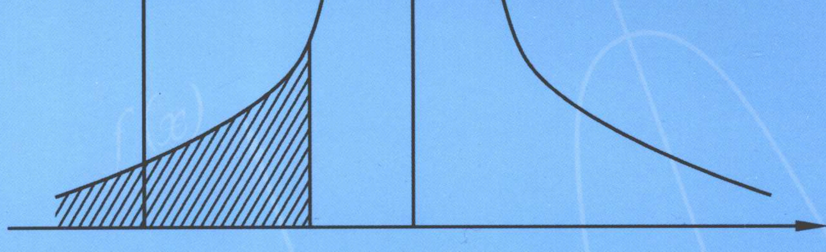
概率论与数理统计

马国顺 冯德成 周玉兰 编著



蘭州大學出版社

概率论与数理统计

马国顺　冯德成　周玉兰　编著

兰州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/马国顺,冯德成,周玉兰编著.—兰州:兰州大学出版社,2009.8

ISBN 978-7-311-03451-1

Ⅰ.概… Ⅱ.①马…②冯…③周… Ⅲ.①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ.021

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第144974号

策划编辑　张爱民
责任编辑　郝可伟
封面设计　管军伟

书　　名	概率论与数理统计
作　　者	马国顺　冯德成　周玉兰　编著
出版发行	兰州大学出版社　(地址:兰州市天水南路222号　730000)
电　　话	0931-8912613(总编办公室)　0931-8617156(营销中心) 0931-8914298(读者服务部)
网　　址	http://www.onbook.com.cn
电子信箱	press@onbook.com.cn
印　　刷	兰州德辉印刷有限责任公司
开　　本	787×1092　1/16
印　　张	12.25
字　　数	283千
版　　次	2009年8月第1版
印　　次	2009年8月第1次印刷
书　　号	ISBN 978-7-311-03451-1
定　　价	22.00元

前 言

概率论与数理统计是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科。由于概率统计的理论与方法的应用非常广泛,几乎遍及所有科学技术领域、工农业生产和国民经济的各个部门,所以该课程是所有的数学课程中和生活实际结合最为紧密的课程之一。

本书的目的是比较系统地介绍概率论与数理统计的主要内容和研究方法,帮助读者全面了解概率统计的基本概念、基本原理及基本思想,提高运用概率统计的基本方法解决实际问题的能力。本书的主要特点是:

(1)注重概念,深入浅出地引导读者入门,使读者掌握概率统计的思维方法。

(2)结合实际,引导读者正确掌握概率统计的应用技术。一方面,我们对概率统计的很多原理及方法都是从生活中的实例或从概率论历史上的经典问题引入,使读者从对诸多事物的“感性认识”转化成对事物“根本的探究”,培养读者的探究精神与学习动力。另一方面,在学习有关原理及方法后,引导读者在现实生活中找原型,使读者正确掌握运用概率统计工具解决实际问题的方法。

(3)本书的最后一章概括地介绍了随机过程的基本概念和研究方法,重点介绍了马尔可夫链,为读者继续学习概率统计的后继课程提供接口。

本书的完成得到了西北师范大学精品课程建设项目的支持,同时也得到了西北师范大学数学与信息科学学院各位领导和各位老师的热情关心与支持,我们的研究生也做了绘图、校对等许多繁杂的工作,在此一并致谢。

