普通高等教育“十一五”规划教材（高职高专教育）
PUTONG GAODENG JIAOYU SHIYIWU GUIHUA JIAOCAI

GAODENG SHUXUE

高等数学

孙保炬 主 编
邢益冰 吴福珍 副主编

中国电力出版社
http://jc.cepp.com.cn

普通高等教育“十一五”规划教材（高职高专教育）
PUTONG GAODENG JIAOYU SHIYIWU GUIHUA JIAOCAI

GAODENG SHUXUE

高等数学

主　编　孙保炬
副主编　邢益冰　吴福珍
编　写　沈云海
主　审　胡顺田

中国电力出版社
http://jc.cepp.com.cn

内 容 提 要

本书为普通高等教育“十一五”规划教材(高职高专教育)。

本书共分6章，主要内容包括函数、极限与连续，导数与微分，微分中值定理与导数的应用，不定积分，定积分及其应用，微分方程。此外还配有习题及其参考答案，便于学生复习和巩固所学知识。本书结合教学实际，结构合理，难度适中，注重培养学生分析、解决问题的能力。

本书可作为高职高专院校工科学生高等数学课程教材，也可作为读者学习高等数学的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/孙保炬主编. —北京：中国电力出版社，2009
普通高等教育“十一五”规划教材. 高职高专教育
ISBN 978-7-5083-8879-3

Ⅰ.高… Ⅱ.孙… Ⅲ.高等数学—高等学校：技术学校—教材
Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第094434号

中国电力出版社出版、发行
(北京三里河路6号 100044 http://jc.cepp.com.cn)
汇鑫印务有限公司印刷
各地新华书店经售
*
2009年6月第一版 2009年6月北京第一次印刷
787毫米×1092毫米 16开本 11.5印张 274千字
定价 **18.50**元

前 言

为了适应我国高等职业教育、高等专科教育的迅速发展，满足当前高职教育高等数学课程教学上的需要，我们依据教育部制定的高职、高专数学课程教学基本要求，结合多年的教学经验编写了本教材。

本教材的宗旨是：以提高高等职业教育教学质量为指导思想，以培养高素质应用型人才为总目标，广泛汲取传统教材和其他改革教材的优点，结合教学实际，努力使其成为一部结构合理、难度适中、逻辑清晰、叙述详细、特色鲜明、便于学习的教材。本教材编写具有以下特点：

（1）根据高职高专高等数学课程教学基本要求，慎重选择教材内容。既考虑到高等数学本学科的科学性，又能针对高职学生的接受能力和理解程度，适当选取教材内容的深度和广度。

（2）注重从实际问题引入基本概念，揭示概念本质，同时又注重概念的几何解释和物理意义，使教学内容形象生动。

（3）在阐述概念、定理、公式时，将微积分基本思想融入其中，引导学生学会从量化的角度，用数学的思维方式去思考问题，学会用微积分的观点、方法，认识和处理实际问题。

（4）在选材上，注意联系工科实际，除经典力学、物理学实例外，还增加了经济管理、医学、农业及日常生活中的实例。培养学生分析问题、解决问题的能力，激发学生创新意识。

（5）教材中配有较多的典型例题，以期起到举一反三的作用。同时也配有适量的习题，供学生选做，并配有习题参考答案。

本书由浙江水利水电专科学校孙保炬担任主编，邢益冰、吴福珍担任副主编，沈云海参与编写。

本书由防灾科技学院胡顺田担任主审，并提出了宝贵意见。此外，本书还参考了一些文献资料。在此一并致谢。

由于水平有限，书中难免出现不妥、错漏之处，恳请广大读者提出宝贵意见。

编 者

2009年1月

目　　录

前言
第1章　函数、极限与连续 …… 1
1.1　函数 …… 1
习题1-1 …… 10
1.2　函数的极限 …… 11
习题1-2 …… 16
1.3　极限的运算 …… 17
习题1-3 …… 26
1.4　无穷小量的比较 …… 27
习题1-4 …… 29
1.5　函数的连续性 …… 30
习题1-5 …… 37
第2章　导数与微分 …… 39
2.1　导数的概念 …… 39
习题2-1 …… 45
2.2　求导公式与导数的四则运算法则 …… 46
习题2-2 …… 48
2.3　反函数求导法则与复合函数求导法则 …… 49
习题2-3 …… 54
2.4　高阶导数 …… 55
习题2-4 …… 56
2.5　函数的微分 …… 57
习题2-5 …… 63
2.6　隐函数与由参数方程所确定的函数的微分 …… 64
习题2-6 …… 68
第3章　微分中值定理与导数的应用 …… 69
3.1　微分中值定理 …… 69
习题3-1 …… 72
3.2　洛必达法则 …… 72
习题3-2 …… 76
3.3　函数的单调性、极值与最值 …… 77
习题3-3 …… 84
3.4　曲线的凹凸性、拐点和函数作图 …… 85
习题3-4 …… 89

