



新世纪高等学校教材



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

DIANCICHANG LILUN YU WEIBO GONGCHENG

(上册)

电磁场理论与微波工程

李大年 主 编

李大年 编 著
杨曙辉



北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

新世纪高等学校教材

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

(上册)

电磁场理论与微波工程



北京师范大学出版集团

BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP

北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

电磁场理论与微波工程 / 李大年主编. —北京: 北京师范大学出版社, 2009.8

ISBN 978-7-303-10392-8

I. 电… II. 李… III. ①电磁场—理论—教材 ②微波技术—教材 IV. O441.4 TN015

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 117093 号

营销中心电话 010-58802181 58808006
北师大出版社高等教育分社网 <http://gaojiao.bnup.com.cn>
电子信箱 beishida168@126.com

出版发行: 北京师范大学出版社 www.bnup.com.cn
北京新街口外大街 19 号
邮政编码: 100875

印刷: 北京京师印务有限公司

经销: 全国新华书店

开本: 170 mm × 230 mm

印张: 11.75

字数: 196 千字

版次: 2009 年 8 月第 1 版

印次: 2009 年 8 月第 1 次印刷

定价: 18.00 元

策划编辑: 梁志国 责任编辑: 梁志国

美术编辑: 高霞 装帧设计: 高霞

责任校对: 李菡 责任印制: 李丽

版权所有 侵权必究

反盗版、侵权举报电话: 010-58800697

北京读者服务部电话: 010-58808104

外埠邮购电话: 010-58808083

本书如有印装质量问题, 请与印制管理部联系调换。

印制管理部电话: 010-58800825

序 言

电磁场理论、微波工程、天线理论、电波传播、电磁(波)散射、电磁兼容等可以合称为电磁场工程,它是现代科学与技术中一个极重要的领域。它在国防科学、工程技术、科学研究、医疗卫生以及日常生活中具有广泛的应用。而且随着社会的进步,科学技术的发展,其应用范围日益拓展,例如近年来在IT领域中发展起来的蓝牙技术,无线局域网(WLAN)技术,在医疗领域中磁共振技术,CT技术,其他如汽车电子技术,射频识别技术的发展也无一不与电磁场工程有关。

电子工程的理论基础可以分为场与路两方面,即电磁场理论与电路理论。我们知道任何一种电磁现象都不会局限于空间一小部分内(如线路内),所以严格说来研究电磁现象的理论应是场理论,路理论只是在一定近似条件下由场理论派生出的次级理论。当今,电磁波的应用领域中愈来愈向电磁波波谱的高端开拓,电子工程中原来一些只用电路理论就可以来研究的分支学科,如高、低频电子电路,微电子学等也需要用电磁场理论来处理了。

由于电磁理论在电机工程、电子工程、通信及信息工程中的重要性,所以国内外的著名大学无不把电磁场理论列为电机及电子工程系、通信及信息工程系等专业学生的必修课,而且也是电机、电子工程师应具备的基本素养。

本书可作为电子科学与技术、电子信息科学与技术、通信科学与技术有关专业的学生学习电磁场理论与微波技术课程的教科书或教学参考书。

本书内容包括麦克斯韦电磁理论、电磁场问题解法、

电磁辐射与天线基础、电磁场的数值计算方法、传输线与导波理论、微波网络、微波电路及微波系统简介等,基本涵盖了工程电磁场理论及其应用的主要内容。

本书分上、下两册出版。上册电磁场理论由李大年编写,下册微波工程由李大年、杨曙辉合作编写,全书由李大年主编。

作者在编写本书时对自己提出的要求:第一是篇幅要小,讲解要简明,逻辑要清晰,内容要适当的全面。第二是理论紧密联系实际,不是只介绍一些个别的器件原理,而是要与工程系统相结合,使学生们学过本课程后,既见树木又见森林,这对于面向一些宽口径专业的同学求职来说特别重要。第三是尽量不用烦琐的数学推导,以免在教学中引起学生的厌烦,在定理的证明方面不追求数学的严谨,必要时引用一些特例来证明,但是充分解释物理意义。第四是矢量分析不必单独另辟篇章介绍,而是结合高等数学中的曲线积分和曲面积分在适当的物理推导过程中,引入矢量分析和场论中的一些基本概念,矢量分析中的一些恒等式则是在教学需要前,安排学生作为习题证出,这样还可以加深学生们的印象。第五是要适当介绍一些新技术新发展,如电磁场的数值计算方法、智能天线、微波 CAD 软件等。

