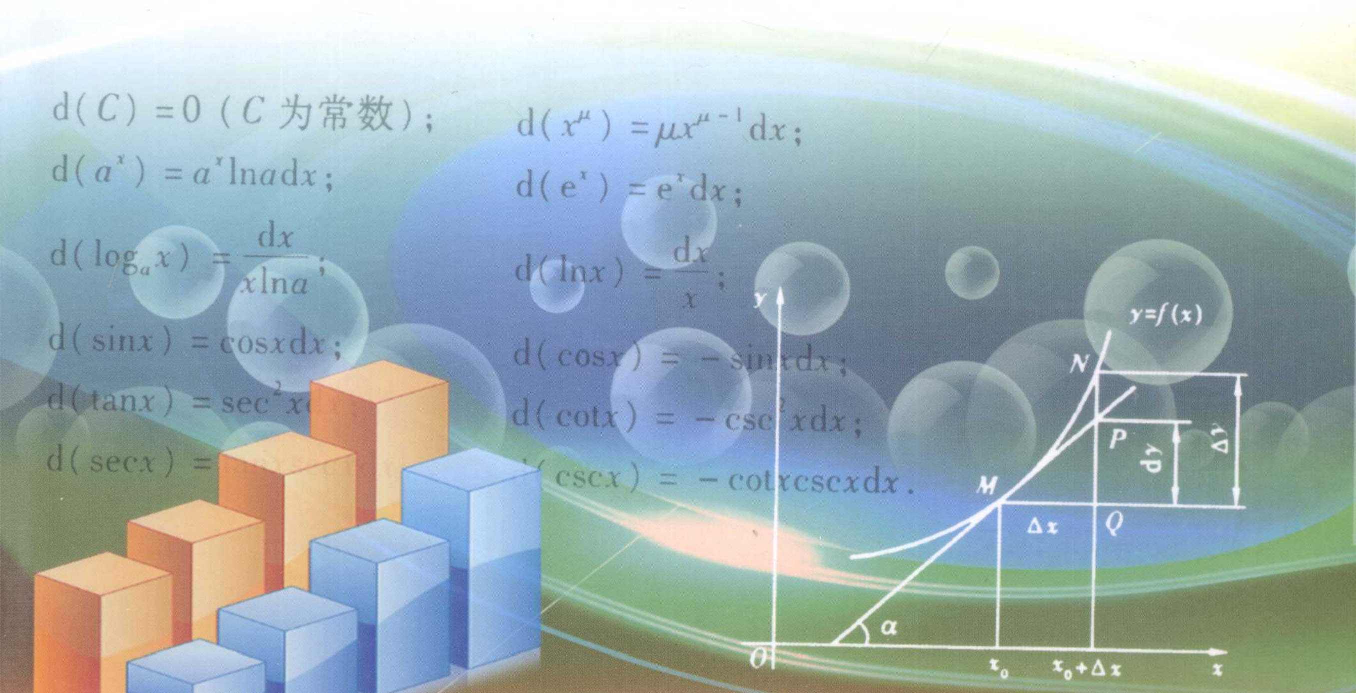
高职高专规划教材

高等数学

上册

（第二版）

《高等数学》编写组 编



石油工业出版社
Petroleum Industry Press

高职高专规划教材

高 等 数 学

上 册

（第二版）

《高等数学》编写组 编

石油工业出版社

内容提要

本书根据教育部最新制定的《高职高专教育高等数学基础课程教学基本要求》编写而成。主要内容包括函数、极限与连续，导数与微分，微分学应用，不定积分，定积分，常微分方程，级数，数学软件包 Mathematica 应用等。

本书可作为高等职业学校、高等专科学校、成人高校理工类专业的教材，也可供工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上册/《高等数学》编写组编. -2 版.
北京:石油工业出版社, 2009.9
(高职高专规划教材)
ISBN 978-7-5021-7370-8

Ⅰ. 高…
Ⅱ. 高…
Ⅲ. 高等数学-高等学校-教材
Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 161399 号

