成人(网络)教育系列规划教材
CHENGREN （WANGLUO） JIAOYU XILIE GUIHUA JIAOCAI

高等数学

GAODENG SHUXUE

主　编 孙云龙
副主编 孙疆明　骆川义

西南财经大学出版社
Southwestern University of Finance & Economics Press

高等数学

GAODENG

成人(网络)教育系列规划教材

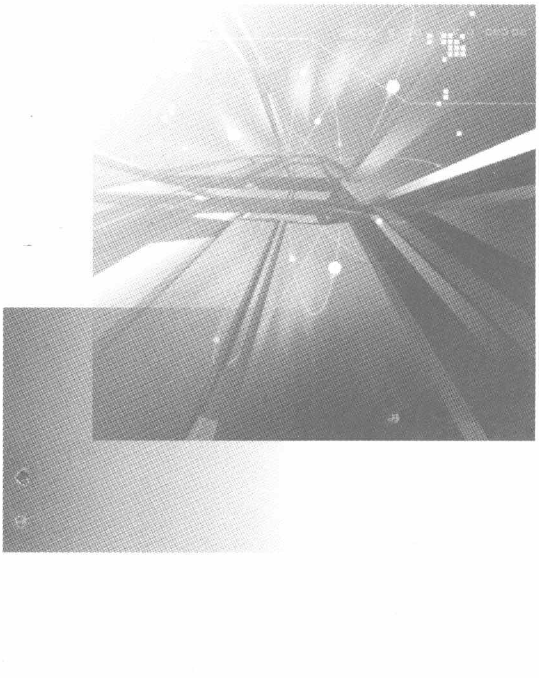
CHENGREN（WANGLUO）JIAOYU XILIE GUIHUA JIAOCAI

高等数学

GAODENG SHUXUE

主　编　孙云龙

副主编　孙疆明　骆川义



西南财经大学出版社

Southwestern University of Finance & Economics Press

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/孙云龙主编;孙疆明,骆川义副主编.—成都:西南财经大学出版社,2009.7

ISBN 978-7-81138-376-8

Ⅰ.高… Ⅱ.①孙…②孙…③骆… Ⅲ.高等数学—成人教育:高等教育—教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第101614号

高等数学

孙云龙 主编

孙疆明 骆川义 副主编

责任编辑:张访

封面设计:杨红鹰

责任印制:封俊川

出版发行:	西南财经大学出版社(四川省成都市光华村街55号)
网　　址:	http://www.bookcj.com
电子邮件:	bookcj@foxmail.com
邮政编码:	610074
电　　话:	028-87353785　87352368
印　　刷:	郫县犀浦印刷厂
成品尺寸:	185mm×260mm
印　　张:	9.5
字　　数:	205千字
版　　次:	2009年7月第1版
印　　次:	2009年7月第1次印刷
印　　数:	1—3000册
书　　号:	ISBN 978-7-81138-376-8
定　　价:	18.00元

成人（网络）教育系列规划教材
编 审 委 员 会

总序

随着全民终身学习型社会的不断建立和完善，业余成人（网络）学历教育学生对教材的质量要求越来越高。为了进一步提高成人（网络）教育的人才培养质量，帮助学生更好地学习，依据西南财经大学成人（网络）教育人才培养目标、成人学习的特点及规律，西南财经大学成人（网络）教育学院和西南财经大学出版社共同规划，依托学校各专业学院的骨干教师资源，致力于开发适合成人（网络）学历教育学生学习的高质量优秀系列规划教材。

西南财经大学成人（网络）教育学院和西南财经大学出版社按照成人（网络）教育人才培养方案，编写了专科及专升本公共基础课、专业基础课、专业主干课和部分选修课教材，以完善成人（网络）教育教材体系。

由于本系列教材的读者是在职人员，他们具有一定的社会实践经验和理论知识，个性化学习诉求突出，学习针对性强，学习目的明确。因此，本系列教材的编写突出了基础性、职业性、实践性及综合性。教材体系和内容结构具有新颖、实用、简明、易懂等特点；对重点、难点问题的阐述深入浅出、形象直观，对定理和概念的论述简明扼要。

