全國大学入学指導

數学

瞿世鎮主編

全國大學入學指導

数学指导

勝利本

總目

上海三民圖書公司印行

編輯敍例

一、海內出版界關於大學入學考試指導之書，在大戰後，尚少新作。當此建設時期，需才孔殷，大學教育，尤關重要。一般準備進入大學者，頗欲明瞭各大學入學考試之情形，以求入門之徑。本書即蒐集國內公私立著名各大學入學試題，分別解答，俾知其考試科目之內容，以爲有志進入大學者之指導。

二、本書以學科分類，爲公民、國文、歷史、地理、英文數學、物理、化學、生物、經濟等部，每類中略依條目，再分先後，作有系統之排列，俾讀者得依類研究，大體具備，不獨可以爲投考大學所需，並可備高等考試，普通考試及一般考試之用。

三、本書蒐集各大學試題，計有：中央、北平、清華、交通、浙江、山東、河南、安徽、武漢、四川、中山、暨南、復旦、同濟、中央政治、北平女師、上海商學院、上海醫學院、燕京、輔仁、東北、齊魯、西北、嶺南、勷勤、廈門、中法，光華、之江、東吳、震旦、滬江、大夏、大同、約翰、金陵、南通、稅務專門、河海工程、上海市立工科等校，及統一招生，於各題之下，標明各大學校名以資查考。

4. 本書有問必答,先列問題,次列解答,一問一答,極便閱覽,無他書翻答尋案之勞。

5. 如有各校試題相同者,併作一次解答,於題目下標明兩校以上之校名,一則避免重複,一則表明此題之普遍性。

6. 本書國文、英文兩類中,附入各大學國文科作文試題一覽表及英文科作文試題一覽表,讀者倘能於此玩索,悉心準備,於國英二科,思過半矣。

7. 在短時期內出版此書,得荷諸同仁之協同編纂,相互校勘,與林天祺、廖慰慈、李叔咸、吳拯寰諸先生等供給材料,附記於此,藉謝盛意,並留紀念。

8. 本書匆卒付印,草率之處,知所難免,閱者能加以指教,以備日後更正,曷勝企幸!

三十五年七月瞿西華記

問題　A，B，C 三人同時出發赴城，出發點離城 a 里。出發時，A 步行，速率每小時 u 里；B 及 C 同騎馬，速率爲每小時 v 里。若干時後，B 下馬步行，速率與 A 同；同時 C 騎馬回至 A 處；與 A 同騎赴城，A，B，C 同時入城。問自出發至入城共費幾小時？

（清華大學）

解　設三人入城所需之時間爲 x，

B 騎馬之時間爲 y，

A 步行之時間爲 z，

則由 A，　$z+\dfrac{a-uz}{v}=x$　　(1)

由 B，　$y+\dfrac{a-vy}{u}=x$　　(2)

由 A，C，$(v-u)y=(v+u)(z-y)$　　(3)

整理之，得

$$\begin{cases} vx+(u-v)z=a & (1)\\ ux+(v-u)y=a & (2)\\ 2vy-(u+v)z=0 & (3)\end{cases}$$

由(3)　$y=\dfrac{u+v}{2v}z$　　(4)

代入(2)　$ux+\dfrac{v^2-u^2}{2v}z=a$

卽　$2uvx+(v^2-u^2)z=2av$　　(5)

$(1)\times(u+v)$，

$v(u+v)x+(u^2-v^2)z=a(u+v)$　　(6)

$(5)+(6)$　$v(3u+v)x=a(u+3v)$

$$\therefore\quad x=\frac{a(u+3v)}{v(3u+v)}$$

要點　本題第三式左邊爲 C 折回時與 A 之距離，卽在 y 時內二人所行路之差。右邊爲二人相向而行至相遇時所行之距離。

問題 試述餘數定理。 (中央大學)