本书的第一、二、三、四及第十章由马国顺编写,第五、六、七、八章由冯德成编写,第九章由周玉兰编写,全书由马国顺与冯德成共同负责统稿。

这本书是我们在参阅了大量的著作的基础上,结合我们十几年来的教学心得和体会撰写的,由于我们水平有限,疏漏和不妥在所难免,期待广大同行和读者不吝指正。

编者

2009 年 3 月于西北师范大学

目 录

第一章　事件与概率

§1.1　随机现象与随机试验

一、随机试验与样本空间

在自然界里，在生产实践和科学实验中，人们观察到的现象大体可归结为两种类型．一类是可事先预知其结果的，即在准确地重复某些条件时，它的结果总是肯定的；或是根据它过去的状态，在相同的条件下完全可以预言将来的发展．我们把这一类现象称为确定性现象或必然现象．例如在没有外力作用的条件下，做匀速直线运动的物体必然继续做匀速直线运动．又如在一个标准大气压下，水加热到 100℃ 时必然会沸腾等等．但人们逐渐发现还有另一类型的现象存在，它是事先不可预言的，即在相同的条件下，未来的发展事前不能完全肯定，这一类型的现象我们称之为随机现象．例如抛掷一枚匀质硬币，结果可能是正面朝上，也可能是反面朝上；新生的婴儿可能是男孩或女孩；炮弹的落点位置等等，现实生活中这样的例子举不胜举．

概率论与数理统计就是研究随机现象统计规律性的一门数学学科．

在概率论中，我们把实现一组条件称为一次试验，记为 E．

若某试验 E 满足：

(1) 试验可以在相同的条件下重复进行；

(2) 试验的所有可能的结果是明确可知的，且不止一个；

(3) 每次试验仅能有一个结果出现，但试验前无法预知．

则称 E 为一个随机试验．

下面举几个这方面的例子．

E_1：掷两枚匀质硬币，用 H 表示出现反面，T 表示出现正面，则该试验的所有结果为：

$$(H,H),(H,T),(T,H),(T,T).$$

E_2：记录电话交换台在单位时间内接到的呼叫次数，则所有可能的结果为：

$$0,1,2,\cdots,n,\cdots.$$

E_3：记录炮弹的落点位置，设要命中的目标坐标为 (x_0,y_0)，则炮弹的实际落点范围为：

$$\{(x,y):(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqslant r^2\}.$$

E_4:10 件产品中有 3 件是次品,从中一件接一件地选取(已取出的不放回),直到取出第三件次品为止,检点从这批产品中取出的产品的总数,则其所有可能的结果为:

$$3,4,5,6,7,8,9,10.$$

今后所提到的试验,如无特别说明都指随机试验.进行一个试验总有一个需要观察的目的,根据这个目的,试验被观察到有多种不同的可能结果.

我们把随机现象的表现,也就是随机试验的结果称为事件.例如,在试验中,"两枚硬币反面都朝上",即(H,H)是一个事件,而"两枚硬币至少有一枚正面朝上"也是一个事件,即$\{(H,T),(T,H),(T,T)\}$,很显然,这一结果可以划分为(H,T),(T,H),(T,T)三种结果.

我们把在一定条件下不可能再分的结果,称为基本事件.今后我们用$e_i(i=1,2,3,\cdots)$来表示基本事件.在一个试验E中,基本事件是最小单元,事件均由基本事件构成.例如,掷一枚均匀的骰子,其基本事件有$e_1=1,\cdots,e_6=6$.

在每次随机试验中一定会出现的事件称为必然事件,在任何一次试验中都不会出现的事件称为不可能事件.而把可能出现、也可能不出现的事件称为随机事件.例如,两次射击"至多命中目标两次"是必然事件,而"命中目标三次"是不可能事件,"第一次命中"就是一个随机事件.

今后,我们用Ω表示必然事件,用ϕ表示不可能事件.为了便于研究,我们将随机试验E的所有可能的结果组成的集合称为试验E的样本空间,记为Ω.Ω的元素亦即试验E的基本事件,称为样本点.即$\Omega=\{e_1,e_2,\cdots\}$.

二、事件之间的关系与运算

在概率论中,当涉及随机试验的时候,实际上并不关心它在技术上的特点,而只关心在此试验中可能观察到哪些事件,以及在每一次试验中究竟出现了什么事件.这样,与一个随机试验相联系的是一个事件的集合.为以后研究的需要,我们在此事件的集合中,定义事件之间的各种关系及运算.而注意到事件的表示与集合论中集合的表示完全平行,所以我们比照集合论中集合的关系来讨论事件的关系.

定义 1.1 若事件A发生必然导致事件B发生,则称事件A包含于事件B,记为$A\subset B$.

显然,对于任意事件A,都有$A\subset\Omega$;此外,我们规定,$\phi\subset A$.