第 4 章　不定积分 …… 91
4.1　不定积分的概念和性质 …… 91
习题 4-1 …… 97
4.2　换元积分法 …… 97
习题 4-2 …… 106
4.3　分部积分法 …… 107
习题 4-3 …… 112
第 5 章　定积分及其应用 …… 113
5.1　定积分的概念与性质 …… 113
习题 5-1 …… 119
5.2　微积分的基本公式 …… 119
习题 5-2 …… 123
5.3　定积分的换元积分法与分部积分法 …… 124
习题 5-3 …… 129
5.4　反常积分 …… 130
习题 5-4 …… 134
5.5　定积分的几何应用 …… 134
习题 5-5 …… 144
5.6　定积分在物理中的应用举例 …… 144
习题 5-6 …… 147
第 6 章　微分方程 …… 148
6.1　微分方程的基本概念 …… 148
习题 6-1 …… 150
6.2　一阶微分方程 …… 150
习题 6-2 …… 154
6.3　二阶常系数线性微分方程 …… 155
习题 6-3 …… 160
6.4　微分方程的应用举例 …… 160
习题 6-4 …… 162
习题参考答案 …… 164
参考文献 …… 175

第1章 函数、极限与连续

函数是近代数学的基本概念之一. 高等数学就是以函数为主要研究对象的一门数学课程,极限是贯穿高等数学始终的一个重要概念,它是这门课程的基本推理工具. 连续则是函数的一个重要性态,连续函数是高等数学研究的主要对象. 本章在简单回顾函数概念与性质的基础上,着重讨论函数的极限、连续等基本概念,以及它们的性质与运算法则.

1.1 函 数

1.1.1 函数的概念

一个变量的值常常取决于另一个变量的值,如:水的沸点 T 取决于海拔高度 h;你的存款在一年中的增长 L 取决于银行的利率 r;圆面积的大小 A 取决于半径 r.

这种变量之间的单值对应关系抽象化就可得出下面关于函数的概念。

定义 1 设 D 为一个非空实数集合,x 和 y 是两个变量,若存在确定的对应规则 f,使得对于数集 D 中的任意一个数 x,按照 f 都有唯一确定的实数 y 与之对应,则称 f 是定义在集合 D 上的函数.

其中 x 称为自变量,y 称为因变量. 自变量 x 的取值范围 D 称为函数 f 的定义域. y 的对应值称为函数值,全体函数值的集合 $M=\{y \mid y=f(x), x\in D\}$ 称为函数 f 的值域. 如果对于自变量 x 的某个确定的值 x_0,因变量 y 能够得到一个确定的值,那么就称函数 f 在 x_0 处有定义,其因变量的值或函数 f 的函数值记为 $y\mid_{x=x_0}$,$f(x)\mid_{x=x_0}$ 或 $f(x_0)$.

【例 1】 设函数 $f(x)=x^3+2x-3$,求 $f(0)$,$f(1)$,$f(-a)$,$f\left(\dfrac{1}{a}\right)$,$[f(b)]^2$,$\dfrac{1}{f(c)}$(其中 $a\neq 0$,$f(c)\neq 0$).

解 $f(0)=0^3+2\times 0-3=-3$;

$$f(1)=1^3+2\times 1-3=0;$$

$$f(-a)=(-a)^3+2(-a)-3=-a^3-2a-3;$$

$$f\left(\frac{1}{a}\right)=\left(\frac{1}{a}\right)^3+2\left(\frac{1}{a}\right)-3=\frac{1}{a^3}+\frac{2}{a}-3=\frac{1+2a^2-3a^3}{a^3};$$

$$[f(b)]^2=(b^3+2b-3)^2;$$

$$\frac{1}{f(c)}=\frac{1}{c^3+2c-3}.$$

由定义 1 不难看出,定义域与对应规则确定,则函数也唯一确定. 故我们把函数的定义域与对应规则称为函数的两个要素. 因此,对于两个函数来说,当且仅当它们的定义域和对应规则都分别相同时,才表示同一函数,而与自变量及因变量用什么字母表示无关,例如函数 $y=f(x)$ 也可以用 $y=f(\theta)$ 表示.

正因为如此,我们在给出一个函数时,一般都应标明其定义域,它就是自变量取值的允许范围. 这可由所讨论的问题的实际意义确定;凡未标明实际意义的函数,其定义域是使该式有

意义的自变量的取值范围. 例如 $y=x^2$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

人们通常用不等式、区间或集合形式表示定义域. 其中有一种不等式，以后会常遇到，满足不等式 $|x-x_0|<\delta$（其中 δ 为大于 0 的常数）的一切 x，称为点 x_0 的 δ 邻域，记作 $U(x_0,\delta)$，它的几何意义表示以 x_0 为中心，δ 为半径的开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$，即 $x_0-\delta<x<x_0+\delta$［见图 1-1(a)］. 有时我们要用到去掉中心的邻域，对于不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 称为点 x_0 的 δ 的去心邻域，记作 $U(\hat{x}_0,\delta)$［见图 1-1(b)］.

