学习辅导丛书

极大与极小

陈振宣 著

上海科学普及出版社

內 容 提 要

为了勤儉建国，必須儘量节省原材料，要用最少的原料达到預定的要求，这是屬于極大極小的問題。这类問題本来在微积分里才講到，为了使更多的人能够解这类問題，以便在生产中發揮作用，最好能用初等数学来解这类問題。本書从極值的概念談起，举有很多用高中代数、三角、几何来解極大極小值的例題，有实用价值。最后还附有思考題，具有高中数学水平的人都能看懂。对广大职工生产上找窍門，本書有啓發作用。此外，也可作为高中学生的輔助讀物。

总号：076

極 大 与 極 小

著　　者：陈 振 宣
封面設計：林　　禽
出 版 者：上海科学普及出版社
（上海市南昌路47号）
上海市書刊出版業營業許可証出字第085号
發 行 者：新华書店上海發行所
印 刷 者：商务印書館上海印刷厂
上 海 市 印 刷 五 厂

开本：787×1092耗1/32　　印張：1 5/8
字数：30,000　　統一書号：T 70128·18
印数：8,000　　定　价：1 角 6 分
1958年4月第一版　　1958年4月第一次印刷

目　次

引　言

我們在日常生活中和工業上，常常遇到一些变动的量，这些量是不断地变化着，但并不是毫無規律的乱变化，而是按照客观規律变化的。这些客观規律，一旦被我們發現，用数学語言写出来，就是通常数学中所說的这些变量之間的函数关系。例如在一条电路上，如果电阻 R 不变，那么，电路兩端的电压 U 和綫路上的电流 I 之間，就存在着下列函数关系：

$$U=RI$$

（R、U、I 的單位分別是欧姆、伏特、安培）

这一电路供給的电功率 N 也是 I 的函数：

$$N=RI^2 \quad (N\text{ 的單位是瓦特})$$

这种例子是很多的，在講函数的書里講得比較詳細，这里就不細談了。

現在且来看看極大極小的問題。假定有一个函数 $y=f(x)$，x 是自变量，y 是 x 的函数，我們要研究 x 等于什么数值的时候，y 值可以达到極大或極小，什么时候 y 值可以达到最大或最小。这种問題不但是有趣，而且是很有实用价值的。例如制造罐头食品的时候，所用的罐头有半斤装、1 斤装、2 斤装等等。同样是制造 1 斤装的罐头，但却可以做成各种尺寸和样子，我們需要研究的是用最少的洋鉄皮做成 1 斤装的容积，这就是極小的問題。又象要把圓木料鋸成横梁，怎样的矩形截面才是最牢固的，这就

是極大的問題。

中央提出勤儉建国的方針，要我們又多、又快、又好、又省地进行建設，这里面，增产节約是一个重要的环节。为了增产节約，我們就必須研究怎样才能用最少的原材料、最少的劳动力，达到最大的产值。

这是一个極大極小的問題。对于这类問題，平常在微积分中才講到，可是工人和一般干部的文化水平还沒有这样高，因此就必須設法用高中数学范圍內的办法来解答这个問題，这本書就是从这个角度出發写的。下面先从基本概念談起。

什么是函数的極大值、極小值、最大值、最小值

圖1是函数 $y=f(x)$ 在 $x=a$ 和 $x=b$ 之間的圖象。圖中 x_2(或 x_4)点的 y 值，比它鄰近兩边各点的 y 值都大，这一点的函数值就是極大。說得全面一些就是函数 $f(x)$ 在点 x_2、x_4 有極大值。假定 δ 是一个很小的大于零的数，我們总可以找到一个数 Δx，使 $|\Delta x|<\delta$，那么当

$$f(c+\Delta x)\leqslant f(c)$$

时，函数 $f(x)$ 在点 c 有極大值。極大值常常是圖象上波峰的頂点，即凸起部分。函数的極大值用 $y_{\max}$ 来表示。

圖1中 x_1 (或 x_3、x_5) 点，它的 y 值比它鄰近兩边各点的 y 值都小，这一点的函数值就是極小，說得全面一些就是函数 $f(x)$ 在点 x_1、x_3、x_5 有極小值。假定 δ 是一个很小的大于零的数，我們总可以找到一个数 Δx，使 $|\Delta x|<\delta$，那么，当

