普通高等教育“十一五”国家级规划教材

大学数学系列教材（第二版）

大学数学 4

湖南大学数学与计量经济学院　组编
主编　罗汉　杨湘豫

Mathematics

高等教育出版社

普通高等教育"十一五"国家级规划教材
大学数学系列教材(第二版)

大学数学

4

湖南大学数学与计量经济学院　组编
主编　罗　汉　杨湘豫

高等教育出版社

内容简介

本书是《大学数学》系列课程教材之一，内容包括随机事件及其概率、随机变量及其分布、随机向量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理、随机过程、参数估计、假设检验、方差分析和正交试验、回归分析等。各节后配有适量的习题，书末附有部分习题答案和常用概率统计表。

本书结构严谨、内容丰富、逻辑清晰、叙述详细、重点突出、难点分散，例题和习题等均经过精选，具有代表性和启发性，便于教学。

本书可作为高等院校本科非数学类各专业学生的"概率论与数理统计"课程的教材或参考书，也适合各类需要提高数学素质和能力的人员使用。

图书在版编目(CIP)数据

大学数学.4/罗汉，杨湘豫主编；湖南大学数学与计量经济学院组编.—2版.—北京：高等教育出版社，2009.7

(大学数学系列教材)

ISBN 978-7-04-027230-7

Ⅰ.大… Ⅱ.①罗…②杨…③湖… Ⅲ.高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第086905号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京市白帆印务有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
		版　　次	2003年8月第1版
开　　本	787×960　1/16		2009年7月第2版
印　　张	20.5	印　　次	2009年7月第1次印刷
字　　数	380 000	定　　价	22.30元

物料号　27230-00

大学数学系列教材
（第二版）

湖南大学数学与计量经济学院　组编

《大学数学 1》　主编　黄立宏　马柏林

《大学数学 2》　主编　曹定华　孟益民

《大学数学 3》　主编　曾金平　彭亚新

《大学数学 4》　主编　罗　汉　杨湘豫

《大学数学 5》　主编　李董辉　蒋月评

第二版前言

湖南大学数学与计量经济学院于2001年组织编写了《大学数学》(1~5)系列教材,由刘楚中任总主编,黄立宏任副总主编,其中,《大学数学1》由黄立宏和戴斌祥主编,刘楚中、杨湘豫、李亚琼、邓爱珍、孟益民、朱惠延参加编写;《大学数学2》由曾金平和李晓沛主编,彭亚新、邓爱珍、蒋月评参加编写;《大学数学3》由刘楚中和曹定华主编,杨冬莲、李建平、刘开宇、彭亚新、历亚、朱郁森参加编写;《大学数学4》由杨湘豫和邓爱珍主编,喻胜华、谭德俊、彭国强、晏木荣、刘先霞、胡春华参加编写;《大学数学5》由李董辉和曾金平主编,马传秀参加编写。该系列教材被列为"普通高等教育'十五'国家级规划教材",由高等教育出版社于2002年和2003年相继出版。教材出版后已历经湖南大学各非数学专业多届本科生使用,国内许多高校也将其选作一些本科专业的教材,得到师生的好评,同时我们也收集到了许多宝贵意见和修改建议。为了进一步提高教材质量,打造精品教材,学院决定组织人员对该系列教材进行修订,并于2005年底由黄立宏教授牵头将教材的修订申报了"普通高等教育'十一五'国家级规划教材",且顺利通过。现出版的此套教材就是在原《大学数学》(1~5)系列教材的基础上修订而成的。由于参加原系列教材编写的部分教师相继退休或调离,在此次修订工作中,我们新成立了编写委员会,委员会由黄立宏任主任,罗汉任副主任,修订版各分册的主编为成员。

本分册是在原系列教材之一的《大学数学4》的基础上修订而成的,由罗汉和杨湘豫任主编,内容包括随机事件及其概率、随机变量及其分布、数字特征、大数定律和中心极限定理,参数估计、假设检验、方差分析和回归分析等。修订版在原教材的基础上对教材内容的取舍和叙述进行了进一步锤炼,调整了部分内容顺序,增加和改写了部分内容,使之更加清晰、易懂、便于教学,更切合理工科各非数学专业的实际要求,也删改和补充了部分例题和习题,修改了个别错误和不当之处,书中打星号(*)章节为选讲。

本教材中难免会有不妥之处和有待进一步改进的地方,希望使用本教材的教师和学生提出宝贵意见。

本系列教材的编写和出版得到湖南大学数学与计量经济学院各位教师和湖南大学教务处、高等教育出版社的大力支持,在此表示衷心感谢。

湖南大学数学与计量经济学院

2009年3月

第一版前言

本系列教材是教育部"新世纪高等教育教学改革工程"本科教育教学改革项目的研究成果之一,是湖南大学自1989年以来非数学类理工科各专业数学课程教学与教材改革有关成果的延续。

