高等學校教學用書

# 微積分學教程

第二卷　第三分册

Г. М. ФИХТЕНГОЛЬЦ 著

徐獻瑜、冷生明、梁文騏等譯

高等教育出版社

高等學校教學用書

# 微積分學教程

## 第二卷 第三分册

Г. М. 菲赫金哥爾茨著
徐獻瑜、冷生明、梁文騏等譯

高等教育出版社

本書係根據蘇聯國立技術理論書籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）出版的菲赫金哥爾茨（Г. М. Фихтенгольц）著“微積分學教程”（Курс дефференциального и интегрального исчисления）第二卷 1951 年版譯出。原書經蘇聯高等教育部審定爲國立綜合大學數學系教學參考書。

本書第二卷中譯本分三册出版。第三分册的內容是五段積分及依賴於參數的積分，由北京大學徐獻瑜、冷生明、梁文騏等同志合譯，並由北京大學數學力學系高等數學教研室負責校對。

本書第一卷第一分册、第二卷第一分册、第三卷第一、二分册由商務印書館出版，其餘各册改由本社出版。


**微 積 分 學 教 程**

第二卷 第三分册 書號119（課114）

非 赫 金 哥 爾 茨 著

徐 獻 瑜 等 譯

高 等 教 育 出 版 社 出 版

北京琉璃廠一七〇號

（北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號）

新 華 書 店 總 經 售

京 華 印 書 局 印 刷

北京南新華街甲三七號

開本850×1092—1/28 印張 10 字數 260,000

一九五四年十月北京第一版 印數 1—6,000

一九五四年十月北京第一次印刷 定價￥15,500

# 第三分册目錄

## 第十三章　瑕積分

## 第十四章 依賴於參數的積分

不存在或發散。[但是有時候爲了方便也把這無窮極限(在帶有定號的時候)看作積分(1)的值。]

試看例題 1) 函數 $\frac{1}{1+x^2}$ 在任意有窮區間 $[0,A]$ $(A>0)$ 上都是可積的,而且我們有

$$\int_0^A \frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arc\,tg} x\Big|_0^A=\operatorname{arc\,tg} A.$$

因這積分當 $A\to+\infty$ 時具有有窮極限 $\frac{\pi}{2}$,所以由 0 到 $+\infty$ 的積分收斂而且其值爲

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{A\to+\infty}\int_0^A=\frac{\pi}{2}.$$

2) 試研究這樣一個問題:問對於指數 $\lambda>0$ 的那些值,瑕積分

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\lambda}\quad(a>0)\tag{2}$$

是存在的。先設 $\lambda\neq1$,則

$$\int_a^A\frac{dx}{x^\lambda}=\frac{1}{1-\lambda}x^{1-\lambda}\Big|_a^A=\frac{1}{1-\lambda}(A^{1-\lambda}-a^{1-\lambda}).$$

這表達式當 $A\to+\infty$ 時具有極限爲 $\infty$ 或有窮數 $\frac{1}{\lambda-1}a^{1-\lambda}$,要看 $\lambda<1$ 或 $\lambda>1$ 而定。今若 $\lambda=1$,則

$$\int_a^A\frac{dx}{x}=\log x\Big|_a^A=\log A-\log a,$$

因而當 $A\to+\infty$ 時得到極限 $\infty$。

這樣看來,積分(2)在 $\lambda>1$ 時收斂(且以 $\frac{1}{\lambda-1}a^{1-\lambda}$ 爲其值),而在 $\lambda\leqslant1$ 時發散。

與(1)同樣,函數 $f(x)$ 由 $-\infty$ 到 $a$ 的積分定義爲:

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx=\lim_{A'\to-\infty}\int_{A'}^a f(x)dx.\quad(A'<a),\tag{3}$$

而且一樣,函數 $f(x)$ 由 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的積分定義爲:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\lim_{\substack{A'\to-\infty\\A\to+\infty}}\int_{A'}^A f(x)dx.$$