出版发行:石油工业出版社
(北京安定门外安华里 2 区 1 号　100011)
网　址:www.petropub.com.cn
编辑部:(010)64523579　发行部:(010)64523620
经　销:全国新华书店
印　刷:北京晨旭印刷厂

2009 年 9 月第 2 版　2009 年10月第 4 次印刷
787×1092 毫米　开本:1/16　印张:12.75
字数:325 千字

定价:20.00 元
(如出现印装质量问题，我社发行部负责调换)

第二版前言

2007 年 8 月出版的《高等数学》(上册)是由石油工业出版社组织，各高职院校骨干老师共同编写完成的．出版两年来，得到了广泛的使用，产生了积极的效果．为了使本教材更能适合广大高职高专院校的使用，打造精品教材，提高教学质量，编写组分别于2009 年7 月、9 月召开了本教材的修订研讨会和审稿会．

这次修订，充分吸收了一线教师的意见，充分反映了所在院校的特色和学生的实际，具体工作如下：

(1)章节内容的调整和删减．对个别章节进行了调整，并增加了傅里叶级数，这样更便于高职高专教师授课和学生理解．

(2)部分例题的调整．对一些难度较大的例题和习题进行了删减，这样更加贴近了“以应用为目的，以必须够用为度”的教学原则．

(3)习题的重新编排．在每节后安排了相应的习题，在每章后安排了复习题，这样更有利于教师组织教学和学生课后复习．

(4)错误的修改．对初版教材中的一些错误进行了修改．

希望通过本次修订，使本教材更加完善，切合教师的使用和学生的学习．

本次修订由河北石油职业技术学院禹利萍担任主编，克拉玛依职业技术学院黄杰、天津工程职业技术学院王勤、辽河石油职业技术学院刘广庆担任副主编．参加修订的还有：天津工程职业技术学院刘荣旺，渤海石油职业学院刘瑞楼、李文国，天津石油职业技术学院靳永山、赵向、臧爱珍，河北石油职业技术学院赵丽爽，克拉玛依职业技术学院贡新霞、高爱民．

由于编写组水平有限，书中错误和不足之处在所难免，敬请专家和读者批评指正，以便不断改进和完善．

编写组

2009 年 9 月

第一版前言

本教材根据教育部最新制定的《高职高专教育高等数学基础课程教学基本要求》及石油行业高职高专院校专业特点编写而成，可作为石油、化工等行业高等职业学校、高等专科学校、成人高校理工类专业的教材，也可供工程技术人员参考．

高等数学是石油等各行业高职高专院校各专业必修的一门重要的基础课程．它对培养提高学生的思维素质、创新能力、科学精神、治学态度以及用数学知识解决实际问题的能力都有非常重要的作用．学好高等数学不但是学好其他课程的前提，也是石油等行业工程技术人员所必须具备的基本素质．

经过多年的教学研究与实践，我们认识到石油行业高职高专院校的数学教育必须培养如下三方面的能力：一是用数学思想、概念、方法消化、吸收工程概念和工程原理的能力；二是把实际问题转化为数学模型的能力，结合数学建模突出“以应用为目的，突出石油特色、工科特色，以必需够用为度”的教学原则，加强对读者应用意识、兴趣、能力的培养；三是突出数学概念与实际问题的联系，结合高职高专的特点，适度淡化深奥的数学理论，强调了几何说明，结合具体内容进行数学建模训练，注重双向翻译能力的培养，进而升华为求解数学模型的能力．

本教材以培养学生的“创造能力和应用能力”为指导思想，把学生应用数学意识的培养贯穿于教材的始终，让学生学得生动活泼，使师生素质教育跃上一个新的高度．

本教材力求在实施素质教育的理论与实践研究上从定性、定量上进一步优化，并在部分专业上进行应用，突出石油行业特色，其最终目的是要探索出一套符合中国国情、中国特色的高职数学建模的理论体系（通过问题讨论，培养创新能力；通过问题的引申，培养创造能力；通过问题背景，培养创新能力；通过挖掘内部条件，培养创新能力），以数学建模为手段，激发读者学习数学的积极性，学会团结协作，建立良好的人际关系，培养相互合作的工作能力．以数学建模的方法为载体，使读者获得适应未来社会生活和进一步发展必需的重要数学事实（包括数学知识、数学活动经验）以及基本思想方法和应用技能．

