+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^{2}+n+n}\right)=$ ________.

【解】 $\dfrac{1}{n^{2}+n+n}+\dfrac{2}{n^{2}+n+n}+\cdots+\dfrac{n}{n^{2}+n+n}$

$<\dfrac{1}{n^{2}+n+1}+\dfrac{2}{n^{2}+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^{2}+n+n}<\dfrac{1}{n^{2}+n+1}+\dfrac{2}{n^{2}+n+1}+\cdots+\dfrac{n}{n^{2}+n+1}$

所以 $\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^{2}+n+n}<\dfrac{1}{n^{2}+n+1}+\dfrac{2}{n^{2}+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^{2}+n+n}<\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^{2}+n+1}$

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^{2}+n+n}=\frac{\frac{n(1+n)}{2}}{n^{2}+n+n}\to\frac{1}{2},\ (n\to\infty)$$

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^{2}+n+1}=\frac{\frac{n(1+n)}{2}}{n^{2}+n+1}\to\frac{1}{2},\ (n\to\infty)$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^{2}+n+1}+\dfrac{2}{n^{2}+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^{2}+n+n}\right)=\dfrac{1}{2}$.

3. 设 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_{b}^{x}\frac{\ln(1+t^{3})}{t}\mathrm{d}t}=c\neq0$，则 $a=$ ________，$b=$ ________，$c=$ ________.

【解】 因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_{b}^{x}\frac{\ln(1+t^{3})}{t}\mathrm{d}t}=c\neq0$，所以 $b=0$. 按洛必达法则

$$\lim_{x\to0}\frac{ax-\sin x}{\int_{b}^{x}\frac{\ln(1+t^{3})}{t}\mathrm{d}t}=\lim_{x\to0}\frac{a-\cos x}{\frac{\ln(1+x^{3})}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{a-\cos x}{x^{3}/x}$$

$$\xlongequal{\text{所以 } a=1}\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^{2}}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{2}=c\neq0.$$

所以 $b=0$，$a=1$，$c=\dfrac{1}{2}$.

4. 已知 $f'(3)=2$，则 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{2h}=$ ________.

【解】 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{2h}=-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{-h}=-\dfrac{1}{2}f'(3)=-1$.

5. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}1 & |x|\leqslant 1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$，则 $f[f(x)]$ ________.

【解】$f[f(x)]=1$.

6. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})=$ ________.

【解】$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})(\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}})}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+3\sqrt{n}-n+\sqrt{n}}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}=2.$

7. 设函数 $f(x)$ 有连续的导函数，$f(0)=0$，$f'(0)=b$，

若 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)+a\sin x}{x} & x\neq 0\\ A & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则常数 $A=$ ________.

【解】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+a\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)+a\cos x}{1}=f'(0)+a=b+a=A.$

8. 已知当 $x\to 0$ 时，$f(x)=e^x-\dfrac{1+ax}{1+bx}$ 为 x 的 3 阶无穷小，则 $a=$ ________，$b=$ ________.

【解】$0\neq k=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\dfrac{1+ax}{1+bx}}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+bxe^x-1-ax}{x^3(1+bx)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+bxe^x-1-ax}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+bxe^x+be^x-a}{3x^2}\overset{\text{所以 } b+1=a}{=\!=\!=\!=\!=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+2be^x+bxe^x}{6x}.$

所以 $2b+1=0$，$b=-\dfrac{1}{2}$，$a=\dfrac{1}{2}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\cot x\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)=$ ________.

【解】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{\sin x}\cdot\dfrac{x-\sin x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{6x}=\dfrac{1}{6}.$

10. 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{1990}}{n^k-(n-1)^k}=A(\neq 0\neq\infty)$，则 $A=$ ________，$k=$ ________.

【解】$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{1990}}{n^k-(n-1)^k}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{1990}}{kn^{k-1}+\cdots}=A,$

所以 $k-1=1990$，$k=1991$；$\dfrac{1}{k}=A, A=\dfrac{1}{k}=\dfrac{1}{1991}$.

二、选择题

1. 设 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，$f(x)$ 为连续函数，且 $f(x)\neq 0$，$\varphi(x)$ 有间断点，则

A. $\varphi[f(x)]$ 必有间断点

B. $[\varphi(x)]^2$ 必有间断点

C. $f[\varphi(x)]$ 必有间断点

D. $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ 必有间断点

【解】A 反例 $\varphi(x)=\begin{cases}1 & |x|\leqslant 1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$，$f(x)=1$，则 $\varphi[f(x)]=1$；

B 反例 $\varphi(x)=\begin{cases}1 & |x|\leqslant 1\\ -1 & |x|>1\end{cases}$，$[\varphi(x)]^2=1$；

C 反例 $\varphi(x)=\begin{cases}1 & |x|\leqslant 1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$，$f(x)=1$，则 $f[\varphi(x)]=1$；

D反设 $g(x)=\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ 在$(-\infty+\infty)$内连续，则 $\varphi(x)=g(x)f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内连续，矛盾. 所以 D 是答案.