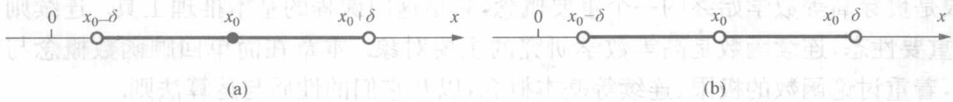

图 1-1

对于在同一个问题中所遇到的不同函数，应该采用不同的记号，如 $f(x),\varphi(x),F(x),\phi(x),\cdots$，等.

【例 2】 $U\left(2,\dfrac{1}{2}\right)=\left\{x\,\middle|\,|x-2|<\dfrac{1}{2}\right\}$ 是以点 $x_0=2$ 为中心，以 $\frac{1}{2}$ 为半径的邻域，即开区间 $(1.5,2.5)$.

【例 3】 $U(\hat{2},0.3)=\{x\mid 0<|x-2|<0.3\}$ 是以点 $x_0=2$ 为中心，以 0.3 为半径的去心邻域，即开区间 $(1.7,2)\cup(2,2.3)$.

【例 4】 确定函数

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+2x-3}}$$

的定义域.

解 显然，其定义域是满足不等式

$$x^2+2x-3>0$$

的 x 值的集合，解此不等式，则得其定义域为：

$$x>1 \text{ 或 } x<-3\text{，即}(-\infty,-3)\cup(1,+\infty).$$

也可以用集合形式表示为 $D=\{x\mid x>1 \text{ 或 } x<-3\}$.

【例 5】 确定函数

$$f(x)=\sqrt{8+2x-x^2}+\ln(x+2)$$

的定义域.

解 该函数的定义域应为满足不等式组

$$\begin{cases}8+2x-x^2\geqslant 0\\ x+2>0\end{cases}$$

的 x 值的全体，解此不等式组，得其定义域

$$-2<x\leqslant 4\text{，即}(-2,4].$$

也可以用集合形式表示为 $D=\{x\mid -2<x\leqslant 4\}$.

【例 6】 物体在 $t=0$ 时刻从高度为 h 处自由下落（空气阻力忽略不计），设在时刻 t 下落的距离为 s，则 s 是 t 的函数，即

$$s=\frac{1}{2}gt^2.$$

式中：g 是重力加速度(为常数). 物体到达地面的时间为 $t=\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$，所以这个函数的定义域为闭区间 $\left[0,\sqrt{\dfrac{2h}{g}}\right]$.

注意：函数 $y=c$(c 为常数) 的定义域为$(-\infty,+\infty)$，这时不论自变量取何值，对应的函数值均为 c.

由上面例子，我们可以体会到：函数定义中的对应规则 f，就像是一台机器，定义域中的任何一个 x 值进入这台机器后，即以同样的程序加工为值域内的一个函数值 $f(x)$.

1.1.2　函数的表示法

函数的表示法通常有三种：公式法、表格法和图示法.

(1) 以数学式子表示函数的方法叫做函数的公式表示法，上述例子中的函数都是以公式表示的，公式法的优点是便于理论推导和计算.

(2) 以表格形式表示函数的方法叫做函数的表格表示法，它是将自变量的值与对应的函数值列为表格，如三角函数表、对数表、企业历年产值表等，都是以这种方法表示的函数. 表格法的优点是所求的函数值容易查得.

【例 7】 图 1-2 是某地某一天的气温变化曲线. 根据这条曲线，对这一天从 0 点到 24 点的任何时间 t 都有一个温度 T (℃)对应. 曲线上点 $A(a,b)$，表示在时间 $t=a$ 时，相应的气温 $T=b$.

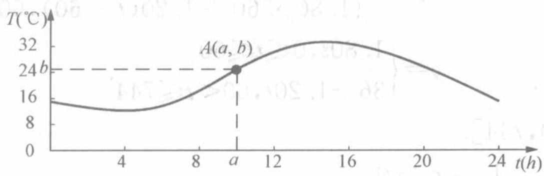

图 1-2

(3) 以图形表示函数的方法叫做函数的图示法. 这种方法在工程技术上应用较普遍，图示法的优点是直观形象，且可看到函数的变化趋势.

【例 8】 为在某河上架桥，从河的一个断面每隔 5m 测得河深 y 见表 1-1.