$$f(c+\Delta x)\geqslant f(c)$$

时，函数 $f(x)$ 在点 c 有極小值。極小值常常是圖象上波谷的底端，即凹下部分。函数的極小值用 $y_{\min}$ 来表示。

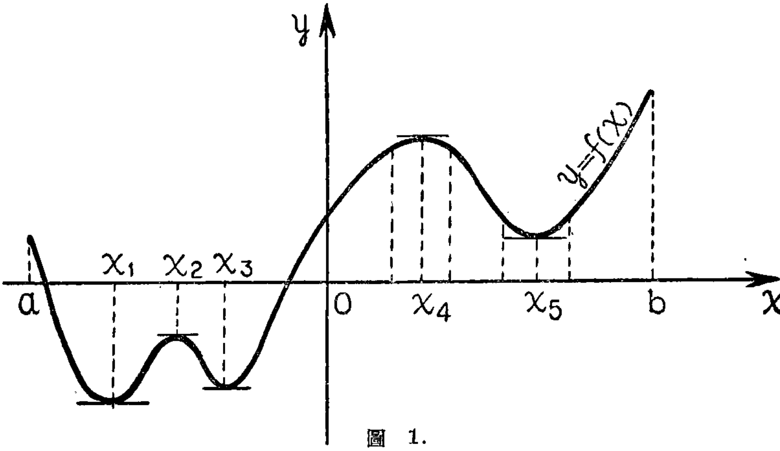

圖 1.

理解这兩概念时应注意以下各点：

1. 这里所指的鄰近諸点，就是当 $|\Delta x|<\delta$ 时的 $(c+\Delta x)$ 諸点，就是在区間 $(c-\delta,\ c+\delta)$ 內的一切点，这些点不能离 c 点过远。δ 可以充分小，但不能太大。例如圖 1 上函数 $f(x)$ 在点 x_2 有極大值，但在离 x_2 适当远的点，例如原点，$f(0)>f(x_2)$，然而 $f(x_2)$ 仍不失为 $f(x)$ 的極大值。这里所說的函数的極大值，是就区間 $(c-\delta,\ c+\delta)$ 的局部区域来考察的，所以又叫局部極大值。極小值与此类似不贅。

2. 因为極大極小值是就离开 c 点很近的局部区域来考察的，所以有时某一局部的極大值，可以比另一局部的極小值小，例如圖 1 中，函数 $f(x)$ 在点 x_2 有極大值，在点 x_5 有極小值，但 $f(x_2)$ 比 $f(x_5)$ 小，即 $f(x_2)<f(x_5)$。

3. 函数有極大、極小值之点，有共同的特点。在这些点作函数圖象的切綫，一般都与 x 軸平行；例外情況，下面再說。例如圖 1 中在点 $[x_1, f(x_1)]$, $[x_2, f(x_2)]$, $[x_3, f(x_3)]$, …的切綫均与 x 軸平行，即有水平切綫。这一特点在数学分析中是有証明的。基于这种原因，我們常把極大極小值統称为極值。

在函数有極值之点的切綫，并非都和 x 軸平行。滿足上述定义的極值，还有象圖 2, 3 中的特殊情况：

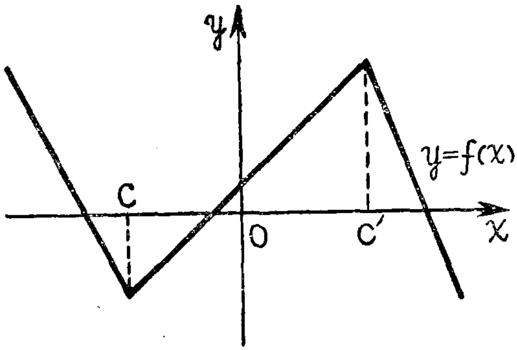

圖 2.

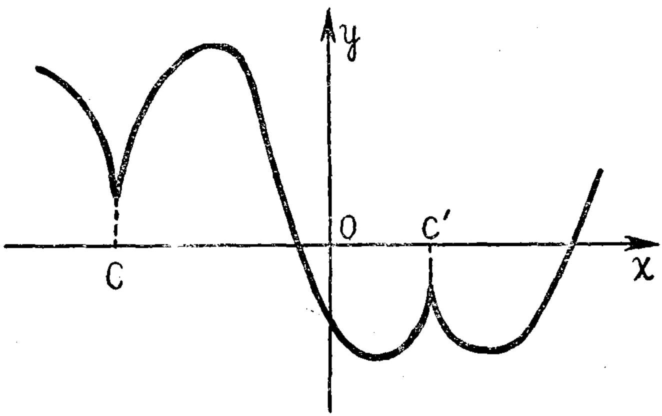

圖 3.