2. 设函数 $f(x)=x\cdot\tan x\cdot e^{\sin x}$，则 $f(x)$ 是

A. 偶函数　　B. 无界函数　　C. 周期函数　　D. 单调函数

【解】 B 是答案.

3. 当 $x\to 1$ 时，函数$\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限是

A. 等于 2　　B. 等于 0　　C. 为 ∞　　D. 不存在但不为 ∞

【解】 $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=0$，所以 D 为答案.

4. 若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x(e^{t^2}-1)\mathrm{d}t}{x^2} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$ ________.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. $\dfrac{1}{2}$

【解】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x(e^{t^2}-1)\mathrm{d}t}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}2x}{2}=0=f(0)=a$，所以 A 为答案.

5. 极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{3}{1^2\times 2^2}+\dfrac{5}{2^2\times 3^2}+\cdots+\dfrac{2n+1}{n^2\times(n+1)^2}\right]$的值是

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 不存在

【解】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{3}{1^2\times 2^2}+\dfrac{5}{2^2\times 3^2}+\cdots+\dfrac{2n+1}{n^2\times(n+1)^2}\right]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1^2}-\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^2}-\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right]=1$，所以 B 为答案.

6. 设$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^{95}(ax+1)^5}{(x^2+1)^{50}}=8$，则 a 的值为

A. 1　　B. 2　　C. $\sqrt[5]{8}$　　D. 均不对

【解】 $8=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^{95}(ax+1)^5}{(x^2+1)^{50}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^{95}/x^{95}(ax+1)^5/x^5}{(x^2+1)^{50}/x^{100}}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1+1/x)^{95}(a+1/x)^5}{(1+1/x^2)^{50}}=a^5$，$a=\sqrt[5]{8}$，所以 C 为答案.

7. 设$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(3x-2)^{\alpha}}=\beta$，则 α，β 的数值为

A. $\alpha=1$，$\beta=\dfrac{1}{3}$　　B. $\alpha=5$，$\beta=\dfrac{1}{3}$　　C. $\alpha=5$，$\beta=\dfrac{1}{3^5}$　　D. 均不对

【解】 C 为答案.

8. 设 $f(x)=2^x+3^x-2$，则当 $x\to 0$ 时

A. $f(x)$ 是 x 的等价无穷小　　B. $f(x)$ 是 x 的同阶但非等价无穷小

C. $f(x)$ 比 x 较低阶无穷小　　D. $f(x)$ 比 x 较高阶无穷小

【解】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x+3^x-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x\ln 2+3^x\ln 3}{1}=\ln 2+\ln 3$，所以 B 为答案.

9. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)+a}{x}=6$，则 a 的值为

A. -1　　B. 1　　C. 2　　D. 3

【解】$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)(1+2x)(1+3x)+a=0$，$1+a=0$，$a=-1$，所以 A 为答案.

10. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+\mathrm{d}(1-e^{-x^2})}=2$，其中 $a^2+c^2\neq 0$，则必有

A. $b=4d$　　B. $b=-4d$　　C. $a=4c$　　D. $a=-4c$

【解】$2=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+\mathrm{d}(1-e^{-x^2})}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{a}{\cos^2 x}+b\sin x}{\dfrac{-2c}{1-2x}+2x\mathrm{d}e^{-x^2}}=-\dfrac{a}{2c}$，所以 $a=-4c$，

所以 D 为答案.

三、计算题

1. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$

【解】$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln(x+e^x)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+e^x)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+e^x}{x+e^x}}=e^1=e.$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$

【解】$\lim\limits_{x\to 0}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin x+\cos x-1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cos x-\sin x}{1}}=e^2.$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x})^x$

【解】令 $y=\dfrac{1}{x}$

$\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x})^x=\lim\limits_{y\to 0}(\sin 2y+\cos y)^{\frac{1}{y}}=e^{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin 2y+\cos y-1}{y}}=e^{\lim\limits_{y\to 0}\frac{2\cos 2y-\sin y}{1}}=e^2.$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}}$

【解】$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot\frac{x^2}{2}}{x^3}}=e^{\frac{1}{2}}.$

2. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(1+\sqrt[3]{x-1})}{\arcsin 2\sqrt[3]{x^2-1}}$

【解】当 $x\to 1$ 时，$\ln(1+\sqrt[3]{x-1})\sim\sqrt[3]{x-1}$，$\arcsin 2\sqrt[3]{x^2-1}\sim 2\sqrt[3]{x^2-1}$. 按照等价

无穷小代换 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln(1+\sqrt[3]{x-1})}{\arcsin 2\sqrt[3]{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{2\sqrt[3]{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{2\sqrt[3]{x+1}}=\dfrac{1}{2\sqrt[3]{2}}$.