为了编好本套系列规划教材，在学校领导、出版社和其他学院的大力支持下，首先，成立了由学校副校长、博士生导师丁任重教授任主任，成人（网络）教育学院院长唐旭辉研究员和出版社社长、博士生导师冯建教授任副主任，其他部分学院领导参加的编审委员会。在编审委员会的协调、组织下，经过广泛深入的调查研究，制定了我校成人（网络）教育教材建设规划，明确了建设目标，计划用两年时间分期分批建设。其次，为了保证教材的编写质量，在编审委员会的协调下，组织各学院具有丰富成人（网络）教学经验并有教授或副教授职称的教师担任主编，由各书主编组织成立教材编写团队，确定教材编写大纲、实施计划及人员分工等，经编审委员会审核每门教材的编写大纲后再编写。

经过多方的努力，本系列规划教材终于与读者见面了。在此之际，我们对各学院领导的大力支持、各位作者的辛勤劳动以及西南财经大学出版社的鼎力相助表示衷心的感谢！在今后教材的使用过程中，我们将听取各方面的意见，不断修订、完善教材，使之发挥更大的作用。

西南财经大学成人（网络）教育学院

2009 年 6 月

前 言

本书是为成人高等教育而编写的一本高等数学（微积分）教科书，内容包括：一元函数微积分、多元函数微积分、概率论简介。

高等数学（微积分）是高等教育财经类各专业的一门必修的公共基础课。通过本课程的学习，一方面，能使学生系统地获得必要的微积分基本知识及常用的数学方法；另一方面，通过各个教学环节，逐步培养学生具有比较熟练的基本运算能力和自学能力、初步抽象概括问题的能力以及一定的逻辑推理能力、用定性与定量相结合的方法处理经济问题的初步能力。为学生学习后续课程和进一步获得经济管理技术知识奠定必要的数学基础。

为了符合成人教育的实际要求，贯彻“少而精”的原则，做到突出重点、详略得当、通俗易懂，在本书的编写过程中，我们做了以下一些尝试：

（1）努力突出微积分的基本思想和基本方法。本书注意对基本概念、基本定理和重要公式的几何背景和实际应用背景的介绍，以加深学生对它们的理解和印象；注重分析基本理论的实际意义及各部分内容的内在联系，以便学生在学习过程中能较好地认识基本概念和基本方法，从总体上把握微积分的思想方法。

（2）按照适当介绍和循序渐进的原则，在定理与性质的讨论中，尽量从简单、低维入手，适度推广，在没有削弱对极限作为微积分基本方法的论述的同时，适度削弱一些定理与性质的讨论与证明，避免内容过深而脱离成人学生的实际。

（3）参照教育部“全国各类成人高等学校招生复习考试大纲（专科起点升本科）高等数学（二）”的要求，本书增加了概率论初步的内容，供任课教师及参加专升本考试的学生选用。

（4）课后习题题量适当、题型丰富。每一章结束后，附有相关习题，包括填空、选择、计算、证明、应用、讨论等题型，书后附有答案。

本书虽通过认真编写和修改，限于作者水平所限，加上时间紧迫，不妥之处在所难免，恳请读者不吝指正。

编者　2009 年 5 月

目录

第一章　极限与连续

极限理论与连续理论是微积分的两个基础理论。极限不仅是研究变量变化趋势的重要工具，而且也是微积分中其他许多概念与性质的基础；连续函数，特别是初等函数为微积分的重要研究对象。

本章在复习中学的函数理论的基础上，建立函数极限与连续的概念，分析讨论函数极限与连续的性质与计算。

第一节　函数

一、函数概念

函数是对现实世界中各种变量之间相互依存关系的一种抽象。比如：商品需求是商品价格的函数，企业的生产成本是产量的函数等等。

（一）函数的定义

定义 1.1　设 D 是一个非空实数集合，若有一个对应规则 f，使 $\forall x \in D$，都有一个确定的实数 y 与之对应，则称这个对应规则 f 是定义在集合 D 上的一个**函数**，或称 y 是 x 的函数，记为：$y = f(x)$。

其中 x 称为**自变量**，y 称为**因变量**。D 称为**定义域**，也可记为 $D(f)$。

若 $x_0 \in D$，则 x_0 对应的 y 值称为**函数值**，记为 y_0，或 $f(x_0)$，或 $y|_{x=x_0}$。全体函数值的集合称为值域，记为 $f(D)$。