本教材让读者变苦读为巧读，融会贯通课本知识，让读者对所学知识进行规律性的把握和思维能力的培养，让学生在社会主义市场经济条件下成为具有综合能力、素质的复合型人才．

本书的构架结构安排、统稿、定稿由史金海(河北石油职业技术学院)、李曰玮(渤海石油职业学院)承担，上册主编史金海，副主编黄杰(克拉玛依职业技术学院)、窦连江(天津工程职业技术学院)，主审李晓民(河北石油职业技术学院);下册主编李曰玮，副主编齐万春(天津石油职业技术学院)，主审臧爱珍(天津石油职业技术学院). 参加高等数学(上册)编写的有:辽河石油职业技术学院李文斌(第一章)，克拉玛依职业技术学院黄杰、贡新霞、高爱民(第二章、第六章)，河北石油职业技术学院史金海、蔡建功、赵丽爽(第四章、第五章)，天津工程职业技术学院窦连江(第七章、第八章)，渤海石油职业学院李曰玮、李树才、陆爱霞(第三章). 本书的编写得到了各参编院校领导的大力支持和帮助，在此我们一并表示衷心的感谢.

由于编者经验不足，水平有限，书中问题在所难免，敬请读者和同行指正.

编者

2007 年 8 月

目　　录

第一章　函数、极限与连续

微积分是数学中的重要分支，是高等数学的核心，而函数和极限分别是微积分的研究对象和工具．因此，本章将在复习和加深函数有关知识的基础上，着重讨论函数的极限和函数的连续性等问题．

第一节　函数及其性质

一、函数的概念

1. *函数的定义*

定义 1　设在某一变化过程中，有两个变量 x 和 y. D 是一个数集，如果对属于 D 的每一个数 x，按照某种对应关系 f，都有唯一确定的数值 y 与之对应，则称 y 是定义在数集 D 上的 x 的**函数**．记作

$$y = f(x),\ x \in D$$

其中 x 称为**自变量**，数集 D 称为函数的**定义域**．当 x 取遍 D 中的一切数时，与它对应的函数值的集合 M 称为函数的**值域**．当自变量取某一数值 x_0 时，函数 y 具有确定的对应值 y_0，则称函数在 x_0 处有定义，并称 y_0 为 $y=f(x)$ 在 x_0 处的函数值，记作

$$y_0 = y\big|_{x=x_0} = f(x_0)$$

若函数在某个区间上的每一点都有定义，则称这个函数在该区间上有定义．

通过函数定义，可以发现，构成函数的两个重要因素是对应关系和定义域．

显然，两个函数只有当它们的定义域和对应关系完全相同时，这两个函数才认为是相同的．

例如，函数 $y=\sin^2 x+\cos^2 x$ 与 $y=1$，它们的定义域和对应关系都相同，所以它们是相同的函数．

又如，函数 $y=\dfrac{x^2}{x}$ 与 $y=x$，它们的定义域不同，所以它们不是相同的函数．

邻域是一个重要的概念．开区间 $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ 称为 x_0 为中心，以 $\delta(\delta>0)$ 为半径的邻域，简称为点 x_0 的邻域，记为 $U(x_0,\delta)$．把邻域的中心点 x_0 去掉，即得 x_0 点的去心邻域，记作 $\mathring{U}(x_0,\delta)$．

2. *函数的定义域*

定义域是构成函数的重要因素之一，因此研究函数就必须注意函数的定义域．在考虑实际问题时，应根据问题的实际意义来确定定义域．例如，匀速直线运动的位移 $s=vt$，t 是时间，故只能取非负数．对于用数学式子表示的函数，其定义域由函数表达式本身来确定，即使运算有意义．如：

(1)函数中有分式，要求分母不能为零.

(2)函数中有根式，要求负数不能开偶次方.

(3)函数中有对数式，要求真数必须大于零.

(4)函数中有三角和反三角函数式，要求符合它们的定义域.

(5)若函数式是上述各式的混合式，则应取各部分定义域的交集.