在討論積分(1)時所引進的術語這裏也照樣適用。

在最後這一情形，我們可以取任意一數 $a$ 而把末後這一積分寫成

$$\int_{A'}^{A} f(x)dx=\int_{A'}^{a} f(x)dx+\int_{a}^{A} f(x)dx,$$

因而當 $A'\to-\infty$ 與 $A\to+\infty$ 時左邊積分的極限的存在顯然是與右邊兩積分的極限(1)與(3)的存在相同。這樣，由 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的積分就可以用等式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{a} f(x)dx+\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$$

(假定右邊兩積分都存在)來下定義。這樣定義出來的積分值事實上並不依賴於點 $a$ 的選擇。

例題：

3) $$\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{A'\to-\infty}\int_{A'}^{0}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{A'\to-\infty}(-\operatorname{arc\,tg} A')=\frac{\pi}{2};$$

4) $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\int_{0}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{0}=\pi.$$

436. **積分學基本公式的用法**　在以上所舉例題中都是利用原函數先在有窮區間上取積分然後再取極限。我們現在要把這兩個步驟合併在一個公式裏面。

例如假定函數 $f(x)$ 是定義在區間 $[a,+\infty)$ 上而且在這區間的任一有窮部分 $[a,A]$ 上都是可積的。如果同時 $f(x)$ 還有一個原函數 $F(x)$ 存在於整個區間 $[a,+\infty)$ 上，則按照積分學基本公式[296]當有

$$\int_{a}^{A} f(x)dx=F(A)-F(a)=F(x)\Big|_{a}^{A}.$$

由此可見，要說存在瑕積分(1)就等於說存在有窮極限

$$\lim_{A\to+\infty} F(A)=F(+\infty),$$

於是

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=F(+\infty)-F(a)=F(x)\Big|_a^{+\infty}.$$

同様,若把 $F(-\infty)$ 看成極限 $\lim_{A'\to-\infty} F(A')$,則

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx=F(x)\Big|_{-\infty}^{a},\quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}.$$

雙重替換的求值牽涉到其中出現的極限的存在(而且有窮)的問題,如果可以求值,那麼就證實了所算積分的存在。

我們要再講一些例題。

437. 例題 1) $\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx\quad(a>0).$

因原函數

$$F(x)=-\frac{a\sin bx+b\cos bx}{a^2+b^2}\cdot e^{-ax},$$

所以 $F(0)=-\frac{b}{a^2+b^2}$, $F(+\infty)=0$; 因而

$$\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx=\frac{b}{a^2+b^2}.$$

同様

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx=\frac{b\sin bx-a\cos bx}{a^2+b^2}\cdot e^{-ax}\Big|_0^\infty=\frac{a}{a^2+b^2}.$$

2) $$\int_0^\infty\frac{dx}{1+x^4}=\left[\frac{1}{4\sqrt{2}}\log\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}(x\sqrt{2}+1)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}(x\sqrt{2}-1)\right]\Big|_0^\infty=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

3) $$\int_{\frac{2}{\pi}}^\infty\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,dx=\cos\frac{1}{x}\Big|_{\frac{2}{\pi}}^\infty=1.$$

4) $\int\limits_0^\infty \sin x\, dx$。這裏原函數是 $-\cos x$，但雙重替換 $-\cos x\Big|_0^\infty$ 沒有意義，因 $\cos x$ 當 $x\to\infty$ 時不趨向任何極限：這就是說積分不存在。

5) $\int\limits_0^\infty \frac{x\log x}{(1+x^2)^3}dx.$

用分部積分法與展成簡分式法，得到原函數

$$F(x)=\int\frac{x\log x}{(1+x^2)^3}dx=$$

$$=-\frac{1}{4}\cdot\frac{\log x}{(1+x^2)^2}+\frac{1}{4}\log x-\frac{1}{8}\log(1+x^2)+\frac{1}{8}\,\frac{1}{1+x^2}.$$

當 $x\to 0$ 時我們有 $\lim F(x)=\frac{1}{8}$；這極限值也就是函數在 $x=0$ 處所取的值。但另一方面，$F(+\infty)=0$。所以積分值是 $-\frac{1}{8}$。

6) 雙曲線 $xy=1$ 繞 $x$ 軸旋轉得一立體形，試計算其相當於 $x\geqslant 1$ 那一部分的體積與側面積。

這立體形相當於變數 $x$ 由 1 到 $A(A>1)$ 的有窮部分的體積與側面積爲

$$V_A=\pi\int\limits_1^A\frac{dx}{d^2},\quad S_A=2\pi\int\limits_1^A\frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\,dx.$$