(2) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\cot^2 x\right)$

【解】方法 1：

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\cot^2 x\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{1-(x^2+1)\cos^2 x}{x^4}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{-2x\cos^2 x+2(x^2+1)\cos x\sin x}{4x^3}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-2x\cos^2 x+\sin 2x}{4x^3}+\lim_{x\to0}\frac{2x^2\cos x\sin x}{4x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-2\cos^2 x+4x\cos x\sin x+2\cos 2x}{12x^2}+\frac{1}{2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-2\cos^2 x+2\cos 2x}{12x^2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\lim_{x\to0}\frac{4\cos x\sin x-4\sin 2x}{24x}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-2\sin 2x}{24x}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$$

方法 2：

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\cot^2 x\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{1-(x^2+1)\cos^2 x}{x^4}\right)=\lim_{x\to0}\left[\frac{1-\frac{1}{2}(x^2+1)(\cos 2x+1)}{x^4}\right]$$

$$=\lim_{x\to0}\left[\frac{1-\frac{1}{2}(x^2+1)(1+1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}+o(x^4))}{x^4}\right]$$

$$=\lim_{x\to0}\left[\frac{1-\frac{1}{2}(2x^2-2x^4+2-2x^2+\frac{16}{24}x^4+o(x^4))}{x^4}\right]$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{2}{3}x^4}{x^4}=\frac{2}{3}.$$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\cos x\cdot\sqrt{1-x^2})}{\tan x\ln(1+x)}$

【解】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\cos x\cdot\sqrt{1-x^2})}{\tan x\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\cos x\cdot\sqrt{1-x^2})}{x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\cos x}\left(-\sqrt{1-x^2}\sin x-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\cos x\right)}{2x}$$

$$=-\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{2x\cos x}+\frac{1}{2(1-x^2)}\right)=-1.$$

3. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[e^2-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n}\right]$

【解】$\lim\limits_{n\to\infty} n\left[e^2-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^2-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n}}{\dfrac{1}{n}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^2-(1+x)^{\frac{2}{x}}}{x}$

$=-2\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{2}{x}}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)'=-2e^2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}$

$=-2e^2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}=-2e^2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\ln(1+x)-1}{2x}=e^2.$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\ln n}(\sqrt[n]{n}-1)$

【解】$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\ln n}(\sqrt[n]{n}-1)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n}-1}{\ln\sqrt[n]{n}}\xlongequal{\text{令}\sqrt[n]{n}-1=x}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\ln(1+x)}=1.$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(x+\dfrac{a}{n}\right)+\left(x+\dfrac{2a}{n}\right)+\cdots+\left(x+\dfrac{(n-1)a}{n}\right)\right]\cdot\dfrac{1}{n}$

【解】$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(x+\dfrac{a}{n}\right)+\left(x+\dfrac{2a}{n}\right)+\cdots+\left(x+\dfrac{(n-1)a}{n}\right)\right]\cdot\dfrac{1}{n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left((n-1)x+\dfrac{1+2+\cdots+(n-1)}{n}a\right)\dfrac{1}{n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)x}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n-1)}{2n^2}a=x+\dfrac{1}{2}a.$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{(n^2+1)^{\frac{1}{2}}}+\cdots+\dfrac{1}{(n^n+1)^{\frac{1}{n}}}\right)$

【解】$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{(n^2+1)^{\frac{1}{2}}}+\cdots+\dfrac{1}{(n^n+1)^{\frac{1}{n}}}\right)$

$\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{(n^2+1)^{\frac{1}{2}}}+\cdots+\dfrac{1}{(n^n+1)^{\frac{1}{n}}}=\dfrac{1}{n}\left[\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}}+\dfrac{1}{(1+\dfrac{1}{n^2})^{\frac{1}{2}}}+\cdots+\dfrac{1}{(1+\dfrac{1}{n^n})^{\frac{1}{n}}}\right]$

$\forall i<j$，$\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n^i}}<\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n^j}}$，所以$\dfrac{1}{(1+\dfrac{1}{n^i})^{\frac{1}{i}}}<\dfrac{1}{(1+\dfrac{1}{n^j})^{\frac{1}{i}}}<\dfrac{1}{(1+\dfrac{1}{n^j})^{\frac{1}{j}}}$

所以$\dfrac{1}{(1+\dfrac{1}{n^n})^{\frac{1}{n}}}<\dfrac{1}{n}\left[\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}}+\dfrac{1}{(1+\dfrac{1}{n^2})^{\frac{1}{2}}}+\cdots+\dfrac{1}{(1+\dfrac{1}{n^n})^{\frac{1}{n}}}\right]<\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}}$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(1+\dfrac{1}{n^n})^{\frac{1}{n}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}}=1$，所以

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{(n^2+1)^{\frac{1}{2}}}+\cdots+\dfrac{1}{(n^n+1)^{\frac{1}{n}}}\right)=1.$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-e^{-nx}}{1+e^{nx}}$

【解】$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-e^{-nx}}{1+e^{nx}}=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0.\end{cases}$

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$，其中 $a>0$，$b>0$.