本系列教材对非数学类理工科数学课程所授知识进行了重新分块,进一步理顺了非数学类理工科数学各门课程之间的关系和内涵。在内容叙述与介绍中以物理、力学和工程中的数学模型为背景,辅以代数结构,注意内容间的有机结合,避免不必要的重复;注意连续和离散的关系,加强函数的离散化处理;内容展开注重由浅入深、由特殊到一般,给学生一个完整的知识体系,并注重培养学生研究问题和解决实际问题的能力;采用近代数学观点和数学思想方法,以集合、向量及映射贯穿全书,加强了近代数学思想方法和数学实践的内容,为学生今后学习近代数学知识奠定了良好的基础,使之更符合新世纪培养高素质人才的要求。在教材编写中特别注重教育观念、教学内容和教学模式的更新,注重对学生数学素质、计算及应用能力、创新意识和工程意识的培养。教材编写以培养学生的良好数学素质为主要目标,同时为适应近年来随经济发展出现的专业调整和专业知识更新,为在教育教学改革中已调整、拓宽的各专业服务,本系列教材还适当地开设了一些有关的现代数学的知识窗口,以拓宽学生知识面,使教材具有较宽的口径和较大的适应性。本系列教材中,概念、定理及理论叙述准确、精炼,符号使用标准、规范,知识点突出,难点分散,证明和计算过程均着重体现近代数学思想方法,例题、习题等均经过精选,具有代表性和启发性。本系列教材适合大学非数学类理工科本科生以及各类需要提高数学素质和能力的人员使用。本系列教材中难免会有不妥之处,希望使用本教材的教师和学生提出宝贵意见。

本系列教材包括《大学数学(一)》(含一元微积分、常微分方程、级数、差分方程等)、《大学数学(二)》(含代数与几何等)。《大学数学(三)》(含多元微积分、向量分析、场论、积分变换、偏微分方程等)、《大学数学(四)》(含概率论、数理统计等)、《大学数学(五)》(含数值计算、数学建模、计算机与数学等)、《大学数学习题集》(附习题解答)。整套教材由刘楚中任总主编,黄立宏任副总主编。本册《大学数学(四)》由杨湘豫、邓爱珍、喻胜华主编,参加编写的人员有:谭德俊、彭国强、晏木荣、刘先霞、胡春华。

本系列教材的编写得到湖南大学教务处的大力支持,在此表示衷心感谢。

湖南大学《大学数学》教材编写组

2002年9月

目　　录

第一章　随机事件及其概率

我们在客观世界中观察到的各种现象大体上可以分为两类：一类是**确定性现象**，它在一定条件下必然发生或不发生，例如一个标准大气压下，纯水加热到100℃会沸腾，一个半径为 r 的圆的面积为 πr^2，异性电荷之间一定相互吸引等.另一类是**随机现象**，它在一定条件下可能发生也可能不发生，例如相同条件下抛掷一枚硬币，落下后可能正面朝上，可能反面朝上，某厂同一工艺同一生产线生产的同一型号的灯泡，其寿命有长有短，公共汽车站每天某一时段的候车人数有多有少等.

随机现象表面上呈现着偶然性，但实质上却存在着内在的必然规律，通过大量的观察和试验去发现和研究随机现象的这些规律性，是概率论与数理统计学科的主要任务.

第一节　随机事件及其运算

一、随机试验和样本空间

我们把对随机现象所进行的观察、实验或试验等都称为**随机试验**，记为 E.它具有三个特点：(1) 在相同条件下可以重复进行；(2) 试验的结果不止一个且所有可能的结果事先是已知的；(3) 每次试验之前，其结果不能确定.

随机试验中每一个基本的可能结果称为一个**样本点**，记为 ω，而一个随机试验的全体样本点构成的集合称为该随机试验的**样本空间**，记为 Ω.

例 1　抛一枚均匀硬币，观察出现正、反面的情况，这是一个随机试验，记为 E_1. 试验的可能结果有两个：出现正面和反面. 用“正”表示出现正面，“反”表示出现反面，则 E_1 的样本空间 $\Omega_1=\{正,反\}$.

例 2　掷一颗骰子，观察出现的点数也是随机试验，记为 E_2. 用“i”表示“出现 i 点”($i=1,2,3,4,5,6$)，则样本点有 6 个，E_2 的样本空间 $\Omega_2=\{1,2,3,4,5,6\}$.

例 3　记录电话交换台在单位时间内接到的呼叫次数，这个试验记为 E_3. 如果用“k”表示“在单位时间内接到 k 次呼叫”，由于难以规定呼叫数的上界，可以认为每一个非负整数 k 都是一个可能的试验结果，因此 E_3 的样本空间 $\Omega_3=\{0,1,2,3,\cdots\}$.