例1 求下列函数的定义域:

$$(1)y=\frac{1}{4-x^2}+\sqrt{x+2};\quad (2)y=\lg\frac{x-1}{x-2};\quad (3)y=\arcsin\frac{x+1}{3}+\sqrt{x+1}.$$

解 (1)因为$4-x^2\neq0$，所以$x\neq\pm2$；又因为$x+2\geqslant0$，所以$x\geqslant-2$. 因此函数定义域为$(-2,2)\cup(2,+\infty)$.

(2)因为$\frac{x-1}{x-2}>0$，所以$x>2$或$x<1$，所以函数定义域为$(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$.

(3)因为$-1\leqslant\frac{x+1}{3}\leqslant1$，所以$-3\leqslant x+1\leqslant3$，即$-4\leqslant x\leqslant2$. 又因为$x+1\geqslant0$，所以$x\geqslant-1$，所以函数的定义域为$[-1,2]$.

3. *函数与函数值的记号*

通常，y是x的函数，记为$y=f(x)$. 但若在同一问题中，需要讨论几个不同的函数，就要使用不同的函数记号，例如，$F(x)$，$\varphi(x)$，$y(x)$，…

例2 若$f(x)=\frac{|x-2|}{x+1}$，求$f(2)$，$f(-2)$，$f(0)$，$f(a)$.

解 $f(2)=0$；$f(-2)=\frac{|-4|}{-1}=-4$；$f(0)=\frac{|-2|}{1}=2$；$f(a)=\frac{|a-2|}{a+1}$.

4. *函数的表示法*

表示函数的方法，最常用的有三种:

(1)公式法，如$y=x^a$、$y=\sin x$等.

(2)表格法，如对数表、三角函数表等.

(3)图像法，用图像表示函数.

有时会遇到一个函数在自变量不同的取值范围内用不同的式子来表示.

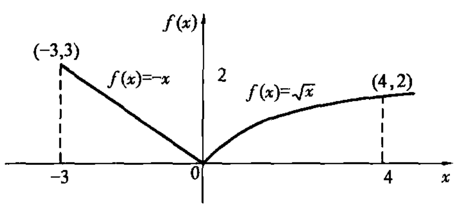


图1-1

例如：函数$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & x\geqslant0\\ -x, & x<0\end{cases}$，是定义在区间$(-\infty,+\infty)$内的一个函数. 当$x\geqslant0$时，$f(x)=\sqrt{x}$；当$x<0$时，$f(x)=-x$(图1-1).

像这样在不同的区间内用不同的式子来表示的函数称为**分段函数**，即用几个式子合在一起表示一个函数.

求分段函数的函数值时，应把自变量的值代入相应取值范围的表达式进行计算.

例如，上述分段函数中$f(4)=\sqrt{4}=2$；$f(-3)=-(-3)=3$.

二、反函数

定义2 设有函数$y=f(x)$，其定义域为D，值域为M，则当变量y在M中每取一个值

时，都可以从关系式 $y=f(x)$ 中确定唯一的 $x(x\in D)$ 与之对应，那么所确定的 y 为自变量的函数 $x=\varphi(y)$ 或 $x=f^{-1}(y)$ 称为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，它的定义域为 M，值域为 D. 互为反函数 $y=f(x)$、$x=f^{-1}(y)$ 的图像为同一条曲线.

习惯上，自变量用 x 表示，所以反函数也可表示为 $y=f^{-1}(x)$.

函数 $y=f(x)$ 的图像与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

例 3 求函数 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ 的反函数，并写出它的定义域.

解 因为 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$，所以 $e^{2x}-2ye^x-1=0$，则

$$e^x=\frac{2y\pm\sqrt{4y^2+4}}{2}=y\pm\sqrt{y^2+1}$$

由于 $e^x>0$，故取 $e^x=y+\sqrt{y^2+1}$，于是

$$x=\ln(y+\sqrt{y^2+1})$$

所以，所求反函数为 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$，定义域为 $\mathbf{R}$.