【解】$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n \xlongequal{x=1/n,c=b/a} a\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1+c^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$

$=ae^{\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1+c^x}{2}-1\right)\frac{1}{x}}=ae^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1+c^x-2}{2x}}=ae^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{c^x\ln c}{2}}=ae^{\frac{\ln c}{2}}=a\sqrt{\dfrac{b}{a}}=\sqrt{ab}.$

四、设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x^2}(1-\cos x) & x<0\\ 1 & x=0\\ \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x\cos t^2\,\mathrm{d}t & x>0\end{cases}$，试讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性与可导性.

【解】$f'(0^+)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{x}\int_0^x\cos t^2\,\mathrm{d}t-1}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^x\cos t^2\,\mathrm{d}t-x}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\cos x^2-1}{2x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{-2x\sin x^2}{2}=0,$

$f'(0^-)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\frac{2}{x^2}(1-\cos x)-1}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{2-2\cos x-x^2}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{2\sin x-2x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{2\cos x-2}{6x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-2\sin x}{6}=0,$

所以 $f'(0)=0$，所以 $f(x)$ 在($x=0$ 处)可导，所以 $f(x)$ 在($x=0$ 处)连续.

五、求下列函数的间断点并判别类型

1. $f(x)=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$

【解】$f(0^+)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=1$，$f(0^-)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=-1$，

所以 $x=0$ 为第一类间断点.

2. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}\cdot x$

【解】$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}\cdot x=\begin{cases}-x & |x|\geqslant1\\ x & |x|<1\end{cases}$

显然 $f(1+0)=-1, f(1-0)=1$，所以 $x=1$ 为第一类间断点；

$f(-1+0)=-1, f(-1-0)=1$，所以 $x=-1$ 为第一类间断点.

3. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x(2x+\pi)}{2\cos x} & x\leqslant0\\ \sin\dfrac{1}{x^2-1} & x>0\end{cases}$

【解】$f(+0)=-\sin1$，$f(-0)=0$. 所以 $x=0$ 为第一类跳跃间断点；

$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\sin\dfrac{1}{x^2-1}$ 不存在. 所以 $x=1$ 为第二类间断点；

$f(-\dfrac{\pi}{2})$ 不存在，而 $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}\dfrac{x(2x+\pi)}{2\cos x}=-\dfrac{\pi}{2}$，所以 $x=-\dfrac{\pi}{2}$ 为第一类可去间断点；

$\lim\limits_{x\to-k\pi-\frac{\pi}{2}} \dfrac{x(2x+\pi)}{2\cos x}=\infty$,$(k=1,2,\cdots)$ 所以 $x=-k\pi-\dfrac{\pi}{2}$ 为第二类无穷间断点.

六、试确定常数 a,b 的值,使极限

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{b}{x^5}\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)$存在,并求该极限值.

【解】$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{b}{x^5}\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax^3+x+b\int_0^x e^{-t^2}\,dt}{x^5}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3ax^2+1+be^{-x^2}}{5x^4}\xlongequal{\text{分子极限为 }0,b=-1}\lim_{x\to 0}\frac{3ax^2+1-e^{-x^2}}{5x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{6ax+2xe^{-x^2}}{20x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{6a+2e^{-x^2}-4x^2e^{-x^2}}{60x^2}$$

$$\xlongequal{\text{分子极限为 }0,a=-\frac{1}{3}}\lim_{x\to 0}\frac{-4xe^{-x^2}-8xe^{-x^2}+8x^3e^{-x^2}}{120x}=-\frac{1}{10}.$$

七、设 $f(x)=\dfrac{1}{\sin^2 x}[\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x}-(\alpha+\beta\sin x)]$,且 $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点.

求 α,β.

【解】$x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点,要求

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x}-(\alpha+\beta\sin x)}{\sin^2 x}$ 存在. 所以

$\lim\limits_{x\to 0}[\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x}-(\alpha+\beta\sin x)]=0$. 所以

$$0=\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin x+\sin^2 x-(\alpha+\beta\sin x)^2}{\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x}+(\alpha+\beta\sin x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\alpha^2)+(1-2\alpha\beta)\sin x+(1-\beta^2)\sin^2 x}{\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x}+(\alpha+\beta\sin x)}=\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha}=1-\alpha$$

所以 $\alpha=1$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x}-(\alpha+\beta\sin x)}{\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-2\beta)\sin x+(1-\beta^2)\sin^2 x}{\sin^2 x\cdot(\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x}+(1+\beta\sin x))}$$

上式极限存在,必须 $\beta=\dfrac{1}{2}$.

八、设 $\lim\limits_{x\to\infty}[(x^5+7x^4+2)^a-x]=b$,$b\neq 0$,求 a,b 的值.