表 1-1

x/m	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
y/m	0	1	1.7	2.5	3.2	4.0	4.5	5.3	6.8	7.1	8.2	7.3
x/m	60	65	70	75	80	85	90	95	100	105	110	115
y/m	6.5	4.2	3.8	5.4	5.9	7.8	4.5	2.1	1.6	1.1	0.5	0

从表 1-1 中可看出当 x 取 $\{0,5,10,\cdots,115\}$ 中的任意一个数时，河深 y 都有一个值与之对应.

1.1.3　分段函数

有些函数虽然也是以数学式子表示，但是它们在定义域的不同范围具有不同的表达式. 这样的函数叫做分段函数，分段函数在数学上和工程技术中以及日常生活中都会经常遇到.

【例 9】 每位旅客乘坐火车可以免费携带不超过 20kg 的物品，但超过 20kg 而不超过 50kg 的部分每 kg 需交费 a 元，超过 50kg 部分每 kg 需交费 b 元. 求运费与携带物品重量的函数关系.

解 设物品重量为 x(kg)，应交运费为 y 元. 由题意可知这时应考虑三种情况.

第 1 种情况是重量不超过 20kg，这时

$$y=0,0\leqslant x\leqslant 20.$$

第 2 种情况是重量大于 20kg 但不超过 50kg，这时

$$y=(x-20)\times a,20<x\leqslant 50.$$

最后是重量超过 50kg，这时

$$y=(50-20)\times a+(x-50)\times b,x>50.$$

因此，所求的函数是一个分段函数

$$y=\begin{cases}0 & ,0\leqslant x\leqslant 20\\ a(x-20) & ,20<x\leqslant 50\\ a(50-20)+b(x-50) & ,x>50\end{cases}$$

【例 10】 某电信局规定上网收费标准：当月上网时间低于 60h，按每小时 1.80 元收取. 起过 60h 后的部分按每小时 1.20 元收取. 这样当月上网费 y 与上网时间 t 的函数关系为

$$y=\begin{cases}1.80t,0\leqslant t\leqslant 60\\ 1.80\times 60+1.20(t-60),60<t\leqslant 744\end{cases}.$$

即

$$y=\begin{cases}1.80t,0\leqslant t\leqslant 60\\ 36+1.20t,60<t\leqslant 744\end{cases}.$$

函数的定义域为 $D=[0,744]$.

【例 11】 设 $f(x)=\begin{cases}1 & ,x>0\\ 0 & ,x=0\\ -1 & ,x<0\end{cases}$. 求 $f(3)$、$f(0)$ 和 $f(-3)$.

解 因为 $3\in(0,+\infty),0\in\{0\},-3\in(-\infty,0)$，所以

$$f(3)=1,f(0)=0,f(-3)=-1.$$

在求分段函数的函数值时，应先确定自变量取值的所在范围，再按相应的式子进行计算.

[例 11]给出的函数称为符号函数，记为 $\operatorname{sgn}x$. 其定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域$\{-1,0,1\}$，它的图形如图 1-3 所示. 我们有时可以运用它将某些分段函数写得简洁一些.

例如，函数

$$f(x)=\begin{cases}-x,x\leqslant 0\\ x\quad,x>0\end{cases}$$

可以记为

$$f(x)=|x|=x\operatorname{sgn}x.$$

【例 12】 函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2-1,x\leqslant 0\\ x+1,0<x\leqslant 2\end{cases}$$

为定义在$(-\infty,2]$上的一个分段函数. 对于任何一个 $x\in(-\infty,0]$，其函数值均以 x^2-1 计

算；对于任何一个 $x \in (0,2]$，其函数值均以 $x+1$ 计算.

【例 13】 设变量 y 是不超过 x 的最大整数部分，它表示了一个分段函数，常称为“取整函数”，记为 $y=[x]$，即若 $n \leqslant x < n+1$，则 $[x]=n$，其中 n 为整数. 因此其数学表达式为

$$y=[x]=\begin{cases} \cdots,\cdots \\ -2,-2\leqslant x<-1 \\ -1,-1\leqslant x<0 \\ 0,0\leqslant x<1 \\ 1,1\leqslant x<2 \\ 2,2\leqslant x<3 \\ \cdots,\cdots \end{cases}.$$

它的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为一切整数，它的图形如图 1-4 所示.

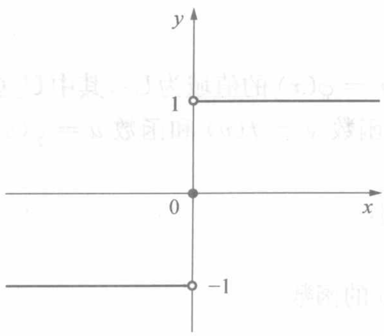

图 1-3

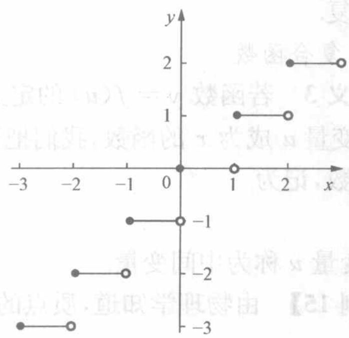

图 1-4

1.1.4 反函数

定义 2 设 $y=f(x)$ 为定义在 D 上的函数，其值域为 W. 若对于数集 W 中的每个数 y，数集 D 中都有唯一的一个数 x 使 $f(x)=y$，这就是说变量 x 是变量 y 的函数. 这个函数称为函数 $y=f(x)$ 的反函数，记为 $x=f^{-1}(y)$.