注：$\forall$ 为全称量词，读作："所有的"；$\exists$ 为存在量词，读作："存在"。

例 1　设 $f(x)=3x-5+2^x$，求 $f(0)$，$f(1)$

解　$f(0)=3\times0-5+2^0=-4$

$f(1)=3\times1-5+2^1=0$

分段函数是指将函数的定义域可分成若干区间，每个区间上函数表达式各不相同。

例 2　设 $f(x)=\begin{cases}2x-1, & x<0\\ x, & 0\leqslant x<1\\ x^2+1, & x\geqslant1\end{cases}$，求 $f(0)$，$f(-1)$，$f(1)$，$f(3)$

解　$f(0)=0$

$f(-1)=2\times(-1)-1=-3$

$f(1)=1^2+1=2$

$f(3)=3^2+1=10$

(二)函数定义域

函数定义域即为函数自变量的取值范围,它可分为两种形式:一种是根据实际应用,事先给定自变量取值范围;另一种是自变量取值范围事先未给定,称为自然定义域。一般来说,求定义域是指求自然定义域。

例3 求函数 $y=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{\ln(x-2)}$ 的定义域

解 由

$$\begin{cases} x^2-1\geqslant 0 \\ x-2>0 \\ \ln(x-2)\neq 0 \end{cases}$$

得:$x\in(2,3)\cup(3,+\infty)$

例4 设 $f(x)=\begin{cases} x\sin x, & 0\leqslant x<1 \\ x-\ln(2+x), & x<0 \end{cases}$,求 $f(x)$ 的定义域。

解 在函数的第一段上,函数表达式为 $x-\ln(2+x)$,自变量的取值范围包括该段自变量取值范围及表达式中自变量取值范围两个方面,即

$$\begin{cases} x<0 \\ 2+x>0 \end{cases} \quad \text{即:} -2<x<0$$

在函数的第二段上,函数表达式为 $x\sin x$,自变量的取值范围为

$0\leqslant x<1$

所以,定义域为

$D=[0,1)\cup(-2,0)=(-2,1)$

(三)函数的表示法

函数的表示法有多种形式,常用的有:

解析法:也叫公式法,指通过数学符号表示对应关系的函数表示法,是微积分讨论的主要函数形式。例如:例1、例2中的函数表示都属于解析法。

列表法:指通过列表方式反映对应关系的函数表示法。例如:某商品的售价与月销售量如下表:

售价(元)	20	18	17	15	14	13	11
销售量(件)	55 182	60 985	64 112	70 855	74 488	78 307	86 543

图示法:指通过图形方式反映对应关系的函数表示法。例如:股市的走势图反映了股价、成交量随时间变化的函数关系。

描述法:通过描述反映对应关系的函数表示法。在解决实际问题的过程中,有时会遇到已知两变量之间有确定的对应关系,但具体对应规则不十分清楚,这时可通过说明或用抽象符号 $f(x)$ 来反映对应关系。

二、函数的性质

(一)单调性

定义 1.2　设函数 $f(x)$ 定义域为 D,若 $\forall x_1<x_2, x_1, x_2\in D$,恒有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 D 上**单调增加**;若恒有 $f(x_1)>f(x_2)$ 则称 $f(x)$ 在 D 上**单调减少**。统称这两类函数为**单调函数**。

例如 $y=\frac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上都是单调减少函数,但在定义域上不是单调减少函数。

(二)奇偶性

定义 1.3　设 $f(x)$ 的定义域为 D,若 $\forall x\in D$ 恒有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为**偶函数**;若对任意 $x\in D$ 恒有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 为**奇函数**;否则称 $f(x)$ 为**非奇非偶函数**。

奇、偶函数定义域是关于原点对称的集合。偶函数的图像关于 y 轴对称,奇函数的图像关于原点对称。

例如 $x,\sin x,x^3,\sqrt[3]{x}$ 等为奇函数 $x^2,|x|,\cos x$ 等为偶函数.