国内外相当多的学电的学生认为电磁场理论很难学,视为畏途。其实电磁理论本身是逻辑性非常强的,体系是自洽的,物理概念和物理图像也是非常清晰,除了需要一定的数理方程知识外,只要把握住理论体系的逻辑结构是可以学好的,编者就是抱着这一决心来编写本书的,希望与读者共勉。

本书是在编者多年讲授本课程教材的基础上,参考了国内外众多的相关教材增删编纂而成,限于编者的水平,难免有不少缺点和错误,殷切希望广大读者指正。

本书编写过程中陈学东高工,何珺老师帮助作了许多工作,编者在此表示感谢。

本书分上、下两学期讲授,参考学时为每学期 60 学时,如果删节某些章节也可以用 70~80 学时一学期讲完。

目 录

第 1 章 宏观电磁现象的基本规律 /1

- § 1 电磁场的基本方程式 1
- § 2 麦克斯韦方程组 7
- § 3 物态方程(本构关系) 边界
条件 12

第 2 章 静电场及其解法 /16

- § 4 静电场的基本方程式 16
- § 5 泊松方程和拉普拉斯方程 18
- § 6 静电场的唯一性定理 格林恒
等式 20
- § 7 镜像法 21
- § 8 分离变量法 24
- § 9 格林函数法 30
- § 10 复变函数法 33

第 3 章 恒定电场 电流场 /36

- § 11 金属导电性理论 欧姆定律 36
- § 12 电流连续性原理 电动势 37
- § 13 电流场与静电场的对偶性 38

第4章 恒定磁场 /42

§ 14	磁场的矢势	42
§ 15	同轴线内的磁场 电感	43
§ 16	缓变电磁场,	46
§ 17	电路理论与场理论的关系	47

第5章 时变电磁场 /50

§ 18	波动方程式 电磁波	50
§ 19	电磁场的能量守恒定律 电磁场中的能流矢量	53
§ 20	电磁场的唯一性定理	54
§ 21	电磁场的动量	55
§ 22	电磁波的极化	57
§ 23	电磁波在导电介质中的传播 趋肤效应	58
§ 24	电磁波在介质分界面上的反射和折射	60

第6章 波导与谐振器 /67

§ 25	导行电磁波 矩形波导	67
§ 26	矩形波导中的主模 TE_{10} 模	76
§ 27	圆波导	84
§ 28	同轴线	89
§ 29	圆柱形介质波导与光纤	91
§ 30	金属空腔谐振器	97
§ 31	同轴线谐振器及微带线谐振器	104
§ 32	介质谐振器	106

第7章 电磁辐射与天线基础 /111

§ 33	电磁辐射	111
§ 34	等效定理 互易定理 对偶定理	116
§ 35	天线的基本概念及天线的技术参数	120

§ 36	对称振子天线	125
§ 37	天线阵	129
§ 38	智能天线简介	133
§ 39	惠更斯原理和基尔霍夫公式	135
§ 40	面天线	137
§ 41	面天线的分析计算方法	140
§ 42	口径面的辐射 波导开口的辐射	142