立體形之全部（開展到無窮）體積 $V$ 與側面積 $S$ 自然就以這些量的極限爲其值，這也就無異乎設

$$V=\pi\int\limits_1^\infty\frac{dx}{x^2},\quad S=2\pi\int\limits_1^\infty\frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\,dx.$$

但是這裏雖然第一個積分收斂［435, 2)］到有窮值 $\pi$，成爲所求的體積，但是第二個積分却是發散的，因而表明側面積的值爲無窮。

要證實最後這一點，只需注意

$$S_A>2\pi\int\limits_1^A\frac{dx}{x}=2\pi\log A,$$

因而 $S_A$ 隨 $A$ 無窮增大而亦趨向無窮。

7) 假定在坐標原點 $O$ 有質量 $m$，吸引一個在 $x$ 軸上距離 $O$ 爲 $x$ 而質量爲 1 的質點 $M$，其力量（按照牛頓定律）爲

$$F=\frac{m}{x^2}.$$

試問當質點 $M$ 從 $x=r$ 這個位置移到無窮遠時，引力 $F$ 所作的功 $A$ 是多少？

所作的功顯然是負的，因爲力的方向與運動的方向相反。把第 344 目公式(9)推廣到這種情形，即得：

$$A=\int_r^{\infty}-\frac{m}{x^2}dx=\frac{m}{x}\Bigg|_r^{\infty}=-\frac{m}{r}.$$

當質點 $M$ 從無窮遠往回移動到 $x=r$ 這個位置，牛頓引力就作了正的功 $\frac{m}{r}$。這個量叫做所討論的力在 $M$ 這一點的位，而且就用以測量蓄積在這一點的位能的大小。

8) 對於一定質量的氣體從體積 $v_1$ 膨脹到體積 $v_2$ $(v_2>v_1)$ 所作的功，我們已有公式[345(10)]：

$$A=\int_{v_1}^{v_2}p\,dv.$$

假設給定質量爲某一定值的理想氣體，當壓力爲 $p_1$ 時體積爲 $v_1$。假設這氣體膨脹到無窮而且是絕熱的，也就是說和周圍環境間沒有熱的流通。在這些條件下，我們已知[352, 3)]布廄松公式成立：

$$pv^k=c\quad\left(k=\frac{c_p}{c_v}>1\right).$$

於是這氣體膨脹所可能作的功爲

$$A_{\max}=\int_{v_1}^{\infty}cv^{-k}dv=\frac{c}{1-k}\,\frac{1}{v^{k-1}}\Bigg|_{v_1}^{\infty}=\frac{c}{k-1}\cdot\frac{1}{v_1^{k-1}}.$$

注意 $c=p_1v_1^k$ 而且把它代入所得式，即得結果爲

$$A_{\max}=\frac{p_1v_1}{k-1}.$$

9) 在第 347 目問題 8)裏我們曾求出有窮線段上的電流作用在單位磁極上的力 $F$：

$$F=\int_{s_1}^{s_2}\frac{aI}{(a^2+S^2)^{3/2}}ds.$$

我們現在要看導體(兩端伸展)爲無窮的情形，即設 $s_1=-\infty$，$s_2=+\infty$。於是

$$F=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{aI}{(a^2+s^2)^{3/2}}ds=\frac{I}{a}\cdot\frac{s}{\sqrt{a^2+s^2}}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{2I}{a}.$$

當然，無窮的導體只是一種假想；不過所得結果却能成爲有用的：在導體非常長的情形下，我們很可以把它看成近似於無窮，因爲由此可以得到十分簡單的公式！

10) 若在 $t=0$ 這瞬間把電流強度爲 $I_0$ 而有自感的電路斷開，則引起一種斷開餘電，服

從這個規律:

$$I=I_0\cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

[參看 350, 4)(a); 這裏我們仍舊用以前的記號]。現在我們要算出這電流所給出的全部焦耳熱 $Q$。

在時間 $[t, t+dt]$ 這一段的熱的元素量顯然爲

$$dQ=I^2R\cdot dt.$$

在無窮區間上求和即得:

$$Q=\int_0^{\infty} I^2R\cdot dt=RI_0^2\cdot\int_0^{\infty} e^{-\frac{2R}{L}t}dt=\frac{1}{2}LI_0^2.$$