【解】上式极限存在,必须 $a=\dfrac{1}{5}$(否则极限一定为无穷). 所以

$$\lim_{x\to\infty}[(x^5+7x^4+2)^a-x]=\lim_{x\to\infty}\frac{(1+\frac{7}{x}+\frac{2}{x^5})^{\frac{1}{5}}-1}{\frac{1}{x}}=\lim_{y\to 0}\frac{(1+7y+2y^5)^{\frac{1}{5}}-1}{y}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{1}{5}(1+7y+2y^5)^{-\frac{4}{5}}(7+10y^4)=\frac{7}{5}.\text{ 所以 }b=\frac{7}{5}.$$

九、讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x} & x>0 \\ e^{x}+\beta & x\leqslant 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

【解】 当 $\alpha\leqslant 0$ 时

$\lim\limits_{x\to 0^{+}}(x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x})$ 不存在，所以 $x=0$ 为第二类间断点；

当 $\alpha>0$ 时

$\lim\limits_{x\to 0^{+}}(x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x})=0$，所以 $\beta=-1$ 时，在 $x=0$ 连续，$\beta\neq-1$ 时，$x=0$ 为第一类跳跃间断点.

十、设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 3x}{x^{3}}+\dfrac{f(x)}{x^{2}}\right)=0$，求 $f(0)$，$f'(0)$，$f''(0)$ 及 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+3}{x^{2}}$.

【解】 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 3x}{x^{3}}+\dfrac{f(x)}{x^{2}}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x+xf(x)}{x^{3}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin 3x}{x}+f(x)}{x^{2}}=0$. 所以

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 3x}{x}+f(x)\right)=0$. $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内二阶可导，所以 $f(x)$，$f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 所以 $f(0)=-3$. 因为

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin 3x}{x}+f(x)}{x^{2}}=0$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin 3x}{x}-3+f(x)+3}{x^{2}}=0$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+3}{x^{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{3-\dfrac{\sin 3x}{x}}{x^{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{3x-\sin 3x}{x^{3}}=\lim_{x\to 0}\frac{3-3\cos 3x}{3x^{2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{2x}=\frac{9}{2}.$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+3}{x}=\lim_{x\to 0}x\cdot\frac{f(x)+3}{x^{2}}=0\times\frac{9}{2}=0.$$

由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+3}{x^{2}}=\dfrac{9}{2}$，将 $f(x)$ 泰勒展开，得

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(0)+f'(0)x+\dfrac{1}{2!}f''(0)x^{2}+o(x^{2})+3}{x^{2}}=\dfrac{9}{2}$，所以 $\dfrac{1}{2}f''(0)=\dfrac{9}{2}$，于是 $f''(0)=9$.

第二章　导数与微分

一、填空题

1. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_{x^{2}}^{0}x\cos t^{2}\,\mathrm{d}t=$ ________.

【解】 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_{x^{2}}^{0}x\cos t^{2}\,\mathrm{d}t=\int_{x^{2}}^{0}\cos t^{2}\,\mathrm{d}t-2x^{2}\cos x^{4}$.

2. $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，则 $f^{(n)}(x)=$ ________.

【解】 $f'(x)=\dfrac{-1-x-1+x}{(1+x)^{2}}=\dfrac{(-1)^{1}2\cdot 1!}{(1+x)^{1+1}}$，假设 $f^{(k)}=\dfrac{(-1)^{k}2\cdot k!}{(1+x)^{k+1}}$，则

$f^{(k+1)}=\dfrac{(-1)^{k+1}2\cdot(k+1)!}{(1+x)^{k+1+1}}$，所以 $f^{(n)}=\dfrac{(-1)^n 2\cdot n!}{(1+x)^{n+1}}$.

3. 设 $\begin{cases}x=1+t^2\\ y=\cos t\end{cases}$，则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=$ ________.

【解】$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-\sin t}{2t}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\left(-\dfrac{\sin t}{2t}\right)'_t\dfrac{dt}{dx}=-\dfrac{2t\cos t-2\sin t}{4t^2}\dfrac{1}{2t}=\dfrac{\sin t-t\cos t}{4t^3}$.

4. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^{x+y}+\cos(xy)=0$ 确定，则 $\dfrac{dy}{dx}=$ ________.

【解】$e^{x+y}(1+y')-(y+xy')\sin xy=0$，所以

$y'=\dfrac{y\sin xy-e^{x+y}}{e^{x+y}-x\sin xy}$.

5. 已知 $f(-x)=-f(x)$，且 $f'(-x_0)=k$，则 $f'(x_0)=$ ________.

【解】由 $f(-x)=-f(x)$ 得 $-f'(-x)=-f'(x)$，所以 $f'(-x)=f'(x)$，所以 $f'(x_0)=f'(-x_0)=k$.

6. 设 $f(x)$ 可导，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+m\Delta x)-f(x_0-n\Delta x)}{\Delta x}=$ ________.

【解】$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+m\Delta x)-f(x_0)+f(x_0)-f(x_0-n\Delta x)}{\Delta x}$

$=m\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+m\Delta x)-f(x_0)}{m\Delta x}+n\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-n\Delta x)-f(x_0)}{-n\Delta x}=(m+n)f'(x_0)$.

7. 设 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+k\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\dfrac{1}{3}f'(x_0)$，则 $k=$ ________.

【解】$k\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+k\Delta x)-f(x_0)}{k\Delta x}=\dfrac{1}{3}f'(x_0)$，所以 $kf'(x_0)=\dfrac{1}{3}f'(x_0)$，

所以 $k=\dfrac{1}{3}$.