第 8 章 电磁场的数值计算方法 /145

§ 43	有限差分法	145
§ 44	有限单元法	150
§ 45	矩量法	158
§ 46	时域有限差分法	163

习 题 /169

参考文献 /180

第1章 宏观电磁现象的基本规律

§1 电磁场的基本方程式

静电场

人类对电的认识最早起源于摩擦生电，我国古代及古希腊均有“琥珀拾芥”的记述，即摩擦过的琥珀可以吸引微小的物体，如木屑、芥子等。这种吸引力或排斥力是一种可以不直接接触的作用力，显然不是万有引力，而应是一种新型的力，称之为电力。物体能够互相吸引或排斥是因为它们带有电荷。英语的“electron”即是希腊语琥珀的译音。

按照现代物理学的观点，在电荷的周围产生力场，这个力场，可由在场内引入的试探电荷受到一个作用力显现出来。按照历史习惯，这一力场称为电场。试探电荷也会产生电场，这会使原来的电场分布发生改变，为了不影响原来的电场分布，我们要求试探电荷足够小。电场的强弱和方向用电场强度 E 来表示，定义电场强度

$$E = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{F}{q}, \quad (1-1)$$

式中 F 为试探电荷受到的力， q 为试探电荷的电量。

对于点电荷 q 所产生的电场，电场强度 E 由库仑定律给出：

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \mathbf{R}, \quad (1-2)$$

式中 $\mathbf{R}$ 为由 q 至电场中观察点的矢量， $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ 为真空的介电常数。由于电场中每一点都定义了一个矢量 E ，所以电场是电场强度 E 的矢量场。

现在我们来讨论一下这个相互作用的电力是靠什么媒介来传递的。在电磁理论发展的历史上，有相当一段时期，受牛顿万有引力的影响，科学家认为这是一种不借助于任何媒介的直接超距作用力。然而它不可能是两个电荷之间的直接超距作用。因为当一个电荷的电量或位置发生变化时，作用力就应发生变

注：库仑定律是一个实验定律。但在本书论述的体系中，把它看做一个先验的事实。这样公式(1-2)可看做点电荷电场强度的定义式。

化, 那么另一个电荷就需要感知这个电荷的变化, 这是难以想象的. 值得提出的是, 牛顿本人也不相信超距作用, 他认为无生命的物体不凭借任何媒介本能地直接超距作用是神秘的和荒唐的. 所以正确的看法应当是: 电荷产生电场, 在空间不同的位置有不同的场强, 当另一电荷处在不同的位置时它就会受到不同的力, 场是传递力的媒介, 这样一种看法就是所谓的场理论.

英国科学家法拉第认为电荷是通过力线相互作用的, 电荷是力线的源, 电荷的周围充斥着力线. 这种力线我们现在称之为电场线.

定义电场线 l 为有向曲线, l 上任一点的切线 dl 的方向与该点的电场强度 E 的方向相同, 用直角坐标表示时, 有

$$\begin{aligned} E &= e_x E_x + e_y E_y + e_z E_z, \\ dl &= e_x dx + e_y dy + e_z dz, \end{aligned}$$

因而

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}, \quad (1-3)$$

这就是电场线的曲线方程. 用电场线描绘电场时, 规定电场线在场中的疏密与该处电场强度的大小成正比.

在电场中取任一面元 dS , 定义 E 与 dS 的标量积

$$d\psi = E \cdot dS = E_n dS, \quad (1-4)$$

为电通量 $d\psi$, 则 $E_n = \frac{d\psi}{dS}$, 由此电场强度 E 可解释为电通量密度或电场线密度.

在电场中做任一闭合曲面 S 包围点电荷 q , 则穿过曲面 S 的总通量 ψ 为

$$\psi = \oint_S d\psi = \oint_S E \cdot dS = \oint_S \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} R \cdot dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S d\Omega = \frac{q}{\epsilon_0}, \quad (1-5)$$

(参见图 1-1, 上式中 Ω 为立体角) 这就是真空中电场的高斯定理.