定义 1.2 对于事件A与B,若$A\subset B$,且$B\subset A$,则称A与B相等,记为$A=B$.

定义 1.3 事件A与B中至少有一个发生而组成的新事件C称为A与B的和(或并)事件.即$C=A+B$(或$C=A\cup B$).

例如,在掷一枚骰子的试验中,记A为"出现偶数点",即$A=\{2,4,6\}$,记C为"出现的点数能被3整除",即$C=\{3,6\}$,则$A+C$表示"出现点数为2,3,4或6",记为$A+C=\{2,3,4,6\}$.

显然$A\cup\phi=A$,$A\cup\Omega=\Omega$.此外,若$A\subset B$,则$A\cup B=B$.

定义 1.4 由事件A与B同时发生而组成的新事件C称为A与B的积(或交)事件,记为$C=AB$(或$A\cap B$).

例如掷骰子的试验中，记A为"出现偶数点"，即$A=\{2,4,6\}$，记B为"出现奇数点"，即$B=\{1,3,5\}$，令$C=\{3,6\}$，则$A\cap B=\phi$，$A\cap C=\{6\}$，$B\cap C=\{3\}$.

显然对于任意事件A，有$A\cap\phi=\phi$，$A\cap\Omega=A$. 若$A\subset B$，则$A\cap B=A$.

定义1.5　若事件A与B不能同时发生，则称A与B互不相容（或称A与B互斥），记为$AB=\phi$.

例如在上述掷骰子的试验中，事件A与B就是互不相容的一对事件.

定义1.6　如果事件A发生，则事件B一定不发生，且在一次试验中两者必发生其一，则称B为A的逆事件，记为$\overline{A}=B$.

显然，若B为A的逆事件，则A也是B的逆事件，此时，我们称事件A与事件B互为对立事件. 将定义1.6用数学语言表示，即是

对于事件A、B，若$A+B=\Omega$且$AB=\phi$，则$\overline{A}=B$.

在上述掷骰子的试验中，事件A与B就是对立事件.

定义1.7　由事件A发生但事件B不发生而组成的新事件C称为A与B的差事件，记为$C=A-B$.

由差事件的定义可知$A-B$就是既要求A发生，同时又要求B不发生，所以，我们有$A-B=A\overline{B}$，同时由文氏图（图1.1）可以看出$A-B$又等于$A-AB$，所以差事件有下列等价表示：

$$A-B=A\overline{B}=A-AB.$$

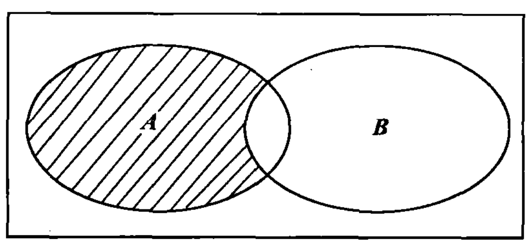


图1.1

和集合论完全平行地，我们下面给出事件的运算律

1. 交换律

$$A+B=B+A, AB=BA$$

2. 结合律

$$A+(B+C)=(A+B)+C, (AB)C=A(BC)$$

3. 分配律

$$A(B+C)=AB+AC, (B+C)A=BA+CA$$

4. De Morgen 律（对偶律）

$$\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}, \overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$$

这些性质的证明都很简单，作为例子，我们证明$\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}$. 事实上，由于事件$A+B$表示事件"$A$与$B$至少出现一个"，所以如果它的对立事件$\overline{A+B}$出现，则$A$与$B$都不出现，即出现事件$\overline{A}\,\overline{B}$，这样$\overline{A+B}\subset\overline{A}\,\overline{B}$. 反过来，由于事件$\overline{A}\,\overline{B}$表示$A$与$B$都不出现，所以若$\overline{A}\,\overline{B}$出现，则$A+B$的对立事件$\overline{A+B}$必出现，从而$\overline{A}\,\overline{B}\subset\overline{A+B}$. 于是$\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}$.