解 x 之多項式以 $(x-a)$ 除之，所得之剩餘，等於以 a 代多項式中 x 所得之值。

證 設 $f(x)$ 爲 x 之多項式，以 $(x-a)$ 除 $f(x)$，商數爲 $Q(x)$，剩餘爲R，則

$$f(x)=Q(x)(x-a)+R。$$

此中 R 之次數較 $(x-a)$ 爲低，亦卽不含 x 之常數，故不論 x 之值若何，R之值不變。令 $x=a$，則

$$f(a)=Q(a)(a-a)+R,$$

但 $a-a=0$，而 $Q(a)$ 之值爲有限，

由是 $$Q(a)(a-a)=0,$$

$$\therefore\quad f(a)=R$$

問題 $f(x)$ 爲次數≥2之x之多項式，試示當 $f(x)$ 除以 $(x-a)$ 時，餘數爲 $f(a)$；除以 $(x-b)$ 時，餘數爲 $f(b)$；而除以 $(x-a)(x-b)$ 時，餘數爲

$$\frac{x[f(a)-f(b)]+af(b)-bf(a)}{a-b}$$

(上海統招)

證 令 $f(x)=Q(x)(x-a)(x-b)+R,\qquad(1)$

此中 R 爲餘數，當係一次式，可化成

$R=A(x-a)+B\qquad(2)$

令 $x=a$，得 $f(a)=B\qquad(3)$

令 $x=b$，得 $f(b)=A(b-a)+B\qquad(4)$

以(3)代入(4) $f(b)=A(b-a)+f(a)$

$$\therefore\quad A=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(a)-f(b)}{a-b}$$

代入(2) $$R=(x-a)\frac{f(a)-f(b)}{a-b}+f(a)$$

$$=\frac{x[f(a)-f(b)]+af(b)-bf(a)}{a-b}$$

問題　試分解下式爲因數：　　（中央大學）

$$(b-c)(y-a)(x-b)(x-c)+(c-a)(y-b)(x-c)(x-a)$$
$$+(a-b)(y-c)(x-a)(x-b)$$

解　令　$b=c$，卽　$b-c=0$，則原式爲 0，故有因數 $(b-c)$。

因原式爲 a,b,c 之輪換對稱式，故亦有因數 $(c-a)$，$(a-b)$。

但原式爲 4 次齊次式，故除以上三因數外，所餘一因數當爲一次對稱式：

令　原式 $=(b-c)(c-a)(a-b)[lx+my+n(a+b+c)]$

比較兩邊　ab^2x 項之係數，得　$l=1$，

比較兩邊　b^2cy 項之係數，得　$m=-1$

比較兩邊　a^3b 項之係數，得　$n=0$。

$\therefore$　原式 $=(b-c)(c-a)(a-b)(x-y)$

類題　1. $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$　　（中央大學）

2. $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$

問題 設三次式 $x^3+ax^2+11x+6$ 與 $x^3+bx^2+14x+8$ 有一個二次式公因數，試求 a 與 b 之值。 （交通大學）

解

$$
\begin{array}{l|l|l}
1+\ a+11+6 & 1\quad +\quad b\quad +\quad 14\quad +\quad 8 & \\
1+\ b+14+8 & \times(a-b) & \\
\hline
(a-b)-3-2 & (a-b)+\ b(a-b)\ +\ 14(a-b)\ +8(a-b) & 1 \\
 & (a-b)-\quad 3\quad -\quad 2 & \\
\cline{2-2}
 & (ab-b^2+3)\ +(14a-14b+2)\ +8(a-b) & \\
 & \times(a-b) & \\
\cline{2-2}
 & (a-b)(ab-b^2+3)+(a-b)(14a-14b+2)+8(a-b)^2 & ab-b^2+3 \\
 & (a-b)(ab-b^2+3)-\quad 3(ab-b^2+3)-2(ab-b^2+3) & \\
\cline{2-3}
 & (14a^2-25ab+11b^2+2a-2b+9)+(8a^2-14ab+6b^2+6) & \\
\end{array}
$$

設二式有一個二次式公因數，則必 $14a^2-25ab+11b^2+2a-2b+9=0$，

$4a^2-7ab+3b^2+3=0$， 即 $(a-b)(14a-11b+2)=-9$ (1)

$(a-b)(4a-3b)=-3$ (2) (1)－(2)×3 $(a-b)(2a-2b+2)=0$，

但 $a-b\neq0$，故 $2a-2b+2=0$，即 $a-b=-1$，代入(1)及(2)而解之，得

$a=6$，$b=7$。

問題　簡化$\frac{1}{(a-b)(a-c)(x-a)}+\frac{1}{(b-c)(b-a)(x-b)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)(x-c)}$　（交大）