如果电场是由 N 个点电荷产生, 由于 E 与 q 之间的线性关系, 则可引用叠加原理, 因此高斯定理可以推广为:

$$\psi = \oint_S E \cdot dS = \frac{\sum_{i=1}^N q_i}{\epsilon_0}. \quad (1-6)$$

把上式再推广到电荷 q 以体密度 ρ 分布, 而介质为均匀介质时, 则有

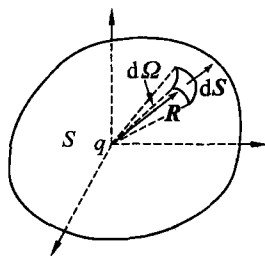


图 1-1

$$\psi = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon} = \frac{\iiint_V \rho dV}{\epsilon}. \quad (1-7)$$

式中 ϵ 为介质的介电常数, 如令 $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, 上式可写为

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \rho dV,$$

式中 $\mathbf{D}$ 称为电位移矢量.

上式说明: 在电场中穿出任一闭合曲面 S 的电位移通量等于该曲面所包围的体积 V 中所含有的电量的代数和. 这就是有介质存在时的高斯定理. 由 (1-7) 式可知, 当 $q > 0$ 时, $\psi > 0$; $q < 0$ 时, $\psi < 0$; $q = 0$ 时, $\psi = 0$. 这说明电荷是电通量的源, 高斯定理说明了场与源的关系.

电流的磁场

人们很早就发现磁极之间有相互吸引力或排斥力, 这称之为磁力. 18 世纪科学家发现电流之间也有相互作用力, 电流与磁铁之间也有相互作用力. 法国科学家安培把这种力归结为电流起源, 这就把原来互不相关的静磁学与动电学联系在一起了.

按照现代物理学的观点, 在电流的周围也产生一个力场. 这一力场称为电流的磁场. 电流周围的小电流元 Idl 受磁场的作用力 $d\mathbf{F}$. 为了描述磁场, 仿照电场, 引进磁感应强度矢量 $\mathbf{B}$, 定义 $\mathbf{B}$, $\mathbf{F}$, Idl 三者的关系为

$$d\mathbf{F} = Idl \times \mathbf{B}. \quad (1-8)$$

力 $d\mathbf{F}$ 的方向并不沿着电流元 Idl 的方向, 而是与之垂直, 这是一种横向力 (这与在此之前的, 即电磁学之前物理学研究的力不同, 牛顿力学中力的方向都是沿着施力点与作用点之间连线的方向), 这就是磁场力. 当 Idl 与 $\mathbf{B}$ 垂直时, $d\mathbf{F}$ 的数值最大,

$$|\mathbf{B}| = \left| \frac{dF_{\max}}{Idl} \right|. \quad (1-9)$$

磁感应强度矢量 $\mathbf{B}$ 的大小由 (1-9) 式决定, $\mathbf{B}$, Idl , $d\mathbf{F}$ 三者的方向关系参见图 1-2. 用磁感应强度 $\mathbf{B}$ 描述磁场时, 磁场可以看做是磁感应强度 $\mathbf{B}$ 的矢量场.

电流 I 还可以看做是由电荷 dq 的运动引起的, 于是

$$d\mathbf{F} = Idl \times \mathbf{B} = \frac{dq}{dt} \frac{dl}{dt} dt \times \mathbf{B} = \frac{dq}{dt} \mathbf{v} dt \times \mathbf{B} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} dq.$$

所以还可以认为在磁场中以速度 $\mathbf{v}$ 运动的电荷 q 所受力为

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (1-10)$$

(1-10)式即是洛伦兹力的公式。

如图 1-3 所示, 电流环 C 在空间 P 点所产生的磁感应强度 $\mathbf{B}$ 由毕奥-萨伐尔定律

$$\mathbf{B}(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{R}}{R^3} \quad (1-11)$$