8. 已知 $\dfrac{d}{dx}\left[f\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right]=\dfrac{1}{x}$，则 $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=$ ________.

【解】$-f'\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\cdot\dfrac{2}{x^3}=\dfrac{1}{x}$，所以 $f'\left(\dfrac{1}{x^2}\right)=-\dfrac{x^2}{2}$. 令 $x^2=2$，所以 $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=-1$.

9. 设 f 为可导函数，$y=\sin\{f[\sin f(x)]\}$，则 $\dfrac{dy}{dx}=$ ________.

【解】$\dfrac{dy}{dx}=f'(x)\cos f(x)f'[\sin f(x)]\cos\{f[\sin f(x)]\}$.

10. 设 $y=f(x)$ 由方程 $e^{2x+y}-\cos(xy)=e-1$ 所确定，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的法线方程为________.

【解】上式二边求导 $e^{2x+y}(2+y')-(y+xy')\sin(xy)=0$. 所以切线斜率

$k=y'(0)=-2$. 法线斜率为 $\dfrac{1}{2}$，法线方程为

$y-1=\dfrac{1}{2}x$，即 $x-2y+2=0$.

二、选择题

1. 设 $f(x)$ 可导，$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$，则 $f(0)=0$ 是 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导的

A. 充分必要条件　　　　B. 充分但非必要条件

C. 必要但非充分条件　　　　D. 既非充分又非必要条件

【解】必要性：

$F'(0)$ 存在，所以 $F'(0^+)=F'(0^-)$，于是

$$F'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)(1+\sin x)-f(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{(f(x)-f(0))+f(x)\sin x}{x}=f'(0)+f(0),$$

$$F'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)(1-\sin x)-f(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{(f(x)-f(0))-f(x)\sin x}{x}=f'(0)-f(0),$$

所以 $f'(0)+f(0)=f'(0)-f(0)$，$2f(0)=0$，$f(0)=0$.

充分性：

已知 $f(0)=0$，所以

$$F'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)(1+\sin x)-f(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{(f(x)-f(0))+f(x)\sin x}{x}=f'(0)+f(0)=f'(0),$$

$$F'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)(1-\sin x)-f(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{(f(x)-f(0))-f(x)\sin x}{x}=f'(0)-f(0)=f'(0),$$

所以 $F'(0)=f'(0)$ 存在. A 是答案.

2. 设 $f(x)$ 是连续函数，且 $F(x)=\int_x^{e^{-x}}f(t)\mathrm{d}t$，则 $F'(x)$ 等于

A. $-e^{-x}f(e^{-x})-f(x)$　　　　B. $-e^{-x}f(e^{-x})+f(x)$

C. $e^{-x}f(e^{-x})-f(x)$　　　　D. $e^{-x}f(e^{-x})+f(x)$

【解】$F'(x)=f(e^{-x})(e^{-x})'-f(x)=-e^{-x}f(e^{-x})-f(x)$. A 是答案.

3. 已知函数 $f(x)$ 具有任意阶导数，且 $f'(x)=[f(x)]^2$，则当 n 为大于 2 的正整数时，$f(x)$ 的 n 阶导数是

A. $n![f(x)]^{n+1}$　　B. $n[f(x)]^{n+1}$　　C. $[f(x)]^{2n}$　　D. $n![f(x)]^{2n}$

【解】$f''(x)=2f(x)f'(x)=2![f(x)]^3$，假设 $f^{(k)}(x)=k![f(x)]^{k+1}$，所以
$f^{(k+1)}(x)=(k+1)k![f(x)]^kf'(x)=(k+1)![f(x)]^{k+2}$，按数学归纳法
$f^{(n)}(x)=n![f(x)]^{n+1}$ 对一切正整数成立. A 是答案.

4. 设函数对任意 x 均满足 $f(1+x)=af(x)$，且 $f'(0)=b$，其中 a，b 为非零常数，则

A. $f(x)$ 在 $x=1$ 处不可导

B. $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $f'(1)=a$

C. $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $f'(1)=b$

D. $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $f'(1)=ab$

【解】$b=f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{a}f(1+x)-\frac{1}{a}f(1)}{x}=\dfrac{1}{a}f'(1)$，所以 $f'(1)=ab$. D 是答案

注：因为没有假设 $f(x)$ 可导，不能对于 $f(1+x)=af(x)$ 二边求导.

5. 设 $f(x)=3x^3+x^2|x|$，则使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶导数 n 为

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

【解】 $f(x)=\begin{cases}4x^3 & x\geqslant 0\\ 2x^3 & x<0\end{cases}$. $f''(x)=\begin{cases}24x & x\geqslant 0\\ 12x & x<0\end{cases}$

$f'''(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f''(x)-f''(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{24x-0}{x}=24$,

$f'''(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f''(x)-f''(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{12x-0}{x}=12$,

所以 $n=2$，C 是答案.