解　原式$=-\frac{1}{(a-b)(c-a)(x-a)}-\frac{1}{(b-c)(a-b)(x-b)}-\frac{1}{(c-a)(b-c)(x-c)}$

$$=-\frac{(b-c)(x-b)(x-c)+(c-a)(x-c)(x-a)+(a-b)(x-a)(x-b)}{(b-c)(c-a)(a-b)(x-a)(x-b)(x-c)}$$

$$=-\frac{(b-c)[x^2-(b+c)x+bc]+(c-a)[x^2-(c+a)x+ca]+(a-b)[x^2-(a+b)x+ab]}{(b-c)(c-a)(a-b)(x-a)(x-b)(x-c)}$$

$$=-\frac{(b-c+c-a+a-b)x^2-(b^2-c^2+c^2-a^2+a^2-b^2)x+bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)}{(b-c)(c-a)(a-b)(x-a)(x-b)(x-c)}$$

$$=-\frac{bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)}{(b-c)(c-a)(a-b)(x-a)(x-b)(x-c)}$$

$$=-\frac{-(b-c)(c-a)(a-b)}{(b-c)(c-a)(a-b)(x-a)(x-b)(x-c)}=\frac{1}{(x-a)(x-b)(x-c)}$$

問題 化 $\dfrac{2x^3-7x^2}{(x^3+1)(x^2-x+1)}$ 爲部份分數。 （交通大學）

解 令 $\dfrac{2x^3-7x^2}{(x^3+1)(x^2-x+1)}=\dfrac{2x^3-7x^2}{(x+1)(x^2-x+1)^2}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{Bx+C}{x^2-x+1}+\dfrac{Dx+E}{(x^2-x+1)^2}$

去分母 $2x^3-7x^2=A(x^2-x+1)^2+(Bx+C)(x^3+1)+(Dx+E)(x+1)$

令 $x=-1$ $\quad -9=9A \quad \therefore A=-1$

比較 x^4 之係數 $\quad 0=A+B \quad \therefore B=1$

比較 x^3 之係數 $\quad 2=-2A+C \quad \therefore C=0$

比較 x^2 之係數 $\quad -7=3A+D \quad \therefore D=-4$

比較常數 $\quad 0=A+C+E \quad \therefore E=1$

要點 分母中有重複之二次因數，如 $(ax^2+bx+c)^n$，則部份分數中必有對應之諸項，如

$$\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n},\ \frac{Cx+D}{(ax^2+bx+c)^{n-1}},\ \cdots\cdots,\ \frac{Px+Q}{ax^2+bx+c}。$$

類題 1. $\dfrac{20x^2+34x+8}{(x^3+2x^2-2x-4)(x+2)^2}$ （交通大學） 2. $\dfrac{1}{x^5+4x^4-10x^2-x+6}$（中山大學）

問題 解 $\begin{cases} x+y+z=0 & (1) \\ ax+by+cz=0 & (2) \\ a^3x^3+b^3y^3+c^3z^3=3(b-c)(c-a)(a-b) & (3) \end{cases}$ （交通大學）

解 視 z 爲常數，解(1)，(2)，得 $x=\frac{b-c}{a-b}z$，$y=\frac{c-a}{a-b}z$ (4)

代入(3)，去分母，得 $[a^3(b-c)^3+b^3(c-a)^3+c^3(a-b)^3]z^3=3(b-c)(c-a)(a-b)^4$ (5)

但 $a^3(b-c)^3+b^3(c-a)^3+c^3(a-b)^3=3abc(b-c)(c-a)(a-b)$

代入(5) $3abc(b-c)(c-a)(a-b)z^3=3(b-c)(c-a)(a-b)^4$，$abc\,z^3=(a-b)^3$，

$$\therefore\quad z_1=\frac{a-b}{\sqrt[3]{abc}}，\quad z_2=\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\cdot\frac{a-b}{\sqrt[3]{abc}}，\quad z_3=\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\cdot\frac{a-b}{\sqrt[3]{abc}}$$

代入(4) $x_1=\frac{b-c}{\sqrt[3]{abc}}，\quad x_2=\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\cdot\frac{b-c}{\sqrt[3]{abc}}，\quad x_3=\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\cdot\frac{b-c}{\sqrt[3]{abc}}$

$$y_1=\frac{c-a}{\sqrt[3]{abc}}，\quad y_2=\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\cdot\frac{c-a}{\sqrt[3]{abc}}，\quad y_3=\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\cdot\frac{c-a}{\sqrt[3]{abc}}$$