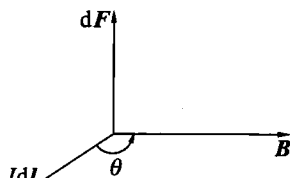


图 1-2

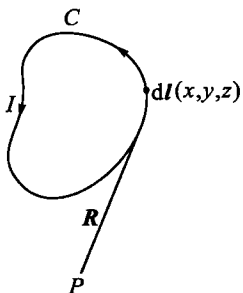


图 1-3

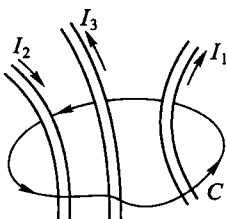


图 1-4

描述, 式中 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$ 为真空的磁导率。

由毕奥-萨伐尔定律可以证明:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I = \mu_0 \sum_k I_k. \quad (1-12)$$

这就是著名的安培环路定律。

它表明在真空中的磁场内沿任意一条闭合曲线, 磁感应强度 $\mathbf{B}$ 的曲线积分等于此闭合曲线所环绕的电流的代数和乘以真空的磁导率 μ_0 。安培定律的物理含义为: 电流是激发磁场的根源, 即动电生磁。

推导(1-12)式需用较复杂的矢量计算, 我们不用复杂的计算方法, 仅用一特例加以说明。考虑一长直导线, 载有电流 I , 如图 1-5 所示。在导线上取一小段电流元 $I d\mathbf{l}$, 按照(1-11)式, 它在空间 P 点所产生的磁感应强度

$$d\mathbf{B} = \mu_0 \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{R}}{4\pi R^3} = \mu_0 \frac{I \sin \theta dl}{4\pi R^2} \mathbf{e}_\varphi.$$

由图 1-5 可见:

$$r = R \sin \theta, \quad \sin \theta dl \approx R d\theta.$$

注: 毕奥-萨伐尔定律也是一个实验定律。但在本书中, 正像电学中的库仑定律一样, 在磁学中我们把它看做是先验事实。

所以 $d\mathbf{B} = \mu_0 \frac{IR d\theta}{4\pi R^2} \mathbf{e}_\varphi$,

$$B = \mu_0 \int_0^\pi \frac{IR}{4\pi R^2} d\theta = \mu_0 \frac{I}{4\pi} \int_0^\pi \frac{d\theta}{R} = \mu_0 \frac{I}{4\pi} \int_0^\pi \frac{d\theta}{\frac{r}{\sin\theta}}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \int_0^\pi \sin\theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

因为 P 为任意点, 上式又可写成

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I,$$

式中闭合曲线 C 为半径为 r 围绕电流 I 的圆周.

上式虽是由一特例求出, 但我们把它加以推广,

认为在磁场中沿任一闭合回路 C ,

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I.$$

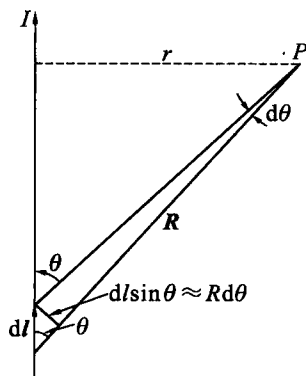


图 1-5

电磁感应

法拉第考虑到电荷可以感应产生电荷, 磁极可以感应产生磁极, 运动的电荷可以产生磁场, 那么按照自然界的对称原则, 运动的磁极也应该产生感应电场.

穿过曲面 S 的磁感应强度 $\mathbf{B}$ 的面积分

$$\Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}, \quad (1-13)$$

称为磁通量. 法拉第经过实验证实, 当穿过如图 1-6 所示的线圈 C 的磁通量 Φ 发生变化时, 在线圈中产生感应电动势

$$\mathcal{E} = \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}.$$

电动势 $\mathcal{E}$ 又可写成

$$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}, \quad (1-14)$$

式中的 $\mathbf{E}$ 为感应电场强度. (1-14) 式即是著名的法拉第电磁感应定律.