6. 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，当自变量 x 由 x_0 增加到 $x_0+\Delta x$ 时，记 Δy 为 $f(x)$ 的增量，$\mathrm{d}y$ 为 $f(x)$ 的微分，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y-\mathrm{d}y}{\Delta x}$ 等于

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. ∞

【解】 由微分定义 $\Delta y=\mathrm{d}y+o(\Delta x)$，所以 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y-\mathrm{d}y}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x}=0$. B 是答案.

7. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x} & x>0\\ ax+b & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，则

A. $a=1$，$b=0$　　B. $a=0$，b 为任意常数

C. $a=0$，$b=0$　　D. $a=1$，b 为任意常数

【解】 在 $x=0$ 处可导一定在 $x=0$ 处连续，所以

$\lim\limits_{x\to 0^+}x^2\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}(ax+b)$，所以 $b=0$.

$f'(0^+)=f'(0^-)$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{ax}{x}$，所以 $0=a$. C 是答案.

8. 设 $f(0)=0$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充要条件为

A. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(1-\cos h)$ 存在.　　B. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}f(1-e^h)$ 存在.

C. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(h-\sin h)$ 存在.　　D. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$ 存在.

【解】 由 $f'(0)$ 存在可推出 A 中的极限值为 $\dfrac{1}{2}f'(0)$，B 中的极限值为 $-f'(0)$，D 中的极限值为 $f'(0)$，而 C 中的极限值为 0. 反之 A、C 中的极限值存在，不一定 $f'(0)$ 存在，举反例如下：$y=|x|$，排除 A、C. D 中的极限值存在，不一定 $f'(0)$ 存在，举反例如下：$f(x)=\begin{cases}2x+1 & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$，排除 D. 所以 B 是答案. 由 B 推出 $f'(0)$ 存在证明如下：

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\xlongequal{令 x=1-e^h}\lim_{h\to 0}\frac{1}{1-e^h}f(1-e^h)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}f(1-e^h)\cdot\frac{h}{1-e^h}$$

$$=-\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}f(1-e^h).$$

所以 $f'(0)$ 存在.

9. 设函数 $f(x)$ 在$(-\infty, +\infty)$上可导，则

A. 当 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = -\infty$

B. 当 $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = -\infty$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

C. 当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$

D. 当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

【解】 A 不正确．反例如下：$y = x$；B 不正确．反例如下：$y = x^2$；C 不正确．反例如下：$y = x$；D 是答案．证明如下：反设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = k \neq +\infty$．因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = k$ 存在(k 为有限数)．任取 x，在区间$[x, x+1]$上用拉格朗日定理

$f(x+1) - f(x) = f'(\xi)\ (x < \xi < x+1)$

令 $x \to +\infty$，于是 $0 = +\infty$，矛盾．所以 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

10. 设函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 处可导，则函数 $|f(x)|$ 在 $x = a$ 处不可导的充分条件是

A. $f(a) = 0$ 且 $f'(a) = 0$.　　B. $f(a) = 0$ 且 $f'(a) \neq 0$.

C. $f(a) > 0$ 且 $f'(a) > 0$.　　D. $f(a) < 0$ 且 $f'(a) < 0$.

【解】 A 反例：$f(x) = 0$，取 $a = 0$．排除 A；C 反例：$f(x) = x^2 + x + 1$，取 $a = 0$．$f(0) = 1 > 0$，$f'(0) = 1 > 0$，$|f(x)| = f(x)$，在 $x = 0$ 可导．排除 C；D 反例：$f(x) = -x^2 - x - 1$，取 $a = 0$．排除 D；所以 B 是答案．对于 B 证明如下：在 B 的条件下证明 $|f'(a)|$ 不存在．

不妨假设 $f'(a) > 0$．$f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{x - a}$．所以存在 δ，当 $x \in (a - \delta, a + \delta)$ 时 $\dfrac{f(x)}{x-a} > 0$．所以当 $x > a$ 时，$f(x) > 0$．于是 $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{|f(x)| - |f(a)|}{x - a} = \lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{x - a} = f'(a)$．当 $x < a$ 时 $f(x) < 0$．于是 $\lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{|f(x)| - |f(a)|}{x - a} = \lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{-f(x)}{x - a} = -f'(a)$．所以 $|f'(a)|$ 不存在.

三、计算题

1. $y = \ln[\cos(10 + 3x^2)]$，求 y'

【解】 $y' = \dfrac{-\sin(10 + 3x^2) \cdot 6x}{\cos(10 + 3x^2)} = -6x\tan(10 + 3x^2)$.

2. 已知 $f(u)$ 可导，$y = f[\ln(x + \sqrt{a + x^2})]$，求 y'

【解】 $y' = f'[\ln(x + \sqrt{a + x^2})] \cdot \dfrac{1}{x + \sqrt{a + x^2}}\left(1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{a + x^2}}\right)$

$$= \frac{f'[\ln(x + \sqrt{a + x^2})]}{\sqrt{a + x^2}}.$$

3. 已知 $\int_0^y e^{t^2}\,dt = \int_0^{x^2} \cos t\,dt + \sin y^2$，求 y'.