三、函数的特性

1. 函数的奇偶性

如果函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称，且对任意 x，都有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**；如果 $f(x)$ 的定义域关于原点对称，且对任意 x，都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**偶函数**. 如果函数既非奇函数，也非偶函数，则称 $f(x)$ 为**非奇非偶函数**.

例如，函数 $y=\sin x$、$y=x^3$ 等都是奇函数；又如，函数 $y=\cos x$、$y=x^2$ 等都是偶函数；而函数 $y=\sin x+\cos x$ 是非奇非偶函数.

奇函数的图像关于原点对称，偶函数的图像关于 y 轴对称.

例 4 判断函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 的奇偶性.

解 因为函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且有

$$f(-x)=\ln\left[(-x)+\sqrt{(-x)^2+1}\right]=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$$

$$=\ln\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)^{-1}=-\ln(\sqrt{x^2+1}+x)=-f(x)$$

所以 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 是奇函数.

2. 函数的单调性

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内随着 x 的增大而增大（或减小），即对于区间 (a,b) 内任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$ [或 $f(x_1)>f(x_2)$]，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内单调增加（或单调减少）. 在定义域内单调增加或单调减少的函数统称为**单调函数**，其中 (a,b) 称为函数 $f(x)$ 的单调增加（或单调减少）区间，也称为**单调区间**.

单调增加(或单调减少)函数的图像沿 x 轴的正向上升(或下降).

上述定义也适用于其他有限区间和无限区间的情形.

3. 函数的周期性

如果有不为零的实数 l 存在，使得 $f(x+l)=f(x)$ 在 $f(x)$ 的定义域内恒成立，则称函数 $f(x)$ 为周期函数，称 l 是 $f(x)$ 的周期，显然 $\pm l$，$\pm 2l$，$\pm 3l$，…，$\pm nl$ 也是它的周期. 通常所说的函数的周期是指最小正周期(周期不唯一).

一个以 l 为周期的函数，它的图像在定义域内每隔长度为 l 的相邻区间上，就有相同的形状.

例如，函数 $\cos x$、$\sin x$ 以 2π 为周期，而 $A\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$ 以 $\dfrac{2\pi}{\omega}$ 为周期.

4. 函数有界性

设函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内有定义，如果存在一个正数 M，使得对于区间 (a, b) 内的一切 x 值，对应的函数值 $f(x)$ 都有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，则称 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内有界；如果不存在这样的正数 M，称 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内无界.

上述定义也适用于闭区间和无穷区间.

四、数学模型简述

1. 数学模型的含义

从广义上讲，一切数学概念、数学理论体系、各种数学公式、各种方程式、各种函数关系，以及由公式系列构成的算法系统等都可以称为数学模型. 从狭义上讲，只有那些反映特定问题或特定的具体事物系统的数学关系的结构才称为数学模型. 在现代应用数学中，数学模型都作狭义解释. 具体来说，数学模型就是为了某种目的，用字母、数字及其他数学符号建立起来的等式或不等式以及图表、图像、框图等描述客观事物的特征及其内在联系的数学结构表达式. 而建立数学模型的目的，主要是为了解决具体的实际问题.

2. 数学模型的建立过程

把现实世界中的实际问题加以提炼，抽象为数学模型，求出模型的解，验证模型的合理性，并用该数学模型所提供的解来解释现实问题，数学知识的这一应用过程称为数学建模. 其基本步骤如下:

(1)模型准备. 了解问题的实际背景，明确其实际意义，掌握对象的各种信息，用数学语言来描述问题.

(2)模型假设. 根据实际对象的特征和建模的目的，对问题进行必要的简化，并用精确的语言提出一些恰当的假设.

(3)模型建立. 在假设的基础上，利用适当的数学工具来刻画各变量之间的数学关系，建立相应的数学结构(尽量用简单的数学工具).

(4)模型求解. 利用获取的数据资料，对模型的所有参数作出计算(估计).

(5)模型分析. 对所得的结果进行数学上的分析.

(6)模型检验. 将模型分析结果与实际情形进行比较，以此来验证模型的准确性、合理性和适用性. 如果模型与实际较吻合，则要对计算结果给出其实际含义，并进行解释. 如果模型与实际吻合较差，则应该修改假设，再次重复建模过程.

