OM

《数学奥林匹克丛书》

函数方程 函数迭代 与数学竞赛

首都师范大学出版社

（京）新208号

图书在版编目（CIP）数据

函数方程 函数迭代与数学竞赛/中国教育学会数学教育研究发展中心审定.-北京：首都师范大学出版社，1994.8
(数学奥林匹克丛书)
ISBN 7-81039-393-6

Ⅰ.函… Ⅱ.中… Ⅲ.函数方程-教学参考资料 Ⅳ.O241.5

中国版本图书馆CIP数据核字（94）第08956号

首都师范大学出版社

（北京西三环北路105号　邮政编码100037）
北京昌平兴华印刷厂印刷　全国新华书店经销
1994年8月第1版　1994年8月第1次印刷
开本：787×1092　1/32　印张：11.375
字数：228千　印数：1—15,000
定价：7.30元

数学奥林匹克丛书编委会

本书作者　王向东　李文荣　马林茂

前　言

早在18世纪初期，欧拉、拉格朗日等著名数学大师就已经利用函数方程解决问题了。1769年达朗贝尔在讨论力的合成法则时，导出了函数方程

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$$

1773年法国数学家蒙日在研究曲面理论时又进一步应用函数方程，并且给出了函数方程的较一般的叙述；同年，拉普拉斯又对一类相当广泛的函数方程提供了解法；从1821年起，数学家柯西对一系列函数方程，如

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

$$f(xy)=f(x)+f(y)$$

$$f(xy)=f(x)f(y)$$

等作了深入的研究，并创造了一种求解函数方程的方法——柯西法；另外，函数方程还受到了阿贝尔、维尔斯特拉斯、罗巴切夫斯基、哈代等数学家的充分重视，广泛应用于各种不同领域，取得了许多美妙的结果。例如，罗巴切夫斯基就曾将平行角

$$\mathrm{tg}\frac{1}{2}\pi x=e^{-\frac{x}{k}}$$

定义成函数方程

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\sqrt{f(x)f(y)}$$

的解；本世纪初期，以施罗德为首的波兰学派对函数方程进

行了一些开创性的研究工作；40年代前后，原苏联数学家盖尔谢凡诺夫教授进一步发展了函数方程的理论，并成功地解决了一系列有关力学、渗透理论、弹性理论和地层动力理论的问题，这些问题都与施罗德函数方程有关。

200多年来，尽管如此众多的数学家为之付出了艰辛的努力，并获得了大量结果，而且它的应用如此广泛深远，但令人遗憾的是至今仍没有建立起完整、系统的函数方程理论，就连较一般的解法也知道得甚少。不论是对函数方程本身的研究或是函数方程中未知函数的求解，都须有较强的技能和技巧以及良好的数学素质和数学能力。正是由于这个原因，函数方程常常出现在各类数学竞赛试题之中，成为当今数学竞赛的一个重要专题，越来越受到数学竞赛命题者们的青睐，并引起了数学教育界的广泛兴趣。

与函数方程密切相关的函数迭代有着更为深刻的理论背景和实用价值。由于近年来关于浑沌理论和微分动力系统的研究发展十分迅速，函数迭代更引起了数学界的高度重视。同时，与函数方程类似，函数迭代也还没有一般的求解方法，与函数迭代有关的问题极为丰富，涉及的技巧又别具一格，所以，近几年来也频繁地出现在各类数学竞赛试题之中。

函数方程与函数迭代的类型十分复杂，特别是前者，想对它作适当的分类比较困难，加之没有一般的理论和一般的方法，所以，欲对这一课题系统、完整地叙述，还须倍加努力。关于函数方程和函数迭代，已经有了一些有用的解法，加上目前数学竞赛的需要，我们还是编写了这本并不十分系统、也非严紧论述一般理论的小册子。

在本书编写过程中，我们参阅了国内外大量文献及各类

数学竞赛试题，在此一并向原作者致谢。另外，郑州教育学院方欣华教授在百忙当中审阅了全部书稿，首都师范大学董凤举先生提出了许多诚挚的修改意见，并为此书的出版付出了许多努力，在此谨表谢意。同时，我们还要感谢郑州轻工业学院李宝珍女士，她为本书的出版也付出了艰辛的劳动。

由于我们水平的限制，书中一定存在着失误和不足，希望得到各方面的批评指正。

作　者

1994年3月8日于郑州

目　录

第一章　函数方程

§1.1　函数方程的概念

在中学数学中所遇到的方程，主要是代数方程和初等超越方程两类，都可以定义为含有未知数的等式，例如

$$3x^2+2x-1=0$$

$$a^x-b=0\quad(a>0)$$

$$\log_a(x-1)+x-5=0\quad(a>0,\ a\neq 1)$$

$$\sin 3x-\cos x+x^2-1=0$$

在这里所列举的每个方程中，作为未知的是一个或几个特定的**数值**(当然，也可能无解)，我们不妨称这类方程为**数值方程**。这样说来，在中学数学中所讨论的形形色色的方程都是数值方程。