从以上的讨论和表示我们发现,事件间的关系及运算与集合论中集合的关系和运算是完全相似的,而且这种相似在建立概率论的严格数学基础时非常重要. 不过,我们应该注意另一点,就是要学会用概率论的语言来解释这些关系及运算,并且会用这些运算关系来表示一些事件.

例 1 设 A、B、C 为三个事件,则

(1)A、B 发生但 C 不发生可以表示为:

$$AB\overline{C} \text{ 或 } AB - C;$$

(2)A、B、C 恰有两个发生可以表示为:

$$AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC;$$

(3)A、B、C 至少有两个发生可表示为:

$$AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC + ABC;$$

(4)A、B、C 至少有一个发生可以表示为:

$$A + B + C$$

或

$$A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC + ABC.$$

§1.2 概率的定义

随机事件在一次试验中虽然可能出现,也可能不出现,但是,按问题的性质或在大量重复试验中,可以发现,它出现可能性的大小是能计量的. 随机事件的概率就是用来描述随机事件出现的可能性大小的一个数值. 概率是概率论中最基本的概念之一,需要从不同的角度去描述它. 本节我们讨论概率的定义,并由此推导出随机事件概率的一些常用性质.

一、概率的统计定义

概率的统计定义,就是从寻求事件发生可能性大小的统计规律的意义下,以频率描述概率. 为此,我们首先引入频率,它描述事件发生的频繁程度,进而引出表征事件在一次试验中发生的可能性大小的度量 —— 概率.

在相同的条件下,进行了 n 次试验,在这 n 次试验中,事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的频数. 比值 $\frac{n_A}{n}$ 称为事件 A 发生的频率,并记为 $f_n(A)$. 即有 $f_n(A) = \frac{n_A}{n}$.

显然,频率具有下列基本性质:

(1)$f_n(A) \geqslant 0$(非负性);

(2)$f_n(\Omega) = 1$(规范性);

(3) 若事件 A、B 互不相容,则 $f_n(A + B) = f_n(A) + f_n(B)$(可加性).

由于事件 A 发生的频率是它发生的次数与试验次数之比,其数值大小表示 A 发生的

频繁程度. 频率愈大,事件 A 发生愈频繁,这意味着 A 在一次试验中发生的可能性愈大. 因而,直观的想法是用频率来表示 A 在一次试验中发生的可能性大小. 抛掷一枚匀质硬币,当抛掷次数很少时,比如说每组只抛掷5次,连续抛掷10组,我们会发现,正面朝上这一事件的频率的取值具有很大的随意性,在0到1随机取值;但如果抛掷100次,500次,1000次,我们会发现频率的取值将会呈现出一定的规律性. 历史上有众多的概率论的学者都做过"反复抛掷一枚匀质硬币,记录正面朝上的次数"的试验,如表1.1.

表 1.1

实验者	n	n_H	$f_n(H)$
德·摩根	2048	1061	0.5181
蒲丰	4040	2048	0.5069
K·皮尔逊	12000	6019	0.5016
K·皮尔逊	24000	12012	0.5005

从上述数据可以看出:(1) 频率有随机波动性,即对于同样的 n,所得 $f_n(H)$ 不尽相同;(2) 抛掷硬币次数 n 较小时,频率 $f_n(H)$ 随机波动的幅度较大,但随着 n 增大,频率 $f_n(H)$ 呈现出一种稳定性. 即当 n 逐渐增大时 $f_n(H)$ 总是在0.5附近摆动,而逐渐稳定于0.5. 我们把这种现象称为频率的稳定性.

由随机试验中事件发生的频率的稳定性可见事件概率的存在性,因为频率与概率都是刻画随机事件发生可能性大小的一种度量,由此,我们给出概率的统计定义.

定义 1.8 在一定条件下,当试验次数增多时,事件 A 出现的频率将稳定在某一个数值上,则称该数值为事件 A 发生的概率,记为 $P(A)$.

由频率的基本性质,可得到概率也具有下列基本性质:

(1) $P(A) \geqslant 0$(非负性);

(2) $P(\Omega) = 1$(规范性);

(3) 若事件 A、B 互不相容,则 $P(A+B) = P(A) + P(B)$(概率的特殊加法公式).