問題 解 $\begin{cases} x+y+z=a+b+c & (1) \\ x^2+y^2+z^2=a^2+b^2+c^2 & (2) \\ (b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0 & (3) \end{cases}$ （交通大學）

解 改書原式爲 $\begin{cases} (x-a)+(y-b)+(z-c)=0 \\ (x^2-a^2)+(y^2-b^2)+(z^2-c^2)=0 \\ (b-c)(x-a)+(c-a)(y-b)+(a-b)(z-c)=0 \end{cases}$

令 $\begin{cases} x-a=m \\ y-b=n \\ z-c=p \end{cases}$ 則 $\begin{cases} m+n+p=0 & (4) \\ m^2+n^2+p^2+2am+2bn+2cp=0 & (5) \\ (b-c)m+(c-a)n+(a-b)p=0 & (6) \end{cases}$

聯立(4),(6),視p作常數而解之,得

$$m=\frac{(a-b)-(c-a)}{(c-a)-(b-c)}p,\quad n=\frac{(b-c)-(a-b)}{(c-a)-(b-c)}p$$

$$\therefore\ \frac{m}{(a-b)-(c-a)}=\frac{n}{(b-c)-(a-b)}=\frac{p}{(c-a)-(b-c)}=k$$

$$m=k(2a-b-c),\quad n=k(2b-c-a),\quad p=k(2c-a-b)$$

代入(5) $k^2(2a-b-c)^2+k^2(2b-c-a)^2+k^2(2c-a-b)^2+2a(2a-b-c)k$
$+2b(2b-c-a)k+2c(2c-a-b)k=0$

即 $6(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)k^2+4(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)k=0$

$$\therefore\quad k=0,\qquad k=-\frac{2}{3}$$

由 $k=0$，得 $m=n=p=0$

$$\therefore\quad x=a,\quad y=b,\quad z=c$$

由 $k=-\frac{2}{3}$，得 $m=x-a=-\frac{2}{3}(2a-b-c)$，$\therefore\quad x=\frac{1}{3}(2b+2c-a)$

$n=y-b=-\frac{2}{3}(2b-c-a)$，$\therefore\quad y=\frac{1}{3}(2c+2a-b)$

$p=z-c=-\frac{2}{3}(2c-a-b)$，$\therefore\quad z=\frac{1}{3}(2a+2b-c)$

類題 $ax+by+cz=0$，$bcx+cay+abz=0$，$xyz+abc(a^3x+b^3y+c^3z)=0$

問題　已知

$$yz+zx+xy=26 \quad (1)$$

（交通大學）

$$yz(y+z)+zx(z+x)+xy(x+y)=162 \quad (2)$$

$$yz(y^2+z^2)+zx(z^2+x^2)+xy(x^2+y^2)=538 \quad (3)$$

試求 $x+y+z$，$yz+zx+xy$，xyz 之值.再求 x, y, z 之值.(不須求非整數之值.)

解　令 $x+y+z=a$，$xyz=b$，則 $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(yz+zx+xy)=a^2$，

即 $x^2+y^2+z^2=a^2-52$ 　　(4)

由(2) $yz(a-x)+zx(a-y)+xy(a-z)=a(yz+zx+xy)-3xyz=162$，

即 $26a-3b=162$ 　　(5)

由(3) $yz(a^2-52-x^2)+zx(a^2-52-y^2)+xy(a^2-52-z^2)$

$=(a^2-52)(yz+zx+xy)-xyz(x+y+z)=538$，

$26(a^2-52)-ab=538$，$26a^2-ab-1890=0$ 　　(6)

由(5)　$b=\dfrac{26a-162}{3}$ (7)　代入(6)　$26a^2-\dfrac{a(26a-162)}{3}-1890=0$，

$78a^2-26a^2+162a-5670=0$，$26a^2+81a-2835=0$，$(a-9)(26a+315)=0$，

取整數,得 $a=9$，

代入(7) 得 $b=24$，由是 x, y, z，爲 $m^3-9m^2+26m-24=0$ 之三根，

$m^3-9m^2+26m-24=(m-2)(m-3)(m-4)=0$，$m=2$，$m=3$，$m=4$，

$\therefore$ x, y, z 之值爲 2, 3, 4.