还有一类方程，在这类方程中作为未知的需要我们去求的不再是数值，而是一个或一类函数，这种方程通常被称为**函数方程**，例如

$$\frac{d^2x}{dt^2}+m^2x=A\sin\omega t \qquad ①$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{1}{t}\frac{dx}{dt}+\left(1-\frac{m^2}{t^2}\right)x=0 \qquad ②$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad ③$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad ④$$

$$\mu(t)-\mu\int_a^b k(t,\ \sigma)\mu(\sigma)d\sigma=0 \qquad ⑤$$

$$f(x+2)=f(x+1)+f(x),\ (f(0)=f(1)=1) \qquad ⑥$$

$$f(x+2\pi)=f(x) \qquad ⑦$$

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \qquad ⑧$$

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\sqrt{f(x)f(y)} \qquad ⑨$$

$$\varphi\left(\frac{2z}{1+z^2}\right)=(1+z^2)\varphi(z) \qquad ⑩$$

等就是函数方程，其中$x(t)$，$\mu(t)$，$f(x)$，$\varphi(z)$都是未知函数。

定义1 含有未知函数的等式，统称为函数方程，有时也简称方程。

按此定义，微分方程①—④，积分方程⑤也都属于函数方程。由于微分方程，积分方程都各有专门学科，而且研究得也较详尽，故本书所述的函数方程，仅指不含未知函数的导数、微分及积分的那一类函数方程，如⑥—⑩。差分方程也是函数方程，但在后面的叙述中，较少讨论它。这样一来，函数方程乃是表达某一函数或某类函数所具有的确定性质的关系式。

§1.2 函数方程的解

既然函数方程含有未知函数，那末一般说来函数方程的解就是某个或某类函数。

定义2 如果函数$f(x)$在其定义域内满足所给的函数方程，就称$f(x)$是该函数方程的解函数或解。例如函数

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^x\right]$$

$$f(x)=A\sin x \quad (A\text{为常数})$$

$$f(x)=cx \quad (c\text{为常数})$$

$$f(x)=a^x \quad (a>0)$$

$$\varphi(z)=\frac{1}{2z}\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

分别是函数方程⑥—⑩的解函数。

以函数方程⑦为例，$f(x)=A\sin x$（不含任意函数，仅含任意常数A)称为**特解**，而$f(x)=\Phi(\sin x)$就称为通解（包含任意函数$\Phi(\mu)$)。如果一个函数包括了某函数方程在一定条件下的全部解，此函数就称为该函数方程在所述条件下的**全解**，例如$f(x)=cx$（c为常数）就是函数方程⑧的全连续解。

在后面的讨论中，我们不去细分解的类型，而仅讨论函数方程的实函数的解。函数方程有时也有常数解，甚至还具有**明显解**(即等于零的解)，在讨论函数方程时，明显解不是我们关心的对象。

§1.3 函数方程的分类

由于函数方程异常复杂，所以对它进行分类是相当困难的，通常有以下几种分类方法：

(1) 按**元**分。函数方程中表示未知函数自变量的字母有几个，函数方程就称为几元的，如⑦、⑩就是一元函数方程，⑧、⑨是二元函数方程。

(2) 按**阶**分。函数方程中未知函数经过几次迭代，就称

为几阶的，如

$$\varphi_2(x)=x+1$$

就是二阶函数方程，其中$\varphi_2(x)=\varphi[\varphi(x)]$。

(3) 按**次**分。函数方程中未知函数的最高次项的次数是几，就称函数方程是几次的，如

$$\varphi_2(x)=\varphi^3(x)+3\varphi(x)$$

就是一个二阶三次函数方程。

(4) 按未知函数的**个数**来分。如⑥—⑩都是含一个未知函数的函数方程；又如函数方程

$$F(x+y)G(x-y)=H(x)+I(y) \qquad ⑪$$

中就含有四个未知函数$F(x)$，$G(x)$，$H(x)$，$I(x)$。

类似数值方程，几个函数方程也可以组成函数方程组。

(5) 对于其它一些特殊类型的函数方程，我们还给出其它一些特殊名称，在以后各章中会看到这一点。

习　题　一

1. 验证函数$f(x)=\sin 2\pi x$是函数方程$f(x+1)-f(x)=0$的解.

2. 验证函数$f_1(x)=\mathrm{tg}\,\pi x$，$f_2(x)=\{x\}$（这里$\{x\}=x-[x]$）都是函数方程$f(x+1)=f(x)$的解.

3. 验证函数$f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$是函数方程

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$$

的一个解.

4. 验证函数$\varphi(z)=\dfrac{1}{2z}\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)$是函数方程：$\varphi\left(\dfrac{2z}{1+z^2}\right)=(1+z^2)\varphi(z)$的解.

