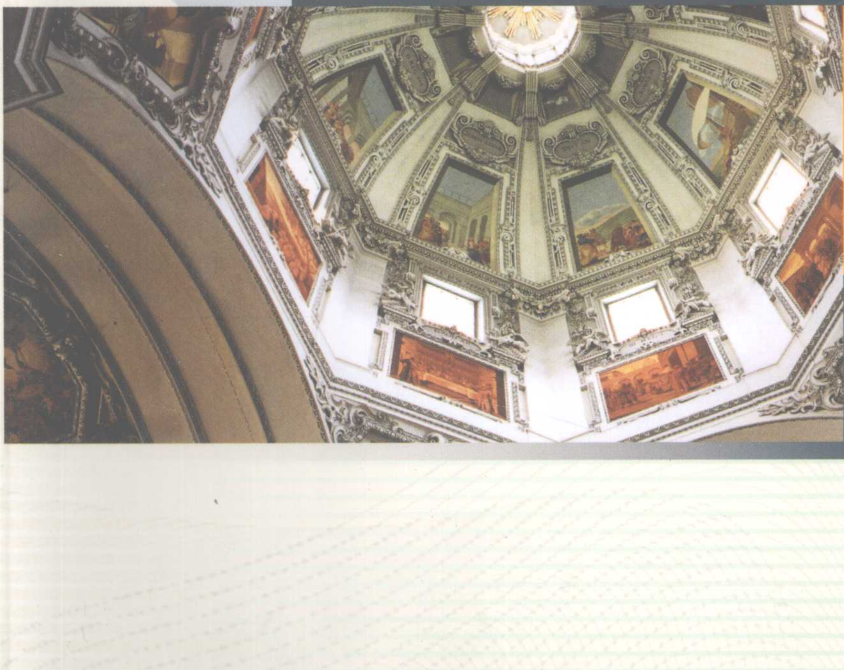
高等学校教材

高等数学 下册

王顺凤　陈晓龙　张建伟　主编



高等教育出版社
Higher Education Press

高等学校教材

高 等 数 学

下 册

王顺凤　陈晓龙　张建伟　主编

高等教育出版社

内容提要

本书是根据最新的《工科类本科数学基础课程教学基本要求》编写的高等学校教材。

全书分上、下两册出版，上册包括一元函数微积分和常微分方程，下册包括空间解析几何、多元函数微积分和无穷级数。为使读者尽早接触数学软件并了解其应用，本书附录还编写了 Mathematica 简介及其简单应用。

本书选材力求少而精，注重微积分的数学思想及其实际背景的介绍，注意与目前中学课程改革的衔接；为适应分层次教学的需要，对有关内容和习题进行了分类处理；在每一章的结尾附有小结和复习练习题，帮助读者进一步复习巩固所学知识。

本书说理浅显、通俗易懂，并有较好的系统性与完整性，可作为高等院校理（非数学专业）、工、农各类本科专业学生学习“高等数学”课程的教材，也可供社会读者阅读。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．下册／王顺凤，陈晓龙，张建伟主编．—北京：高等教育出版社，2009.8

ISBN 978-7-04-027490-5

Ⅰ．高…　Ⅱ．①王…②陈…③张…　Ⅲ．高等数学-高等学校-教材　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 110406 号

策划编辑　王　强　**责任编辑**　李华英　**封面设计**　赵　阳　**责任绘图**　尹文军
版式设计　王　莹　**责任校对**　王效珍　**责任印制**　毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京宏伟双华印刷有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2009 年 8 月第 1 版
印　　张	21.25	印　　次	2009 年 8 月第 1 次印刷
字　　数	390 000	定　　价	23.00 元

物料号　27490-00

总　　序

为满足社会对应用型人才培养的需求，配合教育部“质量工程”的实施，深入探讨应用型人才培养以及相应的教学内容与课程体系改革工作，切实提高应用型人才培养质量，以全国高等学校教学研究中心批准立项的全国教育科学“十一五”国家课题——“我国高校应用型人才培养模式研究”课题为载体，由南京工业大学牵头，南京信息工程大学和江苏大学共同参与策划了本系列教材。