反函数的定义域为 W，值域为 D. 函数 $y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 两者的图形是相同的，而 $y=f(x)$ 称为直接函数.

由于人们习惯于用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，为了照顾习惯，我们将函数 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 用 $y=f^{-1}(x)$ 表示. 注意，这时二者的图形关于直线 $y=x$ 对称.

由函数 $y=f(x)$ 求它的反函数的步骤是：由方程 $y=f(x)$ 解出 x，得到 $x=f^{-1}(y)$；将函数 $x=f^{-1}(y)$ 中的 x 和 y，分别换为 y 和 x，这样，便得到反函数 $y=f^{-1}(x)$.

【例 14】 求函数 $y=\dfrac{3^x}{3^x+1}$ 的反函数.

解 由 $y=\dfrac{3^x}{3^x+1}$ 可解得 $x=\log_3\dfrac{y}{1-y}$，交换 x、y 的位置，即得所求的反函数

$$y=\log_3\frac{x}{1-x} \text{ 或 } y=\log_3 x-\log_3(1-x),$$

其定义域为$(0,1)$.

应当指出，函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 之间存在着这样的关系，即

$$f^{-1}[f(x)]=x \text{ 和 } f[f^{-1}(x)]=x.$$

例如：$y=\log_a x$ 的反函数是 $y=a^x$，则

$$\log_a(a^x)=x,\quad a^{\log_a x}=x.$$

1.1.5 初等函数

1. 基本初等函数

幂函数：$y=x^\mu$（μ 为任意实数）；

指数函数：$y=a^x(a>0,\text{且 } a\neq 1)$；

对数函数：$y=\log_a x(a>0,\text{且 } a\neq 1)$；

三角函数：$y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$；

反三角函数：$y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\text{arccot} x$.

以上五类函数统称为基本初等函数. 它们的定义域、图像和性质在中学已经学习过，这里不再重复.

2. 复合函数

定义 3 若函数 $y=f(u)$ 的定义域为 U_1，函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 U_2，其中 $U_2\subseteq U_1$，则 y 通过变量 u 成为 x 的函数，我们把这个函数称为由函数 $y=f(u)$ 和函数 $u=\varphi(x)$ 构成的复合函数，记为

$$y=f[\varphi(x)],$$

式中：变量 u 称为中间变量.

【例 15】 由物理学知道，质点的动能 E 是速度 v 的函数

$$E=\frac{1}{2}mv^2.$$

其中 m 是质点的质量. 如果考虑物体（质点）上抛运动，把一个质量为 m 的物体以初速度 v_0 垂直上抛，由于地球引力的作用，它就不断减速，这时 $v=v_0-gt$，于是物体的动能 E 通过速度成为时间的函数

$$E=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m(v_0-gt)^2.$$

$E=\frac{1}{2}m(v_0-gt)^2$ 可以看成由 $E=\frac{1}{2}mv^2$ 和 $v=v_0-gt$ 复合而成的一个函数.

【例 16】 试求函数 $y=u^3$ 与 $u=\sin x$ 构成的复合函数.

解 将 $u=\sin x$ 代入 $y=u^3$ 中，即为所求的复合函数

$$y=\sin^3 x,$$

其定义域为$(-\infty,+\infty)$.

【例 17】 试求函数 $y=\sqrt{u}$ 与 $u=1-x^3$ 构成的复合函数.

解 容易得到该复合函数

$$y=\sqrt{1-x^3},$$

其定义域为$(-\infty,1]$.

【例 18】 设 $f(x)=\left(\frac{1}{1+x}\right)^2, \varphi(x)=\sqrt{\sin x}$，求 $f[\varphi(x)]$ 和 $\varphi[f(x)]$.

解 (1) 求 $f[\varphi(x)]$ 时，应将 $f(x)$ 中的 x 视为 $\varphi(x)$，因此

$$f[\varphi(x)]=\left(\frac{1}{1+\sqrt{\sin x}}\right)^2.$$

(2) 求 $\varphi[f(x)]$时,应将 $\varphi(x)$中的 x 视为 $f(x)$,因此

$$\varphi[f(x)]=\sqrt{\sin\left(\frac{1}{1+x}\right)^2}.$$

必须注意,不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数. 例如: $y=\ln u$ 和 $u=x-\sqrt{x^2+1}$ 就不能复合成一个复合函数,因为 $u=x-\sqrt{x^2+1}$ 的值域是$(-\infty,0)$,与 $y=\ln u$ 的定义域$(0,+\infty)$的交集为空集,因此不能复合.