5. 若 $f(x)=\lg\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, $-1<x<1$, 那么 $f\left(\frac{3x+x^3}{1+3x^2}\right)$ 等于（　）

(A) $-f(x)$; (B) $2f(x)$; (C) $3f(x)$; (D) $[f(x)]^2$;
(E) $[f(x)]^3-f(x)$

6. 设 $f(t)=\frac{t}{1-t}$, $t\neq1$, 如果 $y=f(x)$, 则 x 可表示为（　）.

(A) $f\left(\frac{1}{y}\right)$; (B) $-f(y)$; (C) $-f(-y)$;
(D) $f(-y)$; (E) $f(y)$.

7. 设 $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ 且 $x^2\neq1$, 那么 $f(-x)=$（　）.

(A) $\frac{1}{f(x)}$; (B) $-f(x)$; (C) $\frac{1}{f(-x)}$;
(D) $-f(-x)$; (E) $f(x)$.

8. 已知 $F\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=x$, 则下列等式正确的是（　）

(A) $F(-2-x)=-2-F(x)$; (B) $F(-x)=F\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$
(C) $F(x^{-1})=F(x)$; (D) $F(F(x))=-x$.

9. 已知 $f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=\cos x+1$, 求

(i) $f\left(\frac{1}{2}\cos\frac{y}{2}\right)$; (ii) $f(2\sqrt{\sin y})$.

10. 已知 $\psi(x)=\lg\frac{1-x}{1+x}$, 求证

$$\psi(x)+\psi(y)=\psi\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$$

11. 已知 $f(\alpha)=\operatorname{tg}\alpha$, 求证 $f(a+b)=\frac{f(a)+f(b)}{1-f(a)f(b)}$.

12．已知函数$f(x)$的定义域为[2，10]，求$f(x^2)$、$f(-x)$的定义域．

13．已知$\varphi(x)=\frac{1}{2}(x+|x|)$，$\psi(x)=\begin{cases} x, & x<0 \\ x^2, & x\geqslant 0. \end{cases}$

求$\varphi(\varpi(x))$，$\varphi(\psi(x))$，$\psi(\varphi(x))$，$\psi(\psi(x))$．

第二章　函数方程的解法

解函数方程就是在某种假定下寻找方程的解或确定方程无解的过程。函数方程与微分方程不一样，关于它的一般解法知道得更少。我们在这里叙述的只是一些具体的解法。虽然不少解法是巧妙的、有趣的，然而却有很大的局限性，而且在应用这些解法时还常常不得不对方程中的未知函数作某些特别的限制，正因为如此，所以近年来的不少竞赛试题都热衷于以函数方程为题材。

§2.1　代　换　法

代换法的要点是：对函数方程的未知函数或未知函数的自变量作代换，以达到求解函数方程的目的。这种方法多用于单变量函数方程。

【例1】 已知$f(x)$是偶函数，$g(x)$是奇函数，试解函数方程

$$f(x)+g(x)=1985x\sqrt{5-x^2}+x^{1986}$$

解　由已知方程得x的取值范围是$[-\sqrt{5},\sqrt{5}]$。因$f(x)$、$g(x)$分别为偶函数和奇函数，用$-x$代替方程中的x，所得新方程与原方程联立：

$$\begin{cases} f(x)+g(x)=1985x\sqrt{5-x^2}+x^{1986} \\ f(-x)+g(-x)=1985(-x)\sqrt{5-(-x)^2}+(-x)^{1986} \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} f(x)+g(x)=1985x\sqrt{5-x^2}+x^{1986} & ① \\ f(x)-g(x)=-1985\sqrt{5-x^2}+x^{1986} & ② \end{cases}$$

由(①+②)÷2，得：

$$f(x)=x^{1986} \qquad ③$$

将③代入②，得：

$$g(x)=1985x\sqrt{5-x^2}$$

经检验知

$$\begin{cases} f(x)=x^{1986} \\ g(x)=1985x\sqrt{5-x^2} \end{cases}$$

为所求的函数。

【例2】 试解函数方程

$$f(-\mathrm{tg}x)+2f(\mathrm{tg}x)=\sin 2x \qquad ①$$

其中$x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$。

解 用$-x$代替x，得

$$f[-\mathrm{tg}(-x)]+2f[\mathrm{tg}(-x)]=\sin 2(-x)$$

即

$$2f(-\mathrm{tg}x)+f(\mathrm{tg}x)=-\sin 2x \qquad ②$$

将①、②联立解得

$$f(\mathrm{tg}x)=\sin 2x=\frac{2\mathrm{tg}x}{1+\mathrm{tg}^2x}$$

从而

$$f(x)=\frac{2x}{1+x^2},\quad x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$$

评注 由例1、例2可看出，在函数方程中凡涉及函数的奇偶性时，此时自变量x的位置具有互反性。用$-x$代x所得的新方程和原方程联立组成关于所求未知函数的方程组，从而通过解方程组可求出未知函数。但需要注意的是必须验