例 5　证明 $f(x)=a^x-a^{-x}$ 为奇函数

证　$f(-x)=a^{-x}-a^{-(-x)}=-(a^x-a^{-x})=-f(x)$

所以 $f(x)$ 为奇函数。

例 6　设 $f(x)$ 在 $(-l,l)$ 上有定义,证明 $f(x)+f(-x)$ 为 $(-l,l)$ 上的偶函数。

证　设 $F(x)=f(x)+f(-x)$

则

$$F(-x)=f(-x)+f[-(-x)]=f(-x)+f(x)=F(x)$$

所以 $F(x)$ 也即 $f(x)+f(-x)$ 为 $(-l,l)$ 上的偶函数。

(三)周期性

定义 1.4　设 $f(x)$ 的定义域为 D,a 为非零常数,若 $\forall x\in D$ 恒有 $f(x+a)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为周期函数,如果 a 中存在最小的正数 T,则称之为函数 $f(x)$ 的周期。

例如:三角函数 $\sin x$、$\cos x$、$\tan x$、$\cot x$ 都是周期函数,它们的周期分别为 2π、2π、π、π。

例 7　证明 $D(x)=\begin{cases}1, x\text{ 为有理数}\\0, x\text{ 为无理数}\end{cases}$ 为周期函数,但函数周期不存在。

证　设 $a\neq0$ 为有理数,对任意实数 x,若 x 为有理数,则 $x+a$ 为有理数,有

$$D(x+a)=1=D(x)$$

若 x 为无理数,则 $x+a$ 为无理数,有

$$D(x+a)=0=D(x)$$

所以 $D(x)$ 为周期函数

由于有理数中不存在最小的正数,因此,$D(x)$ 不存在函数周期。

(四)有界性

定义 1.5 设 $f(x)$ 在 D 上有定义,如果 $\exists$ 常数 M, $\forall x\in D$ 恒有 $f(x)\leqslant M$,则称 $f(x)$ 在 D 有**上界**,M 为 $f(x)$ 在 D 上的一个上界;如果 $\exists$ 常数 m, $\forall x\in D$ 恒有 $f(x)\geqslant m$,则称 $f(x)$ 在 D 上有**下界**,m 为 $f(x)$ 在 D 上的一个下界;如果 $f(x)$ 在 D 上既有上界、又有下界,即:$\exists M>0$, $\forall x\in D$ 恒有 $|f(x)|\leqslant M$,则称在 D 上 $f(x)$ 有界。

例 8 证明 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ 有界。

证 因为 $1+x^2\geqslant 2|x|$

所以 $|f(x)|=\dfrac{|x|}{1+x^2}\leqslant\dfrac{1}{2}$

故 $f(x)$ 有界。

三、复合函数与反函数

(一)复合函数

定义 1.6 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 U,函数 $u=g(x)$ 的定义域为 X,且 $g(X)\subset U$,则 $y=f(g(x))$ 是定义在 X 上的函数,称为 f 与 g 的复合函数,也可记为 $f\circ g$ 或 $f\circ g(x)$, $x\in X$。

其中:$u=g(x)$ 称为中间变量或内函数,f 称为外函数。

例 9 若 $f(x)=e^x-1$, $\varphi(x)=2-x$,求 $f[\varphi(x)]$

解 $f[\varphi(x)]=e^{\varphi(x)}-1=e^{2-x}-1$

(二)反函数

定义 1.7 设 $f(x)$ 是定义在 D 上的函数,值域为 $Y=f(D)$。若 $\forall y\in Y$, $\exists$ 唯一 $x\in D$ 使得 $y=f(x)$,于是就得到一个以为 Y 定义域,y 为自变量,x 为因变量,D 为值域的新的函数关系,称为 $y=f(x)$ 的**反函数**,记为:

$$x=f^{-1}(y), y\in Y=f(D)$$

习惯上,x 为自变量,y 为因变量,于是 $y=f(x)$ 的反函数通常记为:

$$y=f^{-1}(x), x\in Y$$

函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形是关于直线 $y=x$ 对称的两条曲线。

例 10 求 $y=\dfrac{x}{1+x}$ 的反函数.

解 由 $y=\dfrac{x}{1+x}$ 得 $y(1+x)=x$, $x=\dfrac{y}{1-y}$

所以 $y=\dfrac{x}{1+x}$ 的反函数为　　$y=\dfrac{x}{1-x}\quad(x\neq1)$

四、初等函数

（一）基本初等函数

基本初等函数是指中学数学中常见的六种函数，包括：常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数。

1. 常数函数

$y=c$

例如：$y=0, y=4\cdots$（图 1－1）

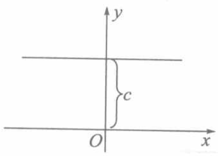


图 1－1

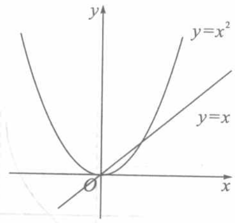


图 1－2

2. 幂函数

$y=x^{\alpha}\ (\alpha\neq0)$

例如：$y=x, y=x^2, y=x^3, y=\dfrac{1}{x}=x^{-1}, y=\sqrt{x}=x^{1/2}\cdots$　（图 1－2、图 1－3、图 1－4）