(7)模型应用. 应用方式因问题的性质和建模的目的而异.

简言之，建立数学模型，就是建立函数关系式．其步骤可分为：

(1)分析问题中哪些是变量，哪些是常量，分别用字母表示；

(2)根据所给条件，运用数学、物理和其他知识，确定等量关系；

(3)具体写出解析式 $y=f(x)$，并指明定义域．

下面，从两个简单的实际问题入手，说明建立函数关系的过程．

例 5 用铁板做一容积为 V 的圆柱形储油罐，试将它的表面积表示为底半径的函数，并求定义域．

解 设储油罐的底半径为 r，表面积为 S，且其高为 h，根据体积公式和面积公式有

$$V=\pi r^2 h$$

$$S=2\pi r^2+2\pi rh$$

由 $V=\pi r^2 h$ 得 $h=\frac{V}{\pi r^2}$，代入 $S=2\pi r^2+2\pi rh$，可得

$$S=2\pi r^2+\frac{2V}{r}$$

这就是储油罐的表面积 S 与底半径 r 的函数关系，其定义域为 $(0,+\infty)$．

例 6 某运输公司规定货物的吨千米运价为：在 a km 以内，每吨千米为 k 元；超过 a km 时，超过部分为每吨千米 $\frac{4}{5}k$ 元．求运价 m 和里程 s 之间的函数关系．

解 根据题意可列出函数关系如下：

$$m=\begin{cases} ks & , 0<s\leqslant a \\ ka+\frac{4}{5}k(s-a) & , s>a \end{cases}$$

从上面的两个例子可以看出，建立数学模型(函数关系)时，首先要弄清题意，分析问题中哪些是变量，哪些是常量；其次，分清变量中哪个应作为自变量，哪个作为函数，并用习惯上用的字母区分它们；然后，把变量暂时固定，利用几何关系、物理定律或其他知识，列出变量间的等量关系式，并进行化简，便能得到所需要的函数关系．找出函数关系式后，一般还要根据题意写出函数的定义域．

习题 1-1

1. 求下列各函数的定义域：

(1) $y=\frac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$；　　(2) $y=\sqrt{2-x}+\arccos\frac{x-1}{2}$；

(3) $y=\lg(2^x-1)$；　　(4) $y=\sqrt{x-x^2+6}+\arcsin\frac{2x-1}{3}$.

2. 求下列函数的反函数：

(1) $y=1+\ln(x+2)$；　　(2) $y=\frac{3^x}{3^x+1}$.

3. 判定下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=x^4-3x^2$；　　(2) $f(x)=\frac{a^x+a^{-x}}{a^x-a^{-x}}$；　　(3) $f(x)=(x\sin x)e^{\cos x}$.

第二节　初 等 函 数

一、基本初等函数

常数函数：$y=C$（C 为常数）；

幂函数：$y=x^{a}$（a 为常数）；

指数函数：$y=a^{x}$（$a>0$，$a\neq 1$，a 为常数）；

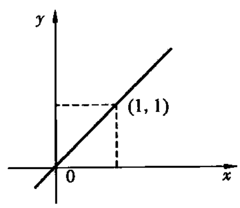
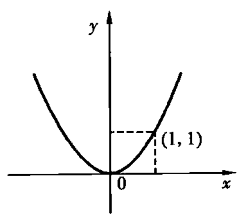
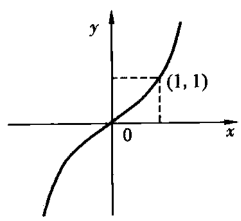
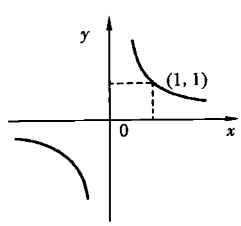
对数函数：$y=\log_{a}x$（$a>0$，$a\neq 1$，a 为常数）；