在圖 2 中，$f(x)$ 在点 c, c' 分别有極小与極大値，但函数 $f(x)$ 的圖象，在 $[c, f(c)]$ 和 $[c', f(c')]$ 两点画不出切綫。在圖 3 中，$f(x)$ 在点 c, c' 分别有極大与極小値，而函数 $f(x)$ 的圖象，在 $[c, f(c)]$ 和 $[c', f(c')]$ 两点的切綫，却与 y 軸平行。这两种特殊情况在初等数学里暫时不会碰到，只要了解一下就可以了。

在弄清楚極大極小値的意义后，最大値、最小値的意义就不难理解了。

如果函数 $f(x)$ 在点 c 的値 $f(c)$，不小于 $f(x)$ 在閉区間 $[a, b]$ 上的一切点的値，即 $f(c) \geqslant f(x)$；則 $f(x)$ 在点 c 有最大値，其最大値即为 $f(c)$。

如果函数 $f(x)$，在点 c 的値 $f(c)$，不大于 $f(x)$ 在閉区間 $[a, b]$ 上的一切点的値，即 $f(c) \leqslant f(x)$，則 $f(x)$ 在点 c 有最小値，其最小値即为 $f(c)$。

显然，函数 $f(x)$ 在某一点的極大値未必就是函数的最大値。例如圖 1 中 $f(x_2)$，$f(x_4)$ 并不是函数 $f(x)$ 在区間 $[a, b]$ 上的最大値。但是如果某一点是函数在开区間 (a, b) 內的最大値，那么，这一点也是它鄰近范圍內函数 $f(x)$ 的極大値。

最大、最小値与極大、極小値的主要区别在于：

1. 一般說来，函数 $f(x)$ 的極大、極小値，是就 c 点的鄰近范圍而言的，有局部性；而 $f(x)$ 的最大、最小値是就整个区間全面考虑的。

2. 函数 $f(x)$ 的最大、最小値，可以是区間一端端点的函数値，例如圖 1 中 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 区間的最大値是 $f(b)$。但是区間的端点，不能是 $f(x)$ 的極大、極小値。

3. 如果函数 $f(x)$ 在 c 点(但 $a<c<b$)有最大値或最小値，

那么，这个值 $f(c)$ 就是函数 $f(x)$ 在 c 点的極大值或極小值。

所以求函数 $f(x)$ 在区間 $[a, b]$ 上的最大、最小值的步驟如下：

1）找出函数在区間内的一切極大、極小值。

2）將这些極值和函数在区間 $[a, b]$ 兩端的值 $f(a)$、$f(b)$ 比較，取出其中最大的（或最小的）一个值，就是函数在区間 $[a, b]$ 内的最大值（或最小值）。

当然，这里所指的極值是包括上面所說的特殊情况的。因而研究最大、最小值的問題均可归納为求極大、極小值的問題。

研究函数極大、極小值的初等工具

1．代数法

用代数方法研究函数的極大、極小值，在初等数学中是比較完备的一种，它的理論根据可以归納为下面的四条定理。为了更好地理解定理的精神实質，在証明之前，先插入一些說明性質的例題。

定理 1． 函数 $y=f(x)=ax^2+bx+c$ 在区間 $(-\infty, +\infty)$ 上的極值为：

（i）$a>0$ 时，$f(x)$ 在点 $\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$ 有極小值，$y_{\min}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$；

（ii）$a<0$ 时，$f(x)$ 在点 $\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$ 有極大值，$y_{\max}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$。