二、概率的古典定义

概率论在发展初期的主要研究对象是古典概型. 所谓古典概型,是指一种具有有限可加性和等可能性的概率模型.

一个试验若满足:(1) 仅有有限个结果;(2) 每个基本事件出现的可能性都相同. 则称此概率模型为古典概型.

亦即 $\Omega = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$, $P(e_1) = P(e_2) = \cdots = P(e_n)$.

定义 1.9 设试验共有 n 个基本事件,事件 A 有 k 个基本事件(有利场合数),则事件 A 发生的概率为

$$P(A) = \frac{k}{n}$$

法国数学家拉普拉斯(Laplace)在1812年把上式作为概率的一般定义. 现在通常称它为概率的古典定义,因为它只适用于古典概型场合.

这里,等可能性是一种假设.在实际应用中,我们需要根据实际情况去判断是否可以认为各基本事件是等可能的.实际上,在很多场合由对称性(如掷硬币试验、掷骰子试验)或某种均衡性(如取球试验)不难判断基本事件的等可能性,并且在此基础上计算各种事件的概率.

例1 一口袋中装有6个球,其中4个白球,2个红球,从中有放回地抽取两次,每次随机取出一个球,求:(1)取到的两球都是白球的概率;(2)取到的两球颜色相同的概率.

解 以A、B分别表示"取到的两球都是白球"、"取到的两球都是红球".易知"取到的两球颜色相同"这一事件即为$A+B$.

从袋中依次取两个球,每一种取法为一个基本事件,显然这时样本空间中仅包含有限个元素.且由对称性知每个基本事件发生的可能性相同,因而可用古典概型的概率公式来计算相关概率.

第一次从袋中取球有6个球可供选取,第二次也有6个球可供选取,所以接连两次抽取共有6×6种取法,即样本空间中元素总数为6×6.对于事件A而言,由于第一次有4个白球可供选取,第二次也有4个白球可供选取,所以,两次都取到白球的取法有4×4种,即A中包含4×4个元素.同理,B中包含2×2个元素.于是

$$P(A)=\frac{4\times4}{6\times6}=\frac{4}{9}$$

$$P(B)=\frac{2\times2}{6\times6}=\frac{1}{9}$$

注意到事件A与B互不相容,所以,取到的两球颜色相同的概率

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{5}{9}.$$

例2 掷两枚骰子,求出现的点数之和为7的概率.

解 以A表示"出现的点数之和为7".掷两枚骰子,所有可能的结果有36种,而只有6种可能的结果满足数字之和等于7,即(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1),所以

$$P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}.$$

这里所给出的例子,概率的计算比较容易.但并不是所有古典概型的概率计算都这么容易.事实上,古典概型中概率的计算相当困难而且富含技巧,计算的要点是给定样本点,并计算它的总数,再计算有利场合的数目.而再考虑稍微复杂一点的情形就会懂得,必须有某些系统性的计算或计数的方法,这个工具就是排列和组合.所以,下面对排列和组合的知识作一个简单回顾.

全部排列与组合公式的推导基于下列两条原理:乘法原理和加法原理.

乘法原理:某一项工作需要相继进行的n个步骤来完成,完成第i个步骤有m_i种方法,则完成该项工作总的方法数为$\prod_{i=1}^{n}m_i$.

加法原理:完成某项工作共有n种途径,第i种途径包含m_i种方法,则完成该项工作

总的方法数为 $\sum_{i=1}^{n} m_i$.

由上述原理可以导出排列与组合公式.

基于乘法原理,所谓排列,是从共有 n 个元素的总体中取出 r 个来进行有顺序的放置(其中又可分为有放回的选取和无放回的选取).

在有放回的条件下,总方法数为 $n \cdot n \cdot \cdots \cdot n = n^r$

无放回的条件下,总方法数为 $n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$,记为 P_n^r.

显然,$P_n^r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$.