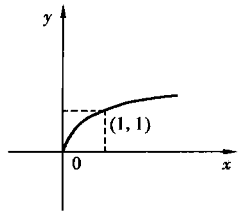
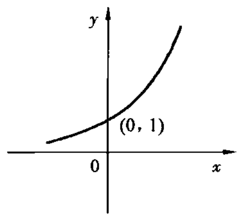
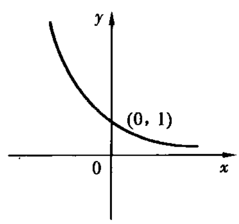
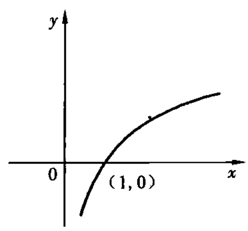
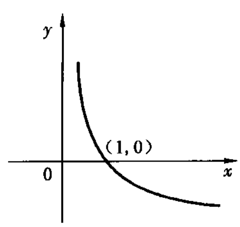
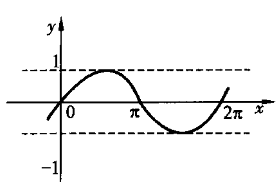
三角函数：$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$；

反三角函数：$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$.

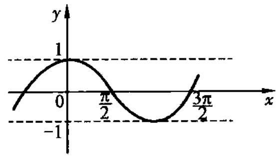
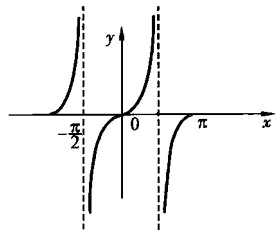
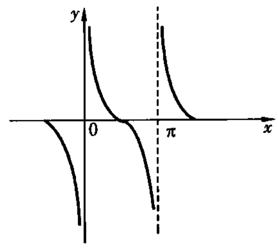
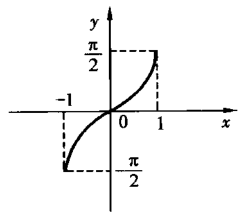
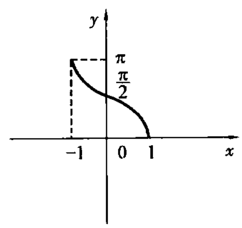
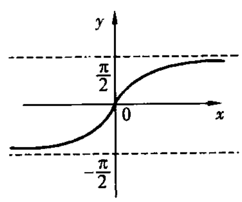
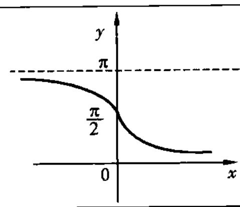
这六种函数统称为基本初等函数．常用的基本初等函数的图像和性质，如表 1－1 所示．

表 1－1

<table>
<tr><th>函　数</th><th>定义域与值域</th><th>图　像</th><th>特　性</th></tr>
<tr><td>$y=x$</td><td>$x\in(-\infty,+\infty)$
$y\in(-\infty,+\infty)$</td><td></td><td>奇函数
单调增加</td></tr>
<tr><td>$y=x^2$</td><td>$x\in(-\infty,+\infty)$
$y\in[0,+\infty)$</td><td></td><td>偶函数
在$(-\infty,0)$内单调减少
在$(0,+\infty)$内单调增加</td></tr>
<tr><td>$y=x^3$</td><td>$x\in(-\infty,+\infty)$
$y\in(-\infty,+\infty)$</td><td></td><td>奇函数
单调增加</td></tr>
<tr><td>$y=\frac{1}{x}$</td><td>$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$
$y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$</td><td></td><td>奇函数
在$(-\infty,0)$内单调减少
在$(0,+\infty)$内单调减少</td></tr>
</table>

函　数	定义域与值域	图　像	特　性
$y=x^{\frac{1}{2}}$	$x\in[0,\ +\infty)$ $y\in[0,\ +\infty)$		单调增加
$y=a^x(a>1)$	$x\in(-\infty,\ +\infty)$ $y\in(0,\ +\infty)$		单调增加
$y=a^x$ $(0<a<1)$	$x\in(-\infty,\ +\infty)$ $y\in(0,\ +\infty)$		单调减少
$y=\log_a x$ $(a>1)$	$x\in(0,\ +\infty)$ $y\in(-\infty,\ +\infty)$		单调增加
$y=\log_a x$ $(0<a<1)$	$x\in(0,\ +\infty)$ $y\in(-\infty,\ +\infty)$		单调减少
$y=\sin x$	$x\in(-\infty,\ +\infty)$ $y\in[-1,\ 1]$		奇函数 周期为 2π 有界