例 4 从装有红、白两种颜色小球的袋中(红、白小球的数量均大于 2)依次摸出两球,记录小球的颜色,这是一个随机试验,记为 E_4. 若用"(红,白)"表示"第一次摸出红球,第二次摸出白球",则 E_4 的样本空间为 $\Omega_4=\{$(红,白),(白,红),(白,白),(红,红)$\}$.

显然,在一次随机试验中,所有样本点必发生且只发生一个.

二、随机事件

随机试验中可能发生也可能不发生的结果称为一个**随机事件**. 我们将其视为样本空间的子集. 随机事件简称为**事件**,常用英文大写字母 $A,B,\cdots$ 表示.

例 2 中的随机试验 E_2,其样本空间 $\Omega_2=\{1,2,3,4,5,6\}$,则 $A=$"出现偶数点"是一个随机事件,它是由样本点 2,4,6 构成,记为 $A=\{2,4,6\}$,A 发生,当且仅当 A 中的一个样本点出现;同样 $B=$"出现的点数小于 4"也是一个随机事件,它由样本点 1,2,3 构成,记为 $B=\{1,2,3\}$,B 发生,当且仅当 B 中的一个样本点出现. 此外,每一个样本点的单点集 $\{1\},\{2\},\cdots,\{6\}$ 也是一个随机事件,因为它们是随机试验的基本结果,所以常称为**基本事件**. 显然它们是该试验中最简单的随机事件.

我们把每次试验都一定发生的事件称为**必然事件**,用 Ω 表示,而把每次试验一定不发生的事件称为**不可能事件**,记为 $\varnothing$. 例如在随机试验 E_2 中,"点数大于零且小于 8"是必然事件,而"点数大于 10"是不可能事件. 必然事件与不可能事件本质上并没有不确定性,但是作为极端情形,我们还是把它们看作随机事件,于是必然事件是样本空间的全集,而不可能事件是空集.

三、事件的关系与运算

为了通过简单事件去表示和研究复杂事件,需要讨论事件之间的关系和运算.

设随机试验的样本空间为 Ω,而 A,B,C 及 $A_i\ (i=1,2,\cdots)$ 是 Ω 中的事件.

1. 事件的包含与相等

如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生,则称**事件 B 包含事件 A**,或称 A 是 B 的**子事件**,记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称 **A 与 B 相等**,记为 $A=B$.

在例 2 中,若 A 表示"出现 3 点",B 表示"出现奇数点",则 $A\subset B$;若 C 表示"点数能被 3 整除",D 表示"出现 3 或 6 点",则 $C=D$.

易见,对 Ω 中的任意事件 A,都有 $\varnothing\subset A\subset\Omega$.

2. 事件的和

由 A 与 B 的所有样本点组成的事件,称为事件 A 与 B 的**和**(或**并**),记为 A

$\cup B$ 或 $A+B$,即 $A\cup B=\{\omega\in\Omega \mid \omega\in A$ 或 $\omega\in B\}$.

显然,事件 $A\cup B$ 发生等价于事件 A 与 B 至少有一个发生.

事件的和可以推广到有限个或可列个事件的情形.

事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生称为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和,记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$,可列多个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的和,记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

3. 事件的积

既属于 A 又属于 B 的所有样本点组成的事件,称为事件 A 与 B 的**积**(或**交**),记为 $A\cap B$ 或 AB,即 $A\cap B=\{\omega\in\Omega \mid \omega\in A$ 且 $\omega\in B\}$.

事件 $A\cap B$ 发生等价于事件 A 与 B 同时发生.

事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生称为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积,记为 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ 或 $A_1A_2\cdots A_n$,或 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$,可列多个事件 $A_1,\cdots,A_n,\cdots$ 的积,记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

4. 事件的互不相容

如果两个事件 A,B 不能同时发生,即 $AB=\varnothing$,则称事件 A 与 B 是**互不相容事件**(或**互斥事件**).

5. 对立事件

如果两事件 A,B 满足

$$A\cup B=\Omega \text{ 且 } AB=\varnothing,$$

则称 B 为 A 的**对立事件**(或**逆事件**,**补事件**),记为 $B=\overline{A}$. 当然,这时 A 也是 B 的对立事件.

若 A 与 B 互为对立事件,则在一次试验中,A 与 B 必有且仅有一个发生.

6. 事件的差

A 发生而 B 不发生的事件,称为事件 A 与 B 的**差**,记为 $A-B$,即

$$A-B=\{\omega\in\Omega \mid \omega\in A \text{ 且 } \omega\notin B\}$$

由对立事件和两事件的积的定义可知:$A-B=A\overline{B}$.

上述事件的关系和运算与集合的相应关系和运算是一致的,我们列表加以比较.