对于有 n 个 m 类本质不同的元素,每类分别有 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 个元素($k_1+k_2+\cdots+k_m = n$),则 n 个元素全取出的排列数为$\dfrac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}$.

基于加法原理,所谓组合,仅是从共有 n 个元素的总体中取出 r 个. 其方法数记为 C_n^r.

对于上述排列,若先不考虑顺序从 n 个元素中任选 r 个(A_1),然后再对 r 个元素进行有顺序的放置(A_2),则 A_1 是从 n 个元素中选 r 个的组合数,而 A_2 是 r 个元素的全排列,由乘法原理

$$P_n^r = C_n^r \cdot r! = \frac{n!}{(n-r)!},$$

所以

$$C_n^r = \frac{n!}{(n-r)!r!}.$$

例 3　袋中装有红球、黄球、白球各一个,有放回地依次取三个球,记 A 表示"三个都是红球",B 表示"全为红球或全为黄球",C 表示"颜色全不同",D 表示"无黄球",试求 A、B、C、D 的概率.

解　按照抽取规则,有放回地依次取三个球,样本空间所包含的基本事件个数为 $3^3 = 27$,所以

$$P(A) = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$$

$$P(B) = \frac{2}{3^3} = \frac{2}{27}$$

$$P(C) = \frac{C_3^1 C_2^1 C_1^1}{3^3} = \frac{2}{9}$$

$$P(D) = \frac{C_2^1 C_2^1 C_2^1}{3^3} = \frac{8}{27}$$

例 4　从 5 双不同的鞋子中任取 4 只,求所取 4 只鞋子中至少有 2 只配成一双的概率.

解　记 A = "取到的 4 只中至少有 2 只配成一双"

将 10 只鞋编号,其中第一双为 1,2 号,第二双为 3,4 号,…,第五双为 9,10 号. 从中任取 4 只,有 C_{10}^4 种不同取法. 取得 4 只鞋子至少有 2 只配成一双,即恰有 2 只配成一双或 4 只配成两双,有 $C_5^1 C_4^2 (C_2^1)^2 + C_5^2$ 种取法,所以

$$P(A)=\frac{C_5^1C_4^2(C_2^1)^2+C_3^2}{C_{10}^4}=\frac{13}{21}.$$

例 5 随机地将 15 名新生平均分配到三个班中，这 15 名新生中有三名优秀生，求：(1) 每个班各分一名优秀生的概率；(2) 三名优秀生在同一个班的概率.

解 记 A 表示"每个班各分一名优秀生"，B 表示"三名优秀生在同一个班". 基本事件总数为$\frac{15!}{5!5!5!}$.

(1) 每个班各分一名优秀生有 3! 种分法，对于每一种分法，12 名非优秀生平均分配到三个班中的分法总数为$\frac{12!}{4!4!4!}$，所以共有$\frac{3!12!}{4!4!4!}$种分法，所以

$$P(A)=\frac{\frac{3!12!}{4!4!4!}}{\frac{15!}{5!5!5!}}=\frac{25}{91}.$$

(2) 三名优秀生在同一个班，分法有 3 种，对于每一种分法，12 名非优秀生分配到三个班中的分法总数为$\frac{12!}{2!5!5!}$，考虑到优秀生的分法，总方法数为$\frac{3\times 12!}{2!5!5!}$，所以

$$P(B)=\frac{\frac{3\times 12!}{2!5!5!}}{\frac{15!}{5!5!5!}}=\frac{6}{91}.$$

三、概率的几何定义

古典概型是在满足有限性和等可能性的前提下应用的. 但有的随机现象不具有有限性的条件，如在一条直线上落点的分布、在一个平面上落点的分布等就不具备有限性. 几何概率给出了在无限情形下事件概率的确定方法.

若一个试验具有下列特征：(1) 每次试验的结果是无限多个，且全体结果可以用一个有度量的几何区域来表示；(2) 每次试验的各种结果出现是等可能的. 则称此概型为几何概型.