续表

函　数	定义域与值域	图　像	特　性
$y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		偶函数 周期为 2π 有界
$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in z)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 周期为 π
$y=\cot x$	$x\neq k\pi(k\in z)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 周期为 π
$y=\arcsin x$	$x\in[-1,1]$ $y\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$		奇函数 单调增加 有界
$y=\arccos x$	$x\in[-1,1]$ $y\in[0,\pi]$		单调减少 有界
$y=\arctan x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$		奇函数 单调增加 有界
$y=\operatorname{arccot} x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,\pi)$		单调减少 有界

二、复合函数

在很多实际问题中，变量间的函数关系往往是复杂的.

例如，设有边长为1的正方形金属薄片，受热后膨胀，边长膨胀了 x，求受热膨胀以后的面积 y. 由于面积 $y=u^2$，u 表示边长，而 $u=1+x$，因此 $y=u^2=(1+x)^2$.

不难看出，这个函数的值不是直接由自变量 x 来确定的，是通过 $u=1+x$ 来确定的，也就是说，对于每一个 x，经过中间变量 u，都有一个 y 的值与之对应，所以 y 是 x 的函数，而且这个函数可以看作是由函数 $u=1+x$ 与函数 $y=u^2$ 复合而成的.

定义1 如果 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，通过 u 将 y 表示成 x 的函数，即 $y=f[\varphi(x)]$，那么 y 就称为 x 的**复合函数**，其中 u 称为**中间变量**.

但要注意，函数 $u=\varphi(x)$ 的值域，应该与函数 $y=f(u)$ 的定义域有非空交集，否则复合函数将失去意义.

例如，复合函数 $y=\lg u$，$u=x-1$，由于 $y=\lg u$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，所以中间变量 $u=x-1$ 的值域必须在 $(0,+\infty)$ 内，即 x 应在 $(1,+\infty)$ 内.

由此可知，复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的定义域应为函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域的子集.

当然，也可以由两个以上的函数经过复合构成一个复合函数. 例如 $y=\lg u$，$u=\sin v$，$v=\dfrac{x}{2}$，则 $y=\lg\sin\dfrac{x}{2}$，其中 u、v 为中间变量.

下面举例分析复合函数的复合过程. 正确熟练地掌握这个方法，有利于今后微积分的学习.

例1 指出下列复合函数的复合过程：

(1) $y=\sqrt{1-x^2}$； (2) $y=\sin^2 x$； (3) $y=\arcsin(\ln x)$； (4) $y=2\cos\sqrt{1-x^2}$.

解 (1) 函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 是由函数 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=1-x^2$ 复合而成的.

(2) 函数 $y=\sin^2 x$ 是由函数 $y=u^2$ 和 $u=\sin x$ 复合而成的.

(3) 函数 $y=\arcsin(\ln x)$ 是由函数 $y=\arcsin u$ 和 $u=\ln x$ 复合而成的.

(4) 函数 $y=2\cos\sqrt{1-x^2}$ 是由函数 $y=2\cos u$、$u=\sqrt{v}$ 和 $v=1-x^2$ 复合而成的.

三、初等函数

定义2 由基本初等函数经过有限次四则运算或有限次函数的复合而构成的，并能用一个解析式表示的函数称为**初等函数**.

例如，$y=\lg\sin x$、$y=\sqrt{1+x^2}$、$y=\arcsin\dfrac{1}{x}$、$y=\dfrac{\cos x}{1+x^2}$ 等都是初等函数.

分段函数若可以表示成一个式子，则为初等函数，否则不是.

例如，$y=\begin{cases} x, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -x, & x<0 \end{cases}$ 可写成 $y=\sqrt{x^2}$，所以是初等函数.

又如，$y=\begin{cases} x-1, & x<0, \\ x+1, & x>0 \end{cases}$ 不能用一个式子表示，所以不是初等函数.