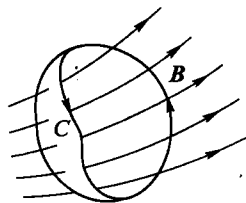


图 1-6

法拉第电磁感应定律原先说的是在线圈中产生了感应电场,但法拉第更进一步断言,即使没有放置线圈,在空间中只要磁场发生变化,就会产生感应电场.放置的线圈中产生了感应电流,只是表明用仪器探测到了感应电场而已.这就是场理论的观点.法拉第电磁感应定律的物理含义是动磁生电.

位移电流假设

引入位移电流是麦克斯韦的一大贡献.我们来研究时变电磁现象.参见图 1-7 所示的一个交流电路,现考虑由曲面 S_1 与 S_2 组成的闭合曲面,图中闭合曲线 C 是 S_1 和 S_2 的交界线,则由安培定律有:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I = \iint_{S_1} \mathbf{J}_{\text{传导}} \cdot d\mathbf{S},$$

式中 $\mathbf{J}_{\text{传导}}$ 为单位面积上的传导电流,称为传导电流密度.考虑到场论中的斯托克斯定理曲线积分与曲面积分之间的相互转换,积分 $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ 既可表示成沿

S_1 的曲面积分,又可表示成沿 S_2 的曲面积分

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \iint_{S_1} \mathbf{J}_{\text{传导}} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \iint_{S_2} \mathbf{J}_{\text{传导}} \cdot d\mathbf{S}.$$

由于 S_2 在空气(真空)中,没有传导电流,故上式的左边应等于零.但对 S_1 积分时因有传导电流存在故不为零,这就导致矛盾,为此必须对安培定律加以修正.

现在把 I 写为

$$\begin{aligned} I = \frac{dq}{dt} &= \frac{d}{dt} \oiint_{S_1+S_2} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \frac{d}{dt} \iint_{S_1} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} + \frac{d}{dt} \iint_{S_2} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \iint_{S_1} \mathbf{J}_{\text{传导}} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}. \end{aligned} \quad (1-15)$$

在 S_1 面上 $\mathbf{J}_{\text{传导}}$ 不为零,在 S_2 上 $\mathbf{J}_{\text{传导}}$ 为零.但 $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ 不为零,且 $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ 的量纲也是电流密度的量纲,故可写做

$$\mathbf{J}_{\text{位移}} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (1-16)$$

称之为位移电流密度.可见在 S_2 面上传导电流虽为零,但总电流 I 却由位移电流接替过去,这正符合了电流连续性原理.

有了位移电流假设后,安培环路定律可以推广为:

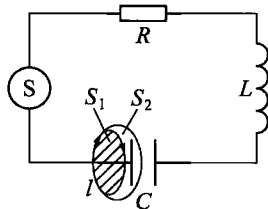


图 1-7

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \iint_S \left(\mathbf{J}_{\text{传导}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}. \quad (1-17)$$

上式表明在激发磁场方面，位移电流和传导电流一样有磁效应。它的物理含义是运动的电荷和变化的电场产生变化的磁场，也就是动电生磁。

§2 麦克斯韦方程组

经过麦克斯韦推广的安培环路定律(1-17)式

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \iint_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}, \quad (2-1)$$

称为麦克斯韦第一方程式。而电磁感应定律(1-14)式

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = - \frac{d}{dt} \Phi, \quad (2-2)$$

称为麦克斯韦第二方程式。(2-1)式、(2-2)式为麦克斯韦方程的积分形式。

在电磁场理论中，积分形式的麦克斯韦方程是说明电磁场中一定区域中电磁量之间的关系，而微分形式的麦克斯韦方程是说明场中每一点上电磁量之间的关系。所以求解电磁场问题更为方便的是微分形式的麦克斯韦方程，而不是积分形式的麦克斯韦方程。为此我们来寻求微分形式的麦克斯韦方程。

利用高等数学中的斯托克斯定理，我们把积分形式的麦克斯韦方程改写一下。斯托克斯定理如下：

$$\oint_C P dx + Q dy + R dz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