我們要注意,雖然電流經過有窮長的一段時間就已覺察不出來,但是要確定轉變爲熱的電流全部能量,就仍然必須在無窮區間上求積分。

**438. 積分存在的條件**　瑕積分 $\int_a^{\infty} f(x)dx$ 的存在問題,按照定義(1)就歸結到 $A$ 的函數

$$F(A)=\int_a^A f(x)dx \tag{4}$$

當 $A\to+\infty$ 時是否有有窮極限存在的問題。

運用波爾札諾與歌西的判斷法[58]到這個函數,即可把瑕積分存在的條件敍述成下列形式:

要瑕積分 $\int_a^{+\infty}(fx)dx$* 存在,必需也僅需對於每一數 $\varepsilon>0$ 都有一數 $A_0>a$ 使得只要 $A>A_0$ 而且 $A'>A_0$ 就有不等式

$$|F(A')-F(A)|=\left|\int_a^{A'}f(x)dx-\int_a^A f(x)dx\right|=\left|\int_A^{A'}f(x)dx\right|<\varepsilon.$$

根據這個判斷法很容易證明下面這個命題:

---

* 這裏假定函數 $f(x)$ 在每一區間 $[a, A]$ $(A>a)$ 上都(在通常意義下)爲可積的。

若積分 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 存在，則*積分 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 也存在。

其實，運用上述判斷法到積分 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$，卽可看出，由於該積分的存在，就對於任意 $\varepsilon>0$ 都存在一個 $A_0>a$，使

$$\int_A^{A'}|f(x)|dx<\varepsilon,$$

只要 $A'>A>A_0$。但是顯然 $\left|\int_A^{A'}f(x)dx\right|\leqslant\int_A^{A'}|f(x)|dx$，所以對於這些 $A, A'$ 自然有不等式

$$\left|\int_A^{A'}f(x)dx\right|<\varepsilon;$$

由此引用上述判斷法卽知積分 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 存在。

我們要注意，由積分 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 的存在，並不能普遍地推論到積分 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 也存在。基於這個事實我們就從一般的收斂情形裏特別地劃分出下述這個情形來：若積分 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 與 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 同時收斂，則積分 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 就說是絕對收斂，而函數 $f(x)$ 則說是在區間 $[a,+\infty)$ 上絕對可積。不絕對收斂的積分的例子將在下一目中舉出。

---

* 參看前頁脚註。

由上面證明的積分存在的判斷法可以推出下列這些判斷法：

(а) 若積分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 存在則積分 $\int_{a_0}^{+\infty} f(x)dx\,(a_0>a)$ 也存在，反之亦然；

(б) 若積分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 存在則積分 $\int_a^{+\infty} k\cdot f(x)dx$ 也存在，其中 $k$ 爲常數；

(в) 若積分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 與 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 同時存在，則積分 $\int_a^{+\infty} [f(x)+g(x)]dx$ 也存在。

但是所有這些判斷法也都可以簡單地直接從瑕積分的定義得出來。

讀者可以把這些當作習題來證明。

439. **與無窮級數的聯繫**　我們知道函數的極限這一概念可以用兩種方法來表達，即'用 $\varepsilon$-$\delta$ 說法'與'用貫數說法'[52, 53]。若把極限的第二種定義法用到函數 $F(A)$[見(4)]，則瑕積分的定義(1)可以解釋成這樣：無論如何選取一列上升到無窮的數 $\{A_n\}$ $(A_n>a)$，相應的積分貫數 $\left\{\int_a^{A_n} f(x)dx\right\}$ 都應趨向同一個有窮的極限*，這也就是瑕積分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 的值。

但是就另一方面來說，貫數 $\left\{\int_a^{A_n} f(x)dx\right\}$ 的極限問題也就是級數

---

* 只要假設所有貫數 $\left\{\int_a^{A_n} f(x)dx\right\}$ 都收斂，就已經可以推出它們的極限一定是相同的。

$$\int_a^{A_1}+\left\{\int_a^{A_2}-\int_a^{A_1}\right\}+\left\{\int_a^{A_3}-\int_a^{A_2}\right\}+\cdots=\int_a^{A_1}+\int_{A_1}^{A_2}+\int_{A_2}^{A_3}+\cdots$$