【解】 $e^{y^2} y' = 2x\cos x^2 + 2yy'\cos y^2$

$$y' = \frac{2x\cos x^2}{e^{y^2} - 2y\cos y^2}.$$

4. 设 y 为 x 的函数是由方程 $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\dfrac{y}{x}$ 确定的，求 y'.

【解】 $\dfrac{2x+2yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\,2\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{\dfrac{y'x-y}{x^2}}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}$

$x+yy'=y'x-y$，所以 $y'=\dfrac{x+y}{x-y}$.

5. 已知 $\begin{cases}x=e^t\sin t\\ y=e^t\cos t\end{cases}$，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

【解】 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{e^t\cos t-e^t\sin t}{e^t\cos t+e^t\sin t}=\dfrac{\cos t-\sin t}{\cos t+\sin t}$,

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\cos t-\sin t}{\cos t+\sin t}\right)\cdot\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{-(\cos t+\sin t)^2-(\cos t-\sin t)^2}{(\cos t+\sin t)^2}\cdot\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dt}}$

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{2}{e^t(\cos t+\sin t)^3}$.

6. 设 $x=y^2+y,u=(x^2+x)^{3/2}$，求 $\dfrac{dy}{du}$.

【解】 $dx=(2y+1)dy$，$du=\dfrac{3}{2}(x^2+x)^{\frac{1}{2}}(2x+1)dx$

$\dfrac{(2y+1)dy}{du}=\dfrac{dx}{\dfrac{3}{2}\sqrt{x^2+x}(2x+1)dx}$

$\dfrac{dy}{du}=\dfrac{2}{3(2y+1)\sqrt{x^2+x}(2x+1)}$.

7. 设函数 $f(x)$ 二阶可导，$f'(0)\neq 0$，且 $\begin{cases}x=f(t)-\pi\\ y=f(e^{3t}-1)\end{cases}$，求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}$，$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}$.

【解】 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{f'(e^{3t}-1)3e^{3t}}{f'(t)}$，所以 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}=3$.

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=3\dfrac{[f''(e^{3t}-1)3(e^{3t})^2+3e^{3t}f'(e^{3t}-1)]f'(t)-e^{3t}f'(e^{3t}-1)f''(t)}{[f'(t)]^3}$

所以 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=3\dfrac{[3f''(0)+3f'(0)]f'(0)-f'(0)f''(0)}{[f'(0)]^3}=\dfrac{9f'(0)+6f''(0)}{[f'(0)]^2}$.

8. 设曲线 $x=x(t)$，$y=y(t)$ 由方程组 $\begin{cases}x=te^t\\ e^t+e^y=2e\end{cases}$ 确定. 求该曲线在 $t=1$ 处的曲率.

【解】 $y_t'=-\dfrac{e^t}{e^y}=\dfrac{e^t}{e^t-2e}$. 所以 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y_t'}{x_t'}=\dfrac{\dfrac{e^t}{e^t-2e}}{e^t+te^t}=\dfrac{1}{(1+t)(e^t-2e)}$

所以 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=1}=-\dfrac{1}{2e}$.

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{(1+t)(e^t-2e)}\right)\dfrac{dt}{dx}=-\dfrac{2e^t-2e+te^t}{(1+t)^3(e^t-2e)^2e^t}$,

所以 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=-\dfrac{1}{8e^2}$. 在 $t=1$ 的曲率为

$$k=\left.\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right|_{t=1}=\frac{\frac{1}{8e^2}}{\left(1+\frac{1}{4e^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=e(1+4e^{-2})^{-\frac{3}{2}}.$$

四、已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-\cos x}{x} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$，其中 $g(x)$ 有二阶连续导数，且 $g(0)=1$.

(1) 确定 a 的值，使 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续；(2) 求 $f'(x)$.

【解】(1) $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续，所以

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-\cos x}{x}=a,$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}(g(x)-\cos x)=0$，所以 $g(0)=\cos 0=1$

(这说明条件 $g(0)=1$ 是多余的). 所以

$$a=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)+1-\cos x}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=g'(0)+0=g'(0).$$

(2) 方法 1：

$$f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{g(x)-\cos x}{x}-a}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{g(x)-\cos x-ax}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-\cos x-ax}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{g(0)+g'(0)x+\frac{1}{2}g''(\xi)x^2-\cos x-ax}{x^2}\quad(0<\xi<x)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{1}{2}g''(\xi)x^2-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}(g''(0)+1)$$

所以 $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x[g'(x)+\sin x]-[g(x)-\cos x]}{x^2} & x\neq 0\\ \dfrac{1}{2}(g''(0)+1) & x=0\end{cases}$

方法 2：

$$f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{g(x)-\cos x}{x}-a}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{g(x)-\cos x-ax}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-\cos x-ax}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)+\sin x-a}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{g''(x)+\cos x}{2}=\frac{1}{2}(g''(0)+1).$$

五、已知当 x (0 时，$f(x)$ 有定义且二阶可导，问 a，b，c 为何值时

$$F(x)=\begin{cases}f(x) & x\leqslant 0\\ ax^2+bx+c & x>0\end{cases}$$

二阶可导.