复合函数不仅可以由两个函数复合而成,有时一个复合函数可能由三个或更多的函数构成. 比如,由函数 $y=\ln u, u=v^2+1$ 和 $v=\sin x$ 可以构成复合函数 $y=\ln(\sin^2x+1)$,其中 u 和 v 都是中间变量. 复合函数通常是由基本初等函数与常数经过四则运算形成的简单函数复合而成.

与此同时,我们还应掌握复合函数的复合过程,即"分解"复合函数,这对于后面的学习有帮助,读者对此应予重视.

【例 19】 设 $f(x-1)=x^3$,求 $f(2x+1)$.

解　方法一　令 $u=x-1$ 得 $f(u)=(u+1)^3$,再将 $u=2x+1$ 代入,即得复合函数

$$\begin{aligned}f(2x+1)&=[(2x+1)+1]^3\\&=8(x+1)^3.\end{aligned}$$

方法二　因为 $f(x-1)=x^3=[(x-1)+1]^3$,于是问题转化为求 $y=f(x)=(x+1)^3$ 与 $\varphi(x)=2x+1$ 的复合函数 $f[\varphi(x)]$,因此

$$f(2x+1)=[(2x+1)+1]^3=8(x+1)^3.$$

【例 20】 指出 $y=(3x+2)^9, y=\sqrt{\log_a(\sin x+3^x)}, y=\cos^2(2x+1)$ 是由哪些函数复合而成的.

解　$y=(3x+2)^9$ 是由 $y=u^9$ 和 $u=3x+2$ 复合而成的.

$y=\sqrt{\log_a(\sin x+3^x)}$ 是由 $y=\sqrt{u}$, $u=\log_a v$, $v=\sin x+3^x$ 复合而成的.

$y=\cos^2(2x+1)$ 是由 $y=u^2$, $u=\cos v$, $v=2x+1$ 复合而成的.

3. 初等函数

由基本初等函数及常数经过有限次四则运算和有限次复合构成,并且可以用一个数学公式表示的函数,叫做初等函数. 不能用一个公式表示或不能用有限次运算与复合表示的函数一般不是初等函数.

例如 $y=\sqrt{3^x+\sin^2x}, y=\dfrac{\sqrt[3]{x}+\tan 3x}{x^2\sin x}, y=\ln(x+1)$ 等都是初等函数,而

$$y=1+x+x^2+\cdots$$

不是初等函数.

本教材中所讨论的函数一般都是初等函数,但分段函数一般不是初等函数.

1.1.6　函数的基本性态

1. 函数的奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,如果对于定义域 D 中的任何 x,都有 $f(-x)=f(x)$,则称函数 $y=f(x)$ 为偶函数;如果对于定义域 D 中的任何 x,都有 $f(-x)=-f(x)$,则

称 $y=f(x)$ 为奇函数. 不是偶函数也不是奇函数的函数,称为非奇非偶函数.

偶函数的图像关于 y 轴对称;奇函数的图像关于原点对称.

【例 21】 证明 $f(x)=\cos x\sin x^3$ 为奇函数.

证 因为 $f(x)=\cos x\sin x^3$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,且有:

$$f(-x)=\cos(-x)\sin(-x)^3=\cos x(-\sin x^3)=-f(x).$$

所以该函数为奇函数.

【例 22】 证明 $f(x)=x\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 是偶函数.

证 因为该函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,且有

$$\begin{aligned}f(-x)&=(-x)\ln(-x+\sqrt{(-x)^2+1})\\&=-x\ln\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}\\&=-x\cdot\ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\\&=-x[-\ln(x+\sqrt{x^2+1})]\\&=f(x).\end{aligned}$$

所以 $f(x)=x\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 是偶函数.

2. 函数的周期性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D. 如果存在一个不为零的数 T,使得对于任一 $x\in D$,有 $x\pm T\in D$,且 $f(x+T)=f(x)$ 恒成立,则称 $f(x)$ 为周期函数.

对于每个周期函数来说,定义中的 T 有无穷多个,因为如果 $f(x+T)=f(x)$,那么就有

$$\begin{aligned}f(x+2T)&=f[(x+T)+T]\\&=f(x+T)=f(x),\\f(x+3T)&=f[(x+2T)+T]\\&=f(x+2T)=f(x)\end{aligned}$$

人们规定:若其中存在一个最小正数 l,则规定 l 为周期函数 $f(x)$ 的最小正周期,简称周期. 例如 $y=\sin x$,$y=\tan x$ 的周期分别为 2π、π.