定义 1.10 几何概型的样本空间为有度量的区域，记为 Ω，Ω 的度量为 S_Ω，事件 $A(A\subset\Omega)$ 所对应的区域记为 A，A 的度量记为 S_A，则事件 A 发生的概率为

$$P(A)=\frac{S_A}{S_\Omega}.$$

由上式确定的概率称为几何概率.

对于一个具体问题，能否计算几何概率，关键在于将具体问题"几何化"，即根据问题的具体情况，选取合适的参数，建立适当的坐标系，将试验的每一个结果与坐标系中的一个点对应，从而全体结果构成一个具有等可能要求的区域，这里"等可能" 的含义是指：每一个试验结果的点落入某区域内可能性大小仅与该区域的度量成正比，而与该区域的位置无关.

例 6 （会面问题）两人约定在 0 到 T 时内到某地会面，先到者等 $t(t\leqslant T)$ 小时后离

去，求两人能会面的概率. 设每个人在 0 时到 T 时内各时刻到达该地的可能性相等，且两人到达该地的时刻互不影响.

解　以 x、y 分别表示两人到达该地的时间，则 $0 \leqslant x \leqslant T, 0 \leqslant y \leqslant T$，在 xOy 平面上，坐标 (x,y) 满足上式的点的全体所构成的正方形就是样本空间. 两人能会面的充要条件为 $|x-y| \leqslant t$，满足该条件的点决定了 Ω 的一个子集 A，则

$$P(A) = \frac{T^2 - (T-t)^2}{T^2} = 1 - \left(1 - \frac{t}{T}\right)^2.$$

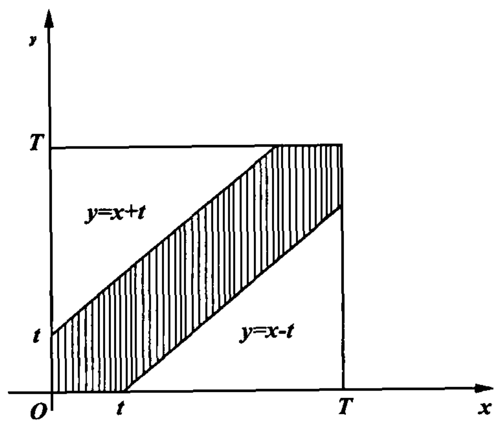


图 1.2

例 7　将长为 a 的细棒任意折成三段，求它们能构成三角形的概率.

解　将细棒折成三段，长分别为 $x, y, a-x-y$，则样本空间 Ω 所占的区域为

$$\begin{cases} 0 < x + y < a \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

所构成的图形如图 1.3.

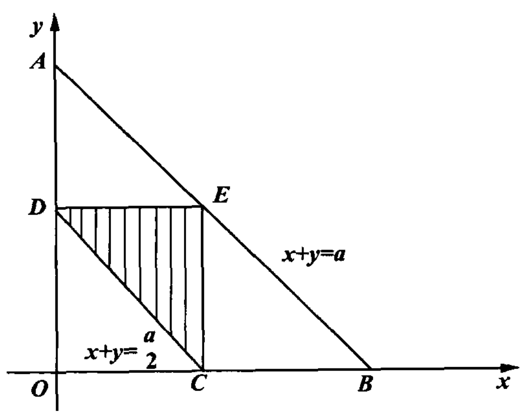


图 1.3

面积 $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}a^2$. 要使三段能构成三角形，则任意两段之和大于第三段，即应满足

$$\begin{cases}0 < x < \dfrac{a}{2}\\[2mm]0 < y < \dfrac{a}{2}\\[2mm]x + y > a - (x + y)\end{cases}$$

它们构成三角形 DCE,其图形面积为

$$S_{\triangle DCE} = \frac{1}{2}(\frac{a}{2})^2,$$

所以,将长为 a 的细棒任意折成三段,它们能构成三角形的概率为

$$P = \frac{\frac{1}{2}(\frac{a}{2})^2}{\frac{1}{2}a^2} = \frac{1}{4}.$$

四、概率的公理化定义

前面介绍的概率的古典定义及几何定义都带有局限性,因为它们都是以等可能性为基础的,而实际问题中遇到的情况还有许多是没有这种等可能性的. 概率的统计定义虽然一般而且直观,但是在数学上不严密,因为那里的依据是“试验次数很大时,频率所呈现的稳定性”这一事实,即当试验次数不大时,频率的取值具有很大的随意性,当实验次数比较大时,频率的取值将会在一个数值附近摆动;而对这种“摆动”如何理解却没有确切规定. 因而,在作为数学的一个重要分支的概率论中,有必要像在数学的其它分支中一样,提出关于随机事件概率的公理,使以后有关的推理有所依据. 为此,我们先引进代数和 σ - 代数的概念.