这一定理是一元二次函数（即二次三項式）討論中的重要結論之一。从下列簡單的例子，可以看出定理的精神实質。

例： 求函数 $y=f(x)=x^2-4x+7$ 的極小值；

求函数 $z=\varphi(x)=-2x^2+6x+16$ 的極大值。

解：

$$y=f(x)=x^2-4x+7$$
$$=x^2-4x+4+3$$
$$=(x-2)^2+3$$

求極大極小值时，x、y 不能是虛数。

当 x 为实数时，$(x-2)^2\geqslant 0$。

$$\therefore\quad y=(x-2)^2+3\geqslant 3。$$

$\therefore$ 当 $x=2$ 时，$f(x)$ 有極小值，$y_{\min}=3$。

运用定理 1（i）可以直接得到这一結論，讀者可自試之。

又
$$z=\varphi(x)=-2x^2+6x+16$$
$$=-2\left[x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]+2\left(\frac{3}{2}\right)^2+16$$
$$=-2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+20\frac{1}{2}。$$

$\because$ x 为实数时，$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2\geqslant 0$,

$\therefore$ $-2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2\leqslant 0$。$z=-2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+20\frac{1}{2}\leqslant 20\frac{1}{2}$

$\therefore$ 当 $x=\frac{3}{2}$时，$\varphi(x)$ 有極大值，$z_{\max}=20\frac{1}{2}$。

运用定理 1 (ii) 可直接得到同样的結果。

定理 1 可以按照上面相似的办法来証明

証：

$$y=f(x)=ax^2+bx+c$$
$$=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c$$
$$=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)+c-\frac{b^2}{4a}$$
$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$$

在点$\left(-\frac{b}{2a}\right)$的近傍，$x=-\frac{b}{2a}+\Delta x$（$|\Delta x|<\delta$, δ 是大于零的很小的数）。

代入上式 $$f\left(-\frac{b}{2a}+\Delta x\right)=a(\Delta x)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$$

（i）$\because$ $a>0$，且 $(\Delta x)^2\geqslant 0$，$\therefore$ $a(\Delta x)^2\geqslant 0$

又 $$f\left(-\frac{b}{2a}\right)=a\left(-\frac{b}{2a}+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4ac-b^2}{4a},$$

$$\therefore\ f\left(-\frac{b}{2a}+\Delta x\right)=a(\Delta x)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}\geqslant\frac{4ac-b^2}{4a}=f\left(-\frac{b}{2a}\right)$$

故 $f(x)$ 在点$\left(-\frac{b}{2a}\right)$有極小值，$y_{\min}=f\left(-\frac{b}{2a}\right)=\frac{4ac-b^2}{4a}$

(ii) $\because$ $a<0$，且$(\Delta x)^2\geqslant 0$，$\therefore$ $a(\Delta x)^2\leqslant 0$

又 $$f\left(-\frac{b}{2a}\right)=\frac{4ac-b^2}{4a},$$

$$\therefore\ f\left(-\frac{b}{2a}+\Delta x\right)=a(\Delta x)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}\leqslant\frac{4ac-b^2}{4a}=f\left(-\frac{b}{2a}\right)$$

故 $f(x)$ 在点$\left(-\frac{b}{2a}\right)$有極大值，$y_{\max}=f\left(-\frac{b}{2a}\right)=\frac{4ac-b^2}{4a}$。

因为一元二次函数是最常見的函数之一，所以定理 1 是应用得最广泛的定理之一，也是最基本的定理之一。

定理 2. 求函数 $y=f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$的極值。

設 $(b'^2-4a'c')y^2-2(bb'-2ac'-2a'c)y+b^2-4ac$ $=(b'^2-4a'c')[y-y_1][y-y_2]$，其中 $y_1<y_2$；那么，