【例 23】 设函数 $y=f(x)$ 是以 ω 为周期的周期函数,试证函数 $y=f(ax)(a>0)$ 是以 $\frac{\omega}{a}$ 为周期的周期函数.

证 要证的是

$$f(ax)=f\left[a\left(x+\frac{\omega}{a}\right)\right],$$

因为 $f(x)$ 以 ω 为周期,所以

$$f(ax)=f(ax+\omega),$$

即 $f(ax)=f\left[a\left(x+\frac{\omega}{a}\right)\right]$. 所以 $f(ax)$ 是以 $\frac{\omega}{a}$ 为周期的周期函数.

例如 $y=\sin x$,$y=\cos x$ 均以 2π 为周期,所以 $y=\sin 4x$,$y=\cos\frac{x}{2}$ 的周期分别为 $\frac{\pi}{2}$ 和 4π.

3. 函数的单调性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，如果对于区间 (a,b) 内的任意两个数 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称该函数在区间 (a,b) 内单调增加，或称递增，(a,b) 称为 $f(x)$ 的单调增加区间；当 $x_1<x_2$ 时，有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称该函数在区间 (a,b) 内单调减少，或称递减，(a,b) 称为 $f(x)$ 的单调减少区间.

在区间 (a,b) 上单调增加或单调减少的函数统称为区间 (a,b) 上的单调函数，(a,b) 称为函数 $f(x)$ 的单调区间.

例如，$y=\tan x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内递增，$y=\cos x$ 在 $(0,\pi)$ 内递减.

从几何直观来看，递增函数的图像沿 x 轴正向而上升；递减函数的图像沿 x 轴正向而下降. 例如函数 $y=x^3$ 在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加；函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 内单调减少，在 $(0,+\infty)$ 内单调增加，但在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内，$y=x^2$ 不是单调函数，如图 1-5 所示.

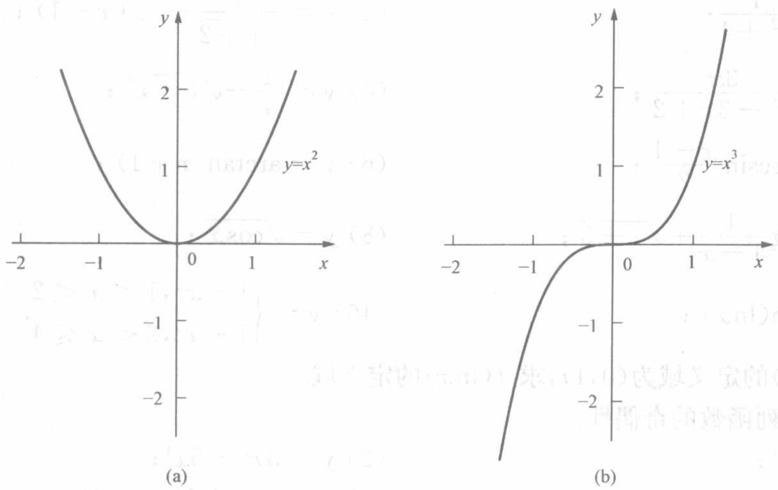

图 1-5

4. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若存在一个正数 M，当任一 $x\in I$ 时，恒有

$$|f(x)|\leqslant M$$

成立，则称函数 $f(x)$ 为在 I 上的有界函数；如果不存在这样的正数 M，则称函数 $f(x)$ 为在 I 上的无界函数.

例如，因为当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时，恒有 $|\sin x|\leqslant 1$，所以函数 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界函数. 又如 $f(x)=\sin\frac{1}{2x}$，$f(x)=\arctan 3x$ 在它们的定义域内是有界的，而 $f(x)=\tan x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内是无界函数.

有的函数可能在定义域的某一部分有界，而在另一部分无界. 例如 $f(x)=\tan x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$ 上是有界的，而在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内是无界的. 又如函数 $y=x^2$ 在 $[-1,1]$ 内是有界的，

但它在$(-\infty,+\infty)$上是无界的. 因此我们说一个函数是有界的或者无界的,应同时指出其自变量的相应范围.

习 题 1-1

1. 下列函数是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\lg x^2, g(x)=2\lg x$； (2) $f(x)=x, g(x)=\sqrt{x^2}$.

2. 设 $f(x)=2x^2-3x+2$，求 $f(0), f(4), f(a), f(x+1)$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}1-x, x\leqslant 0\\ 2^x \quad, x>0\end{cases}$. 求 $f(-2), f(-1), f(0), f(1)$.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x}, x\leqslant 1\\ x^2 \quad, x>1\end{cases}$. 求 $f(-3), f(0), f(2), f(5)$.

5. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{x^2+1}$； (2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}+\sqrt{x(x-1)}$；

(3) $y=\dfrac{3x}{x^2-3x+2}$； (4) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$；

(5) $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$； (6) $y=\arctan(x+1)$；

(7) $y=\lg\dfrac{1}{1-x}+\sqrt{x+3}$； (8) $y=\sqrt{\cos x}$；

(9) $y=\ln(\ln x)$； (10) $y=\begin{cases}1-x^2, 1<x<2\\ 1+x^2, 2<x\leqslant 4\end{cases}$.

6. 设 $f(x)$的定义域为$(0,1)$，求 $f(\ln x)$的定义域.

7. 判断下列函数的奇偶性：

(1) $y=3^x$； (2) $y=3x^2-5x^4$；

(3) $y=e^x+e^{-x}$； (4) $y=x(x+1)(x-1)$；

(5) $y=x\sin x$； (6) $y=\cos(\sin x)$；

(7) $y=\dfrac{|x|}{x}$； (8) $y=e^{-x^2}+x$.

8. 求下列函数的反函数，并写出定义域：

(1) $y=x^2, x\geqslant 0$； (2) $y=10^x-5$；

(3) $y=\dfrac{x}{x-2}$； (4) $y=1+\ln(x-2)$.

9. 设 $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$，求 $f[f(x)]$.

10. 如果 $y=u^2, u=\log_3 x$，将 y 表示成 x 的函数.

11. 下列函数式是由哪些简单函数复合而成的：

(1) $y=\sqrt{3x-1}$； (2) $y=\ln(1+3x)$；

(3) $y=\sqrt{\lg(x^2+1)}$； (4) $y=e^{\sqrt{x+1}}$；

(5) $y=\sin 5x$；　　(6) $y=\lg[\arcsin(x^5)]$；

(7) $y=\cos^3(2x+1)$；　　(8) $y=2^{(x+1)^2}$.

12. 杭州市电力部门规定，居民每月用电不超过 50 度时，电价为 0.538 元/度；当超过 50 度但不超过 200 度时，超过部分的电价为 0.568 元/度；当超过 200 度时，超过部分的电价为 0.638 元/度；试建立居民月用电费 C 与用电量 x 之间的函数关系.

1.2 函数的极限

我们研究物质的运动，仅仅知道有关函数在变化过程中单个取值情况是很不够的，还需要弄清楚函数变化时总的变化趋势，是否隐含着某种“相对稳定”的性质，这就需要极限的概念和方法. 极限是高等数学中最重要的概念之一，是研究微积分的重要工具，是学习微分法、积分法等的理论基础. 因此，我们必须要掌握极限的思想和方法.

下面我们先来看一个例子.

【例 1】 求由曲线 $y=x^2$，$x=1$ 及 x 轴所围成的图形[该图形叫做曲边三角形，图 1-6(a) 所示]的面积.

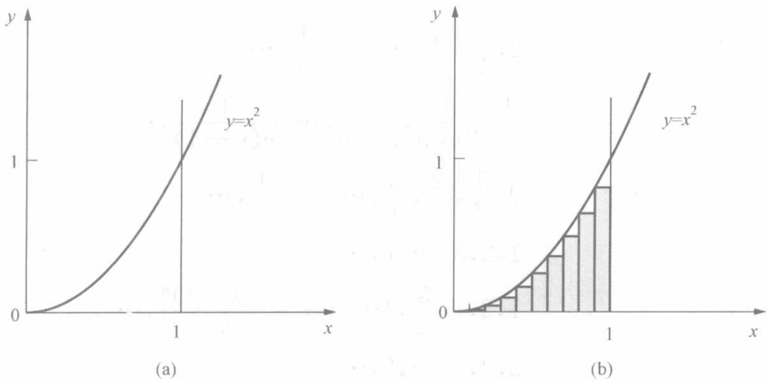

图 1-6

解 将区间[0,1]等分为 n 个小区间 $\left[0,\frac{1}{n}\right],\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right],\cdots,\left[\frac{n-1}{n},1\right]$，称为子区间，依次作 n 个内接小矩形如图 1-6(b)，它们的面积分别为：

$$\frac{1}{n}\times 0,\frac{1}{n}\times\left(\frac{1}{n}\right)^2,\frac{1}{n}\times\left(\frac{2}{n}\right)^2,\frac{1}{n}\times\left(\frac{3}{n}\right)^2,\cdots,\frac{1}{n}\times\left(\frac{n-1}{n}\right)^2.$$

若将这 n 个小矩形的面积之和 S_n 作为曲边三角形面积 S 的近似值，则有

$$\begin{aligned}S\approx S_n&=\frac{1}{n}\times\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\times\left(\frac{2}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\times\left(\frac{3}{n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n}\times\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\\&=\frac{1}{n^3}[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2]\\&=\frac{1}{n^3}\times\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\\&=\frac{1}{6}\times\left(1-\frac{1}{n}\right)\times\left(2-\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$