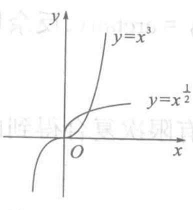


图 1－3

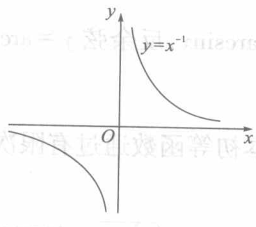


图 1－4

3. 指数函数

$y=a^x\ (a>0, a\neq1)$

例如：$y=2^x, y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x, y=e^x\ldots$（图 1－5）

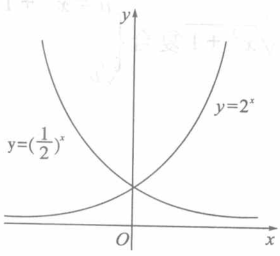


图 1－5

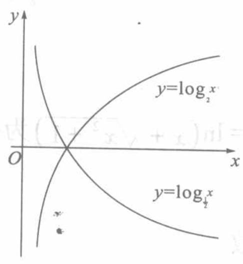


图 1－6

4. 对数函数

$$y=\log_a x(a>0, a\neq 1)$$

例如：$y=\log_2 x$，$y=\log_e x=\ln x$，$y=\log_{10} x=lgx$...（图 1－6）

5. 三角函数

包括：正弦 $y=\sin x$，余弦 $y=\cos x$，正切 $y=\tan x$，余切 $y=cotx$（图 1－7、图 1－8）。

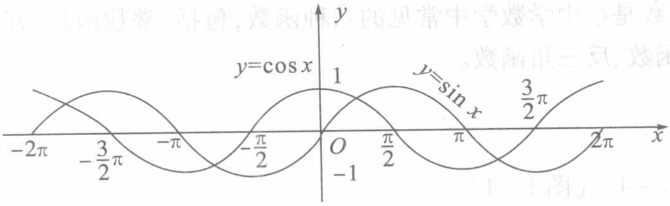


图 1－7

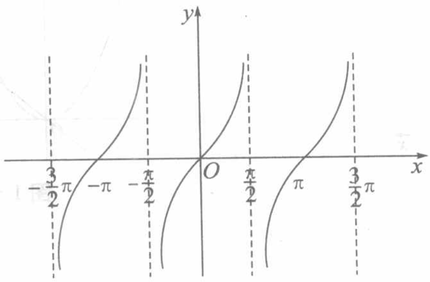


图 1－8

6. 反三角函数

包括：反正弦 $y=\arcsin x$，反余弦 $y=\arccos x$，反正切 $y=\arctan x$，反余切 $y=\operatorname{arccot} x$。

（二）初等函数

定义 1.8　由基本初等函数通过有限次四则运算或有限次复合得到的函数称为**初等函数**。

例 11　函数 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 是否为初等函数，若是，请指出函数是怎样由基本初等函数通过四则运算或复合得到的。

解　$$y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\text{复合}\begin{cases}\ln v\\ v=x+\sqrt{x^2+1}\text{加}\begin{cases}x\\ \sqrt{x^2+1}\text{复合}\begin{cases}u=x^2+1\text{加}\begin{cases}x^2\\1\end{cases}\\ \sqrt{u}\end{cases}\end{cases}\end{cases}$$

所以，函数 $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ 为初等函数。

（三）特殊函数

1. 绝对值函数

$$y=|f(x)|$$

由于 $y=|x|$ 是由 $|x|=\sqrt{x^2}$ 由 $\sqrt{u}$ 与 $u=x^2$ 复合得到，所以 $|x|$ 为初等函数。

2. 幂指函数

$$y=[f(x)]^{g(x)}$$

由于 $y=x^x=e^{\ln x^x}=e^{x\ln x}$ 由 e^u 与 $u=x\ln x$ 复合而成，$u=x\ln x$ 由 x 与 $\ln x$ 乘积而成。所以 x^x 为初等函数。