的和數問題[353]。

於是可以斷言：要瑕積分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 存在，必需也僅需對於任一列數 $A_n\to+\infty$，級數

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_{n-1}}^{A_n} f(x)dx \quad (A_0=a)$$

都收斂到同一個和數；這和數也就是瑕積分的值。

我們要注意，在函數 $f(x)$ 是正的（或非負的）這種情形，要瑕積分收斂就只要它對於特別選定的一列數，$A_n\to+\infty$ 爲收斂就够了。因爲這時（4）是對於 $A$ 的上升函數，而且以這個級數的和數爲界，所以當 $A\to+\infty$ 時它有有窮的極限。

把積分的收斂問題化簡成級數的收斂問題，這種化簡往往很有用處，因爲這樣就有可能運用級數的收斂與發散的許多判別法。

當作例題，我們來看下面這個重要的積分：

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx.$$

因 $\sin x$ 當 $x$ 增加時輪流取正值與負值，變號的地點在 $n\pi(n=1, 2, 3, \cdots)$，所以我們很自然地就拿這些數作爲 $A_n$ 來考慮級數

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin x}{x}dx. \tag{5}$$

把普通項 $v_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin x}{x}dx$ 施行變數替換 $x=n\pi+t$ 即得

$$v_n=(-1)^n\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{n\pi+t}dt.$$

由此可見，級數的項是正負相間而絕對值遞減的。還有，當 $n>0$ 時

$$|v_n|=\int_0^\pi \frac{\sin t}{n\pi+t}dt<\int_0^\pi \frac{1}{n\pi}dt=\frac{1}{n},$$

所以級數的項的絕對值隨附標無限增大而趨向零。於是級數(5)爲萊不尼慈型，而由已知定理[369]知其爲收斂。今以 $I$ 表其和。這樣就對於任意 $\varepsilon>0$ 都有一數 $N$，使 $n\geqslant N$ 時有不等式

$$\left|\int_0^{n\pi} \frac{\sin x}{x}dx-I\right|<\varepsilon. \tag{6}$$

現在單'用 $\varepsilon$-$\delta$ 說法'就可完成瑕積分存在的證明。假定 $A>N\pi$；則有一自然數 $n_0$ 使 $n_0\pi\leqslant A<(n_0+1)\pi$，因而顯然 $n_0\geqslant N$。因函數 $\sin x$ 在區間 $n_0\pi$ 到 $(n_0+1)\pi$ 不變號，所以積分 $\int_0^A$ 介於積分 $\int_0^{n_0\pi}$ 與 $\int_0^{(n_0+1)\pi}$ 之間。但是後面這兩個積分則根據 (6) 又都介於 $I-\varepsilon$ 與 $I+\varepsilon$ 之間，所以積分 $\int_0^A$ 也必定如此。於是終於對於所有的 $A>N\pi$ 都有

$$\left|\int_0^A \frac{\sin x}{x}dx-I\right|<\varepsilon,$$

因而存在積分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx=\lim_{A\to+\infty}\int_0^A \frac{\sin x}{x}dx=I^*.$$

這裏我們要順便注意到一件事實，即這個積分不絕對收斂，也就是積分 $\int_0^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}dx$ 發散。這件事實很容易把積分表成級數來證實。其實，假如積分收斂，我們就會和剛才一樣，有

$$\int_0^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^\pi \frac{\sin t}{n\pi+t}dt.$$

但是 $n\pi+t<(n+1)\pi$，所以

$$\int_0^\pi \frac{\sin t}{n\pi+t}dt>\frac{1}{(n+1)\pi}\cdot\int_0^\pi \sin t\,dt=\frac{2}{(n+1)\pi},$$

然而級數 $\frac{2}{\pi}\sum\frac{1}{n+1}$ 却是發散的！[356，1)]。

---

* 以後[455，3°；484，2°]我們會看見 $I=\frac{\pi}{2}$。這裏我們只談積分的收斂問題。