高等学校教学参考书

函数论习题集

（第一卷）

K·诺普著

谢力之译

汉中师范学院

高等学校教学参考书

函数论习题集

（第一册）

[illegible]

[illegible]

[illegible]

高等学校教学参考书

函数论习题集

《第一卷》

K·诺普 著

谢力之 译

汉中师范学院

前　言

译者五十年代在复旦大学聆听夏道行教授讲授《复变函数论》时，就演绎了这个译文的全部习题，后来在工作中讲授《复变函数论》时，也多次选用了译文中的习题。中外《复变函数论》的教材中，有很多习题也来源于这个译文，译者编写的《研究生入学考试高等数学试题及解答》（1981年初版，4月再版）一书中，也有不少试题出自于这个译文，因此这个习题集的译出，将会大大有助于高等学校的理工科在校学生学习《复变函数论》。

这个译文是《复变函数论》习题集，共有两卷。第一卷是基本的习题，包括复数序列、复变函数、台劳级数，共形映照的基本概念。第二卷是进一步的习题，包括罗朗级数、奇点、留数、整函数、亚纯函数、解析开拓、多值函数、共形映照一般理论。

这本习题集没有插图，原作者希望读者在看习题解答时能自己补绘出一些草图，这样能更深刻地理解内容。

带* 的题目，表示更难一些的习题。

译者采用了我国统一使用的记号。例如：

自然对数为$l_n n$；复数z对数为$L_n z$，其主值为$l_n z$。

用γ、ρ、ε、∂、……表示正的常数；用n、m、p、……表示正整数。

用z_0、z_1、……、w_0、w_1、……、a、b、……，表示

复数（和点）；用z、ξ、……、w、……，表示复变数（在§13中也用z_1、z_2、……表示复变数）；用$\overline{z}$、$\overline{\alpha}$……表示z、α、……的共轭复数。

用x_0、x_1、x_2、……，y_0、y_1、y_2、……，u_0、v_0、u_1、v_1……，α、β、λ、μ、……，表示实常数；x、y、……、u、v、……表示实变数。

复数z写成：

$$z = x + iy$$
$$= \gamma(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

且有记号：$x = R(z)$ 或 $R_e z$，

$$y = I(z) \quad 或 I_m z;$$
$$|z| = \gamma,$$
$$\varphi = arg\ z。$$

区域的记号用字母D、M、……表示；曲线的记号用字母l、C、L……表示。

由于译者水平所限，翻译中的错误必然不少，恳切希望同志们给予批评指教。

谢力之

一九八二年元月

目　　录

第一部分　习　题

第一章　基本概念

§ 1、数与点

1.已知一个复数$z_0 \neq 0$，分别求它关于下列的对称点：

（1）原点；

（2）实轴；

（3）虚轴；

（4）直线：$x-y=0$；

（5）直线：$x+y=0$。

2.已知：$z=x+iy$，

证明：

$$\frac{|x|+|y|}{\sqrt{2}} \leqslant |z| \leqslant |x|+|y|。$$

3.求适合下列关系点z的轨迹：

（1）$|z| \leqslant 2$；

(2) $|z|>2$;

(3) $R(z)\geqslant\frac{1}{2}$;

(4) $0\leqslant R(iz)<2\pi$;

(5) $R(z^2)=\alpha$ ($\alpha>0$ 或 $=0$ 或 <0);

(6) $I(z^2)=\alpha$ ($\alpha>0$ 或 $=0$ 或 <0);

(7) $|z^2-z|\leqslant 1$;

(8) $|z^2-1|=\alpha>0$;

(9) $\left|\frac{1}{z}\right|<\delta$　$\delta>0$;

(10) $\left|\frac{z-1}{z+1}\right|\leqslant 1$;

(11) $\left|\frac{z-1}{z+1}\right|=2$;

(12) $\left|\frac{z}{z+1}\right|=\alpha>0$;

(13) $\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|=1$ (z_1、z_2是给定点)

4.在什么条件下z_1，z_2，z_3是共线的？(用差的商：$\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$来表示)。

5.在什么条件下z_1，z_2，z_3，z_4共园或共线？

（用交比 $\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3} \div \frac{z_1-z_4}{z_2-z_4}$ 来表示）。

6.证明：

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$$

，并指出等式的几何意义是什么？

7.求点z，使分线段z_1z_2成定比：

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \qquad (其中\lambda_1+\lambda_2\neq 0)$$

8.分别就下列条件，求以z_1，z_2，z_3为顶点的三角形的重心：

（1）若每一个顶点z_j 具有相同的质量λ；

（2）在顶点z_1、z_2、z_3的质量分别为λ_1、λ_2、λ_3；

（3）在（2）中若这三个质量都是正的，证明三角形的重心是落在三角形内部。

9.在质点z_1，z_2，……，z_k的质量分别为λ_1，λ_2，……，λ_k。证明该质点系的重心为

$$z=\frac{\lambda_1z_1+\lambda_2z_2+\cdots\cdots+\lambda_kz_k}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots\cdots+\lambda_k}$$

10.已知：$|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$，

$$z_1+z_2+z_3=0，$$

证明：z_1，z_2，z_3是内接单位园的一个正三角形顶点。

11. 已知：$|z_1|=|z_2|=|z_3|=|z_4|=1$，

$$z_1+z_2+z_3+z_4=0$$

证明：z_1，z_2，z_3，z_4是内接单位园的一个矩形的顶点。

12.在什么条件下两个三角形：

$$z_1.\ z_2,\ z_3,$$

与z_1'，z_2'，z_3'