（i）$b'^2-4a'c'>0$ 时，$y_{\max}=y_1$，$y_{\min}=y_2$。

（ii）$b'^2-4a'c'<0$ 时，$y_{\min}=y_1$，$y_{\max}=y_2$。

(iii) $b'^2-4a'c'=0$，$bb'-2ac'-2a'c>0$ 时，

$$y_{\max}=\frac{b^2-4ac}{2(bb'-2ac'-2a'c)};$$

$b'^2-4a'c'=0$，$bb'-2ac'-2a'c<0$ 时，

$$y_{\min}=\frac{b^2-4ac}{2(bb'-2ac'-2a'c)}。$$

下面先举两个例子看一下。

例 1： 求函数 $y=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$ 的極值。

解： $\because$ $$y=\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$$

$\therefore$ $$yx^2+yx+y=x^2-x+1$$

即 $$(y-1)x^2+(y+1)x+y-1=0。$$

$\because$ 当 y 有極值时 x 必須为实数

$\therefore$ $\Delta=(y+1)^2-4(y-1)^2\geqslant 0$ （Δ 即判别式 b^2-4ac）

$$(y+1+2y-2)(y+1-2y+2)\geqslant 0$$

$$(3y-1)(3-y)\geqslant 0$$

$\therefore$ $$\frac{1}{3}\leqslant y\leqslant 3,$$

即 $$y_{\min}=\frac{1}{3},\quad y_{\max}=3。$$

运用定理 2 可得到与此相同的結果。

例 2. 求函数 $y=\dfrac{4x+3}{x^2+2x+1}$ 的極值。

解： $$y=\frac{4x+3}{x^2+2x+1}$$

$\therefore$ $$yx^2+2yx+y=4x+3,$$

即 $$yx^2+2(y-2)x+y-3=0。$$

$\because$ 当 y 有極值时 x 必須为实数，

$$\therefore \qquad \Delta=4(y-2)^2-4y(y-3)\geqslant 0,$$

$$4y^2-16y+16-4y^2+12y\geqslant 0,$$

即
$$-y+4\geqslant 0$$

故
$$y\leqslant 4$$

$$\therefore \quad y_{\max}=4。$$

运用定理 2 可得同样結果。

用和上述例子同样的方法，来証明定理 2 。

証： $\because \qquad y=\dfrac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$

$$\therefore \qquad (a-a'y)x^2+(b-b'y)x+c-c'y=0。$$

$\because$ 当 y 有極值时，x 必須为实数，

$$\therefore \qquad \Delta=(b-b'y)^2-4(a-a'y)(c-c'y)\geqslant 0$$

$$\left[\text{当 } \Delta=0 \text{ 时，} \quad x=\frac{b'y-b\pm\sqrt{\Delta}}{2(a-a'y)}=\frac{b'y-b}{2(a-a'y)}\right]。$$

即
$$(b'^2-4a'c')y^2-2(bb'-2ac'-2a'c)y+b^2-4ac\geqslant 0 \qquad (\mathrm{A})$$

为了簡單化起見，可以把上式分解成下式：

$$(b'^2-4a'c')(y-y_1)(y-y_2)\geqslant 0$$

其中 y_1, y_2 代表已知数，且 $y_1<y_2$。

(i) $b'^2-4a'c'>0$ 时，$(y-y_1)(y-y_2)\geqslant 0$，

$$\therefore \qquad y\geqslant y_2, \quad y\leqslant y_1。$$

即在点 $\left\{\dfrac{b'y_2-b}{2(a-a'y_2)}\right\}$ 的近傍，$y=f(x)\geqslant f\left\{\dfrac{b'y_2-b}{2(a-a'y_2)}\right\}=y_2$；

在点 $\left\{\dfrac{b'y_1-b}{2(a-a'y_1)}\right\}$ 的近傍，$y=f(x)\leqslant f\left\{\dfrac{b'y_1-b}{2(a-a'y_1)}\right\}=y_1$。

$$\therefore \qquad y_{\min}=y_2, \quad y_{\max}=y_1。$$

(ii) $b'^2-4a'c'<0$ 时，$(y-y_1)(y-y_2)\leqslant 0$，

$$\therefore \qquad y \geqslant y_1, \quad y \leqslant y_2。$$

同理可得: $\qquad y_{\min}=y_1, \quad y_{\max}=y_2。$

(iii) $b'^2-4a'c'=0$ 时, (A)变为

$$-2(bb'-2ac'-2a'c)y+b^2-4ac \geqslant 0。$$

(1)若 $bb'-2ac'-2a'c>0$, 则 $y \leqslant \dfrac{b^2-4ac}{2(bb'-2ac'-2a'c)}$,

$$\therefore \qquad y_{\max}=\frac{b^2-4ac}{2(bb'-2ac'-2a'c)};$$

(2)若 $bb'-2ac'-2a'c<0$, 则 $y \geqslant \dfrac{b^2-4ac}{2(bb'-2ac'-2a'c)}$,

$$\therefore \qquad y_{\min}=\frac{b^2-4ac}{2(bb'-2ac'-2a'c)}。$$

定理 2 可以不必記忆, 主要是掌握它的証明方法。这定理的应用对研究分子分母为二次或一次的有理函数是特别有效的, 它的解法非常簡單, 比用微分法还簡單, 希望很好掌握, 对解决实际問題很有帮助。