問題 甲丙兩車同自某站開出，10分鐘後，乙車出發追甲，追及後，卽行折回，於歸途5哩處遇丙車。已知甲車每時行24哩，乙車之速度爲丙車之2倍，求乙車之速度。

（交通大學）

解 設丙車之速度爲每時 x 哩，

則乙車之速度爲每時 2x 哩。

甲車先行10分鐘，計行

$$24\text{哩}\times\frac{1}{6}=4\text{哩},$$

乙車追及甲車，須經過

$$\frac{4}{2x-24}=\frac{2}{x-12}\text{（時）},$$

此時乙丙兩車相距

$$(2x-x)\times\frac{2}{x-12}=\frac{2x}{x-12}\text{（哩）}$$

卽乙車折回時，與丙車相距

$$\frac{2x}{x-12}\text{哩},$$

自此時至兩車相遇，須經過

$$\frac{2x}{x-12}\div(2x+x)=\frac{2}{3(x-12)}\text{（時）}$$

在此時期內，乙車行5哩，

由是得方程式：

$$\frac{2\times 2x}{3(x-12)}=5$$

$$4x=15x-180$$

$$11x=180$$

$$x=\frac{180}{11}=16\frac{4}{11}$$

$$2x=32\frac{8}{11}$$

問題 某人自漢口乘輪船至樂山，若改乘飛機，則每日平均可多行 850.5 公里，祇須乘輪船者時間之$\frac{4}{52}$卽達。若乘汽車，則每日平均可多行 40.5 公里，故早 2.5 日可達。但假定輪船飛機汽車所行之里數皆相等。問自漢口至樂山之里數若干？又乘輪船所需之日數若干？ （武昌統招）

解 令 x = 自漢口至樂山之里數

y = 乘輪船所需之日數

z = 乘飛機所需之日數

w = 乘汽車所需之日數

則 $$\frac{x}{z}-\frac{x}{y}=850.5 \qquad (1)$$

$$\frac{z}{y}=\frac{4}{52}=\frac{1}{13} \qquad (2)$$

$$\frac{x}{w}-\frac{x}{y}=40.5 \qquad (3)$$

$$y-w=2.5 \qquad (4)$$

由(2) $$z=\frac{y}{13} \qquad (5)$$

代入(1) $$\frac{x}{y}=\frac{850.5}{12} \qquad (6)$$

由(4) $$w=y-2.5 \qquad (7)$$

代入(3) $$x\left(\frac{1}{y-2.5}-\frac{1}{y}\right)=40.5$$

卽 $$\frac{2.5x}{y(y-2.5)}=40.5 \qquad (8)$$

(6)÷(8) $$\frac{y-2.5}{2.5}=\frac{850.5}{12\times 40.5}$$

$$\therefore\quad y=6.875$$

代入(6) $$x=487.26$$

問題 設 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots a_n$ 為不相等之正數，而 $s=a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$，

則 $\dfrac{s}{s-a_1}+\dfrac{s}{s-a_2}+\dfrac{s}{s-a_3}+\cdots\cdots+\dfrac{s}{s-a_n}>\dfrac{n^2}{n-1}$ （北平大學）

證 因 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots a_n$ 為不相等之正數，故當有

$$\frac{1}{n}\left(\frac{s}{s-a_1}+\frac{s}{s-a_2}+\cdots\cdots+\frac{s}{s-a_n}\right)>\sqrt[n]{\frac{s^n}{(s-a_1)(s-a_2)\cdots\cdots(s-a_n)}} \qquad (1)$$

及 $$\frac{1}{n}[(s-a_1)+(s-a_2)+\cdots+(s-a_n)]>\sqrt[n]{(s-a_1)(s-a_2)\cdots\cdots(s-a_n)} \qquad (2)$$

但 $$\frac{1}{n}[(s-a_1)+(s-a_2)+\cdots\cdots+(s-a_n)]=\frac{1}{n}(ns-s)=\frac{(n-1)s}{n}$$

由是(1)(2)兩式相乘，得

$$\frac{(n-1)s}{n^2}\left(\frac{s}{s-a_1}+\frac{s}{s-a^2}+\cdots\cdots+\frac{s}{s-a_n}\right)>s$$

$$\therefore\quad \frac{s}{s-a_1}+\frac{s}{s-a_2}+\cdots\cdots+\frac{s}{s-a_n}>\frac{n^2}{n-1}$$