是相似的且方位一致？（参考习题4）

*13.(1)已知：不同的两点z_1，z_2满足

$$|z_1|<1,\qquad |z_2|<1,$$

证明：对于位于以z_1，z_2，1为顶点的三角形之内的每一点$z\neq 1$，有

$$\frac{|1-z|}{1-|z|}\leqslant k,$$

其中$k=k(z_1, z_2)$是仅依赖于z_1和z_2的一个常数。

(2)对于

$$z_1=\frac{1+i}{2}\qquad\qquad z_2=\frac{1-i}{2}$$

求出k的最小值。

§2.点集、曲线、区域

1.证明：代数方程

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

根的集合是可数的。

其中a_0，a_1，…，a_n是高斯整数（如果一个集合的元素能够排列成一个序列，则此集合谓之可数的；如果$R(z)$和$I(z)$是实整数，则复数z是一个高斯整数）。

2.当x，y是有理数时，

证明：由所有复数

$$z = x + iy$$

组成的集是可数的。

3.证明：由所有复数

$$z = \frac{1}{m} + \frac{i}{n}$$

（m，n是正整数）组成的有序集成为一个序列。

4.分别求下列实数集的下确界α，上确界β，下极限λ和上极限μ（并考虑α、β、λ、μ是属于或不属于集合的）：

（1）有理数集 $\frac{p}{g}$

其中g为偶数，且

$$\frac{p^2}{g^2} \leqslant 10$$

（2）形为$\left(1 \pm \frac{1}{n}\right)^n$的数集。

（3）形为$\left(1\pm\frac{1}{n^2}\right)^n$的数集。

（4）形为$n\pm\frac{1}{n}$的数集。

（5）形为$n\pm\frac{1}{3}$的数集。

（6）形为$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$的数集。

（7）形为$\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)^{m+n}$的数集。

（8）形为$\pm\frac{1}{m}\pm\frac{1}{n}$的数集。

（9）形为$1+(-1)^n+(-1)^n\frac{1}{n}$的数集。

(10)所有可以写成形为

$$0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots$$

的无限小数的数集，其中α_j为奇数。

（在（2）到（9）中的n和m表示任意正整数）。

*5.证明：在第4题(10)中所定义的集的每一个点，都是此集合的极限点。

6.当集合的下确界α不属于集合时

证明：$\alpha=\lambda$

（其中λ为集合的下极限）。

当集合的上确界β不属于集合时，

证明：$\beta=\mu$

（其中μ为集合的上极限）。

7.试问适合关系：

$$|z|+R(z)\leqslant 1$$

的集合是有界的吗？该集合是什么？

8.求下列集合的所有极限点：

(1) $\frac{1}{m}+\frac{i}{n}$，　m、n是正整数；

(2) $|z|<1$；

(3) $|z|>1$；

(4)由习题第2题定义的集合；

(5)在单位园内部区域中，所有不是实数z的集合。

*9.在习题第4题（10）中定义的集合，是不是闭集？

10.不属于点集的一个极限点，是集合的一个边界点吗？

11.证明：属于点集M的一个边界点是其余集$\overline{M}$的一个极限点。

（$\overline{M}$是由不属于M的所有点组成

12.证明：一个点集的所有边界点的集合是闭的。

*13.已知：两个不相交的闭点集M'和M''，其中一个假定M'是有界的。

证明：存在着一个正数d，使

$$|z'-z''| \geqslant d,$$

其中z'是属于M'，z''是属于M''。

并证明在所有这样d中，必有一个最大数d_0。

14.证明：在连续曲线

$$y=\begin{cases} \chi \sin\dfrac{\pi}{\chi}, & \text{当}\chi \neq 0 \\ 0, & \text{当}\chi = 0 \end{cases}$$

上包含原点的一段弧不是有长的。

15.G是由上半平面（$I(z)>0$）的所有点组成的，但要除去线段：

$$z=it,$$

$$z=\pm\frac{1}{n}+it$$

（$n=1, 2, \cdots,\quad 0<t\leqslant 1$）。

试问G是一个区域吗？并求G的边界点。

并问$\frac{1}{2}i$是一个边界点吗？从$z_0=2+i$到$\frac{1}{2}i$是否存在一条属于G之中的连续有长曲线（对于端点$\frac{1}{2}i$除外）。

16. 螺线S定义为

$$z(t)=\begin{cases}\dfrac{-1+i}{e\ t}, & 0<t\leqslant 1,\\ 0, & t=0,\end{cases}$$

从$z_1=z(1)$到$z_0=0$，S是否是连续有长曲线。

*17. 记D是一个平面区域，

D_1是它在球极平面射影下的象，

M_1是D_1边界点的集。

证明：D是单连通当且仅当

M_1是连通的。

（一个闭集称为连通的是指：若它不能够分成二个闭子集，除非有一个公共元素）。

18. 在习题第15题中定义的区域是不是单连通的？

19. 证明：在球形曲面上，不含有球面上二个点的一个单连通区域D，一定不含有球面无限多个点。

第二章　无限序列和级数

§3.序列的极限、数项无穷级数

1.设ξ是序列

$$z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_n,\ \cdots$$

的极限点，

证明：此序列必含有一个收敛于ξ的子序列

$$z_1',\ z_2',\ \cdots,\ z'\cdots。$$

2.若$z_n \to \xi$，

$$则\quad z_n' = \frac{z_1 + z_2 + \cdots + z_n}{n}$$

$$\to \xi。$$

如果$\xi = \infty$，是否也成立呢？

3.若$z_n \to \xi$，

$$则\quad z_n' = \frac{a_1 z_1 + a_2 z_2 + \cdots + a_n z_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$$

$$\equiv \frac{s_1 z_1 + (s_2 - s_1) z_2 + \cdots + (s_n - s_{n-1}) z_n}{s_n}$$