定理 3. 如果有 n 个正数 $x_1, x_2, \cdots x_n$, 另有 n 个任意有理数 $m_1, m_2, \cdots m_n$, 而 $x_1^{m_1}x_2^{m_2}\cdots x_n^{m_n}=$常量 P; 那么当

$$\frac{x_1}{m_1}=\frac{x_2}{m_2}=\cdots=\frac{x_n}{m_n} \text{成立时, 它們的和}$$

$$y=x_1+x_2+\cdots+x_n$$

有最小值。

这一定理的証明比較难, 先看一下特例, 或可以掌握一般証明的关鍵。下面先研究 $n=2$ 的情况:

設 x_1, x_2 是正数, m_1, m_2 是自然数, $x_1^{m_1}\cdot x_2^{m_2}=$常数 P, 这是定理 3 前面一部分的假設。現在根据这个假定来进行演算。

假定 K 是一个常数，它和 P, m_1, m_2 之間的关系是

$$K=\sqrt[m_1+m_2]{\frac{P}{m_1^{m_1}m_2^{m_2}}},\quad \text{即}\quad K^{m_1+m_2}=\frac{P}{m_1^{m_1}m_2^{m_2}}\text{。}$$

在不等式里有这样一个定理：

如果有 n 个正数，它們的乘积是 1，那么，这 n 个数之和必不小于 n。用数学式子表示就是：

$$x_1,\ x_2\cdots x_n \text{ 是 } n \text{ 个正数，}$$

設
$$x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdots x_n=1, \tag{1}$$

則
$$x_1+x_2+\cdots+x_n\geqslant n\text{。}$$

这个不等式，当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时，等式成立

即
$$x_1+x_2+\cdots+x_n=n\text{。}$$

这个不等式定理，在这里很有用处。假定不等式里的

$$x_1,\ x_2\cdots \text{分别是}\frac{x_1}{m_1K},\ \cdots\frac{x_2}{m_2K},\ \cdots$$

前一个数有 m_1 个，后一个数有 m_2 个，即不等式定理里的 n，在这里是 m_1+m_2，写成式子是

$$\underbrace{\frac{x_1}{m_1K}\cdot\frac{x_1}{m_1K}\cdots\frac{x_1}{m_1K}}_{m_1\text{ 个}}\times\underbrace{\frac{x_2}{m_2K}\cdot\frac{x_2}{m_2K}\cdots\frac{x_2}{m_2K}}_{m_2\text{ 个}}$$

$$=\frac{x_1^{m_1}x_2^{m_2}}{m_1^{m_1}m_2^{m_2}\cdot K^{(m_1+m_2)}}=\frac{P}{m_1^{m_1}m_2^{m_2}\cdot\dfrac{P}{m_1^{m_1}\cdot m_2^{m_2}}}=\frac{P}{P}=1,$$

$$\therefore\underbrace{\frac{x_1}{m_1K}+\frac{x_1}{m_1K}+\cdots+\frac{x_1}{m_1K}}_{m_1\text{ 个}}+\underbrace{\frac{x_2}{m_2K}+\frac{x_2}{m_2K}+\cdots+\frac{x_2}{m_2K}}_{m_2\text{ 个}}$$

$$=m_1\times\frac{x_1}{m_1K}+m_2\times\frac{x_2}{m_2K}$$

$$=\frac{1}{K}(x_1+x_2)\geqslant(m_1+m_2)$$

即 $y=x_1+x_2\geqslant(m_1+m_2)K=(m_1+m_2)\sqrt[(m_1+m_2)]{\frac{P}{m_1^{m_1}m_2^{m_2}}}$,

按照不等式定理，当$\frac{x_1}{m_1}=\frac{x_2}{m_2}$时，等式成立，即 y 有最小值，最小值为：$(m_1+m_2)\sqrt[(m_1+m_2)]{\frac{P}{m_1^{m_1}m_2^{m_2}}}$。