P, Q, R 均为 (x, y, z) 的连续函数。如把 P, Q, R 写为某一矢量函数 $\mathbf{A}$ 的三个直角分量

$$\mathbf{A} = e_x P + e_y Q + e_z R = e_x A_x + e_y A_y + e_z A_z,$$

有向线元写为

$$d\mathbf{l} = e_x dx + e_y dy + e_z dz,$$

有向面元写为

$$d\mathbf{S} = e_x dy dz + e_y dz dx + e_z dx dy,$$

且定义

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{A} = \text{rot} \mathbf{A} = \text{curl} \mathbf{A} &= \mathbf{e}_x \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_y \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \mathbf{e}_z \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \\ &= \mathbf{e}_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \mathbf{e}_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right),\end{aligned}$$

则斯托克斯定理可写为矢量形式

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}.$$

式中“ $\nabla \times$ ”或“rot”，“curl”代表矢量分析中一种算符，称为旋度算符，而 $\nabla \times \mathbf{A}$ 称为矢量 $\mathbf{A}$ 的旋度。

于是方程式(2-1)式，(2-2)式可以写成

$$\begin{aligned}\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= \iint_S \nabla \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \iint_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}, \\ \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= \iint_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = - \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}.\end{aligned}\tag{2-3}$$

上式中线积分 $\oint_C \cdots d\mathbf{l}$ 与面积分 $\iint_S \cdots d\mathbf{S}$ 的关系为右手螺旋法则，当 $d\mathbf{S}$ 与 $\mathbf{B}$ 或 $\mathbf{E}$ 垂直时，面积分取极大值。

按定义旋度可以写为：

$$\nabla \times \mathbf{E} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S} = \text{rot}_n \mathbf{E}.$$

现在我们利用这一表达式再来说明一下旋度的意义，曲线积分 $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ 称为 $\mathbf{E}$ 的环流量，而当曲面 S 很小， $S \approx \Delta S$ 时，(2-2)式可写成

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \iint_{\Delta S} \left(- \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} = \left(- \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)_n \Delta S,$$

$$\text{故} \quad \left(- \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S} = (\nabla \times \mathbf{E})_n = (\text{rot} \mathbf{E})_n.$$

由上式可定义：当 $\Delta S \rightarrow 0$ 时单位面积的环流量称为该点的旋度。

旋度的数学表达式在直角坐标系中为：

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{e}_x \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_y \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + \mathbf{e}_z \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{bmatrix}. \quad (2-4)$$

在柱坐标系中旋度的表达式为:

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{e}_r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_\varphi \left(\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) + \mathbf{e}_z \left(\frac{\partial}{\partial r} (r E_\varphi) - \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} \right). \quad (2-5)$$

在球坐标系中旋度的表达式为:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} = & \mathbf{e}_r \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (E_\varphi \sin \theta) - \frac{\partial E_\theta}{\partial \varphi} \right) + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r E_\varphi) \right) + \\ & \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r E_\theta) - \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (2-6)$$

在其他坐标系中的表达式可参见矢量分析的参考书.

去掉积分号, (2-3)式还可进一步写成

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \right) = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (2-7)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (2-8)$$

(2-7)式, (2-8)式为麦克斯韦方程的微分形式. (2-7)式, (2-8)式的物理意义则分别是运动的电荷和变化的电场是磁场的旋涡源以及变化的磁场是电场的旋涡源.

下面我们再来说明一下即将用到的另一个矢量分析中的算符——散度的定义.

以高斯定理为例.

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \rho dV. \quad (2-9)$$

面积分 $\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$ 称为体积 V 中 $\mathbf{D}$ 的发散量, 而当体积 ΔV 非常小, $\Delta V \rightarrow 0$ 时的极限值

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V} = \rho = \nabla \cdot \mathbf{D} = \text{div } \mathbf{D},$$

称为该点的散度, 符号“ $\nabla \cdot$ ”或“div”表示散度算符.