记号	概　率　论	集　合　论
Ω	样本空间,必然事件	空间(全集)
$\varnothing$	不可能事件	空集
ω	样本点	元素
A	事件	Ω 的子集
$\omega\in A$	事件 A 发生	ω 是集合 A 的元素

续表

记号	概 率 论	集 合 论
$A\subset B$	A 是 B 的子事件	A 是 B 的子集
$A=B$	事件 A、B 相等	集合 A、B 相等
$A\cup B$	事件 A 与 B 中至少有一个发生	集合 A 与 B 的并集
AB	事件 A 与 B 同时发生	集合 A 与 B 的交集
$A-B$	事件 A 发生而 B 不发生	集合 A 与 B 的差集
$\overline{A}$	A 的对立事件	集合 A 对 Ω 的余集
$A\cap B=\varnothing$	事件 A 与 B 互不相容	集合 A 与 B 不相交

集合的运算规则对事件运算同样适用.

(1) 交换律:$A\cup B=B\cup A,A\cap B=B\cap A$;

(2) 结合律:$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C,A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$;

(3) 分配律:$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

(4) 对偶律(德摩根律):

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\qquad \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}.$$

例 5 设 A,B,C 是三个事件,试用 A,B,C 的运算关系表示下列事件:

(1) M_1:A 发生而 B 与 C 都不发生;

(2) M_2:A 与 B 都发生而 C 不发生;

(3) M_3:A,B,C 中恰有一个发生;

(4) M_4:A,B,C 中至少有两个不发生;

(5) M_5:A,B,C 中至少有一个发生.

解 (1) $M_1=A\overline{B}\,\overline{C}=A-B-C$;

(2) $M_2=AB\overline{C}=AB-C$;

(3) A,B,C 中恰有一个发生就是 A 发生而 B,C 不发生,或者 B 发生而 A,C 不发生,或 C 发生而 A,B 不发生,于是

$$M_3=A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C;$$

(4) A,B,C 中至少有两个不发生就是 A,B,C 中恰有两个不发生或 A,B,C 都不发生,故

$$M_4=(A\overline{B}\,\overline{C})\cup(\overline{A}B\overline{C})\cup(\overline{A}\,\overline{B}C)\cup(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}),$$

或

$$M_4=\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{C}\,\overline{A}\cup\overline{A}\,\overline{B};$$

(5) A,B,C 中至少有一个发生,依事件的和的意义可以写成 $A\cup B\cup C$;它

还可以表示为 A,B,C 中恰有一个发生,恰有两个发生,三个都发生的和;它也可以表示为三个都不发生的对立事件,所以

$$
\begin{aligned}
M_5 &= A\cup B\cup C \\
&= A\,\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}\,B\,\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C\cup AB\,\overline{C}\cup A\,\overline{B}C\cup\overline{A}BC\cup ABC. \\
&= \overline{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}}.
\end{aligned}
$$

习题 1-1

1. 董事会有 5 名董事 A,B,C,D,E,想要从中选一名董事长与一名总经理,假定一个人不能同时担任这两个职务,试写出与挑选有关的样本空间,董事 A 被挑选出来的事件如何表示?

2. 一枚硬币抛 3 次,观察出现正反面的情况.

(1) 写出这个试验的样本空间;

(2) 用样本点来表示事件 A:"恰有一次出现正面".

3. 从一批零件中任取 2 个,设事件 A 为"第一个零件为合格品",事件 B 为"第二个零件为合格品",问 $AB,\overline{A},\overline{B},\overline{A}\,\overline{B},A-B,A\cup B$ 及$\overline{AB}$分别表示什么事件?

4. 设 A,B,C 是三个事件,试用 A,B,C 的运算关系表示下列事件:

(1) A,B,C 都发生;

(2) A,B,C 都不发生;

(3) A,B,C 都不发生的对立事件;

(4) A,B,C 不多于两个事件发生;

(5) A,B,C 中至少有两个事件发生.

5. 以 A 表示事件"甲种产品畅销,乙种产品滞销",则其对立事件 $\overline{A}$ 为下列哪一事件?

(1) "甲种产品滞销,乙种产品畅销";

(2) "甲乙两种产品均畅销";

(3) "甲种产品滞销";

(4) "甲种产品滞销或乙种产品畅销".

6. 设一个工人生产了 4 个零件,A_i 表示事件"他生产的第 i 个零件是正品"($i=1,2,3,4$),试用 A_i 表示下列事件:

(1) 没有一个零件是次品;

(2) 至少有一个零件是次品;

(3) 只有一个零件是次品;

(4) 至少有三个零件不是次品.

第二节　概率及其运算性质

随机事件在每次试验中都有可能发生,也有可能不发生,虽然事先不能断定