若 $m_1=m_2=1$，則此特例就变成大家所熟悉的了，即当 $x_1>0$, $x_2>0$，且 $x_1x_2=1$ 时，$x_1+x_2\geqslant2$。写成常見的形式就是：

$$x+\frac{1}{x}\geqslant2,\quad (其中\ x>0)。$$

但是上面所講是指 m_1, m_2 是自然数而言的，可是定理 3 中假定 m_1, m_2 是有理数，所以还要証明一下 m_1, m_2 是有理数时，这个定理是否适用。有理数一定可以化成分数，所以可設 $m_1=\frac{P_1}{Q_1}$, $m_2=\frac{P_2}{Q_2}$。又假定 N 是 Q_1, Q_2 的最小公倍数，那么

$$N=Q_1d_1=Q_2d_2,$$

即
$$Q_1=\frac{N}{d_1},\quad Q_2=\frac{N}{d_2},$$

$$\therefore\qquad m_1=\frac{P_1}{Q_1}=\frac{P_1d_1}{N},\quad m_2=\frac{P_2d_2}{N};$$

$$\because\qquad x_1^{m_1}\cdot x_2^{m_2}=x_1^{\frac{P_1d_1}{N}}\cdot x_2^{\frac{P_2d_2}{N}}$$

$$=\sqrt[N]{x_1^{P_1d_1}\cdot x_2^{P_2d_2}}=P\ (假設)$$

$$\therefore\qquad x_1^{P_1d_1}\cdot x_2^{P_2d_2}=P^N\ (常量)。$$

P_1d_1、P_2d_2 是自然数，所以可应用上面办法証明。这样就把 m_1, m_2 推广到有理数了。

这样我們就証明 $n=2$ 时的特例，一般証明的精神与此是完

全类似的，下面是它的一般証明。

証：設 $m_1, m_2, \cdots m_n$ 是自然数，

$$K=\sqrt[(m_1+m_2+\cdots+m_n)]{\frac{P}{m_1^{m_1}m_2^{m_2}\cdots m_n^{m_n}}}。$$

$$\because \quad \underbrace{\frac{x_1}{m_1K}\cdot\frac{x_1}{m_1K}\cdots\frac{x_1}{m_1K}}_{m_1\text{ 个}}\times\underbrace{\frac{x_2}{m_2K}\cdot\frac{x_2}{m_2K}\cdots\frac{x_2}{m_2K}}_{m_2\text{ 个}}\cdots$$

$$\cdots\underbrace{\frac{x_n}{m_nK}\cdot\frac{x_n}{m_nK}\cdots\frac{x_n}{m_nK}}_{m_n\text{ 个}}$$

$$=\frac{x_1^{m_1}x_2^{m_2}\cdots x_n^{m_n}}{m_1^{m_1}m_2^{m_2}\cdots m_n^{m_n}\times K^{m_1+m_2+\cdots+m_n}}$$

$$=\frac{P}{m_1^{m_1}m_2^{m_2}\cdots m_n^{m_n}\cdot\frac{P}{m_1^{m_1}m_2^{m_2}\cdots m_n^{m_n}}}=1,$$

$$\therefore \quad y=m_1\cdot\frac{x_1}{m_1}+m_2\frac{x_2}{m_2}+\cdots+m_n\frac{x_n}{m_n}$$

$$=x_1+x_2+\cdots+x_n\geqslant(m_1+m_2+\cdots+m_n)K。$$

当 $\frac{x_1}{m_1}=\frac{x_2}{m_2}=\cdots=\frac{x_n}{m_n}$ 时，等号成立，此时 y 有最小值。

y 的最小值为：$(m_1+m_2+\cdots+m_n)\sqrt[(m_1+m_2+\cdots+m_n)]{\frac{P}{m_1^{m_1}m_2^{m_2}\cdots m_n^{m_n}}}$。

設 $m_1=\frac{P_1}{Q_1}$，$m_2=\frac{P_2}{Q_2}$，$\cdots m_n=\frac{P_n}{Q_n}$ 为任意有理数，N 为分母的最小公倍数，$N=Q_1d_1=Q_2d_2=\cdots=Q_nd_n$。

$$\because \quad x_1^{m_1}x_2^{m_2}\cdots x_n^{m_n}=\sqrt[N]{x_1^{P_1d_1}x_2^{P_2d_2}\cdots x_n^{P_nd_n}}=P$$

$$\therefore \quad x_1^{P_1d_1}\cdot x_2^{P_2d_2}\cdots x_n^{P_nd_n}=P^N\ (\text{常量})$$

而 P_1d_1，P_2d_2，$\cdots P_nd_n$ 为自然数，故可应用前半部的証明得：