3. 分段函数

若一个函数的定义区间可以分成几个部分，每一部分中函数表达式各不相同，则称此函数为分段函数。

分段函数一般不是初等函数。

第二节　函数的极限

一、数列的极限

（一）数列

按一定顺序排列的数 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 称为数列，记为 $\{a_n\}$，数列中的每一个数均称为该数列的一项，其中 a_n 称为数列的通项或一般项。

例 1　写出下列数列的前五项：

(1) $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$；　(2) $\{(-1)^n\}$；　(3) $\left\{\dfrac{2n+1}{n^2}\right\}$；　(4) $\left\{\dfrac{1+(-1)^n}{n}\right\}$。

解　(1) $1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{5}$

(2) $-1,1,-1,1,-1$

(3) $3,\dfrac{5}{4},\dfrac{7}{9},\dfrac{9}{16},\dfrac{11}{25}$

(4) $0,1,0,\dfrac{1}{2},0$

例 2　根据所给数列前几项，写出下列数列的一般项 a_n：

(1) $1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{8},\dfrac{1}{16},\cdots$；　(2) $\dfrac{1}{4},\dfrac{4}{9},\dfrac{9}{16},\dfrac{16}{25},\dfrac{25}{36},\cdots$；

(3) $2,-\dfrac{4}{2},\dfrac{8}{3},-\dfrac{16}{4},\dfrac{32}{5},\cdots$；　(4) $\dfrac{4}{2},\dfrac{8}{6},\dfrac{16}{24},\dfrac{32}{120},\dfrac{64}{720},\cdots$。

解　(1) $a_n=\dfrac{1}{2^{n-1}},n=1,2,3,\cdots$

(2) $a_n=\dfrac{n^2}{(n+1)^2},n=1,2,3,\cdots$

(3) $a_n=(-1)^{n-1}\dfrac{2^n}{n},n=1,2,3,\cdots$

(4) $a_n=\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}, n=1,2,3,\cdots$

(二)数列的极限

考察数列$\left\{\dfrac{n+1}{n}\right\}$:

$$\frac{2}{1},\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4},\cdots,\frac{101}{100},\cdots,\frac{1001}{1000},\cdots,\frac{n+1}{n},\cdots$$

容易看出,当项数 n 沿着自然数 1,2,…的顺序无限增大的过程中(记作 $n\to\infty$),数列的各项无限接近 1,我们将这一变化趋势称为极限。

定义 1.9(描述性定义)当 n 无限增大时,数列$\{a_n\}$无限接近常数 a,则称数列$\{a_n\}$收敛于 a,或极限存在,极限值为 a。记为

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a \quad 或 \quad a_n\to a(n\to\infty)$$

否则称数列$\{a_n\}$发散,或无极限。

例如:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$$

为了精确的表明"无限增大时","无限接近"的含义,我们进一步考察数列$\left\{\dfrac{n+1}{n}\right\}$的各项与 1 的距离$|a_n-1|=\left|\dfrac{n+1}{n}-1\right|=\dfrac{1}{n}$:

当 $n=1,2,3,4,\cdots,100,\cdots,1000,\cdots,n,\cdots$,距离

$$\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{100},\cdots,\frac{1}{1000},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$$

可任意小。

也就是说,只要 n 足够大,就能使$|a_n-1|$小于事先给定的无论多么小的正数。例如:给定 $\varepsilon=0.0001$,则由

$$|a_n-1|=\frac{1}{n}<\varepsilon=0.0001$$

可得:$n=10\,000$,即从第 10 001 项开始,数列各项的值均满足$|a_n-1|<\varepsilon$。于是有:

定义 1.10 ($\varepsilon-N$ 定义)设$\{a_n\}$是一个数列,a 为常数。若$\forall\varepsilon>0,\exists N>0$,当 $n>N$ 时,恒有不等式

$$|a_n-a|<\varepsilon$$

成立,则称数列$\{a_n\}$**收敛**于 a,或极限存在,**极限**值为 a。

例 3 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$

证 $\forall\varepsilon>0$,因为$\left|\dfrac{1}{n}-0\right|=\dfrac{1}{n}$,因此,要使$\left|\dfrac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$,只要$\dfrac{1}{n}<\varepsilon$,即 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$即可

故可取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$,满足定义