定义 1.11 设 Ω 是样本空间,F 是由 Ω 的一些子集构成的集合族,如果 F 满足如下条件:

(1) $\Omega \in F$;

(2) 若 $A \in F$,则 $\overline{A} \in F$;

(3) 若 $A_i \in F(i = 1,2,\cdots,n)$,则 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in F$.

则称 F 为一事件体,或称代数,F 中的元素称为事件.

定义 1.12 如 F 除了满足上述(1)、(2) 外,还满足

(3)′ 若 $A_i \in F(i = 1,2,\cdots,\infty)$,则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F$,则称 F 为 σ - 代数.

由定义 1.12 易知:$\phi \in F$,同时,若 $A_i \in F(i = 1,2,\cdots)$,则 $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in F$, $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in F$.

可以验证,对于任意样本空间 Ω,它的所有子集所成的集合族就是一个 σ - 代数.

由于对于有限样本空间 Ω 而言,若 F 是 Ω 的子集组成的代数,则必为 σ - 代数. 因此今后我们只讨论 σ - 代数,而不单独谈代数. 抽取具体对象,我们把任一样本空间 Ω 以及由 Ω 组成的一个 σ - 代数 F 写在一起,记为 (Ω,F),称为具有 σ - 代数结构的样本空间,或简称为可测空间. 特别对于有限样本空间,则称为有限可测空间.

对于一个可测空间,定义概率如下:

定义 1.13　设(Ω,F)是可测空间,$P(\cdot)$是Ω上的一个实值集函数,若它满足如下三个条件:

(1) 任意$A\in F$,有$0\leqslant P(A)\leqslant 1$;

(2) 对于必然事件Ω,有$P(\Omega)=1$;

(3)(完全可加性)对于任意$A_i\in F(i=1,2,\cdots)$,$A_i\cap A_j=\phi(i\neq j)$,恒有

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i).$$

则称实值集函数$P(\cdot)$为(Ω,F)上的概率,$P(A)$就称为事件A的概率.

这样,无论是古典概率、统计概率还是几何概率,它们都满足定义 1.13,因此,根据这一公理化结构所推出的任何规律,对它们都是适用的.

设Ω是一样本空间,F是Ω中的一个σ-代数,P为F上的概率.我们称具有上述结构的样本空间为概率空间,记为(Ω,F,P).

§1.3　概率的性质

在上一节中,我们得到了概率的三条基本性质

(1)$P(A)\geqslant 0$;

(2)$P(\Omega)=1$;

(3) 若A、B互不相容,则有$P(A+B)=P(A)+P(B)$.

事实上,在概率的三条公理的基础上,可以推导出概率的许多其他性质.

(4) 设A为任一随机事件,则$P(\overline{A})=1-P(A)$.

证明　由于A与$\overline{A}$互不相容,所以由(3)

$$P(A+\overline{A})=P(A)+P(\overline{A}).$$

又由于$A+\overline{A}=\Omega$,而$P(\Omega)=1$. 所以

$$P(A)+P(\overline{A})=1.$$

故

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

(5) 设$A\subset B$,则$P(B-A)=P(B)-P(A)$.

证明　当$A\subset B$时,$B=A+(B-A)$. 由性质(3)

$$P(B)=P(A)+P(B-A).$$

从而

$$P(B-A)=P(B)-P(A).$$

由性质(5)易得,当$A\subset B$时,有

$$P(A)\leqslant P(B).$$

对于任意事件A、B,有