本系列教材包括高等数学、线性代数和概率论与数理统计三门课程，全部内容讲授约需260学时，其内容体现出教学改革的成果和教学内容的优化，主要特点如下：

1. 思路清晰、逻辑严谨、概念准确、便于自学；

2. 适当降低理论深度，削减了一些枝节内容，突出数学知识实用的分析和计算方法，着重基本技能和基本计算的训练，不过分追求技巧；

3. 强调教学内容的思想性，着力揭示基本概念的本质和解决问题的思想方法；

4. 注意应用基本理论和基本方法分析解决实际问题的思想方法，培养学生应用数学方法解决实际问题的能力；

5. 各章节习题作了分类编排，为便于学生复习和巩固所学知识，每章均配有小结和复习练习题；

6. 根据内容特点，引入数学软件 Mathematica 和 MATLAB 的介绍，并给出了有关案例应用，使学生能较早地接触数学软件的学习，为今后运用数学软件解决实际问题打下基础。

本系列教材的编写得到了全国高等学校教学研究中心“十一五”国家课题“我国高校应用型人才培养模式研究”的重点课题资助和高等教育出版社高等理工中心数学分社的领导和编辑们的大力支持，在此表示衷心感谢。

应用型本科数学系列教材编委会

2009年3月

目　　录

第八章　向量代数与空间解析几何

在中学数学的学习中我们已经知道,利用向量往往能使某些几何问题更简捷地得到解决.向量也是力学、物理学和工程技术中常用的有力工具.本章将利用向量研究空间几何的有关问题,并借助空间直角坐标系把空间的点与三元有序数组对应起来,从而可以把空间几何图形与代数方程对应起来,这样就可以用代数的方法研究空间图形的有关问题.熟悉这些内容对于学习多元函数的微积分有十分重要的作用.

第一节　向量及其线性运算

一、向量的有关概念

在日常生活和科学研究时,通常会遇到两种类型的量:一种是只要用一个数字就可完全描述,如长度、面积、体积、时间、质量、温度等,这种量称为数量(标量);另一种是不能仅用数字来描述,例如为了反映机场附近空域中飞机的位置,仅仅知道每架飞机与塔台的距离显然是不够的,我们还需要知道每架飞机的飞行方向,另外,为了了解每架飞机的动向,只知道飞机速度的大小也是不够的,还需要知道飞机速度的方向.像这类既有大小又有方向的量称为**向量**(**矢量**),物理学中的力、位移、速度、力矩等都是向量.在数学上,通常用一条带有方向的线段,即用一条有向线段表示向量,其中有向线段的长度表示向量的大小,有向线段的方向表示向量的方向.例如,以 A 为起点、B 为终点的有向线段表示的向量,记为$\overrightarrow{AB}$(图 8.1).

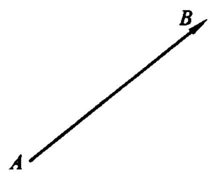


图 8.1

有时也可以用一个粗体字母或用一个上面加有箭头的字母来表示向量.例如 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{i},\boldsymbol{n},\boldsymbol{F}$ 或 $\vec{a}$, $\vec{i}$, $\vec{n}$, $\vec{F}$等.

在空间取定单位长度后,向量的长度称为向量的**模**.向量$\overrightarrow{AB}$,$\vec{a}$或 $\boldsymbol{a}$ 的模记为$|\overrightarrow{AB}|$,$|\vec{a}|$或$|\boldsymbol{a}|$.特别地,模等于 1 的向量称为**单位向量**,模为零的向量称为**零向量**,记为$\vec{0}$(或 $\boldsymbol{0}$).零向量是唯一不定义方向的向量,即零向量的方向可以看作任意的.

不过值得注意的是,在实际问题中,尽管有许多向量与起点有关,例如质点

的位移、作用力等，但向量的共性是向量的大小与方向，所以，在数学上只研究和讨论与起点无关的向量，这种向量也称为**自由向量**（简称**向量**），即仅考虑向量的大小与方向，而不考虑它的起点在什么位置，以后除非特别说明，所讨论的向量都是指自由向量.

如果两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的大小相等，方向相同，则称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **相等**，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，即经过平移后能完全重合的向量是相等的；与向量 $\boldsymbol{a}$ 模相等、方向相反的向量叫做 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**，记作 $-\boldsymbol{a}$；与向量 $\boldsymbol{a}$ 方向相同的单位向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的单位化向量，记作 $\boldsymbol{e}_a$，显然 $\boldsymbol{e}_a=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$. 两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，如果它们的方向相同或相反，则称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **平行**或**共线**，记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$；同样，平行于同一平面的向量称为**共面向量**.

二、向量的线性运算

向量的线性运算是指向量的加法、减法以及数与向量的乘积.

1. 向量的加法

力是向量的物理原型. 在中学物理中我们已经知道，力的合成可按平行四边形法则或三角形法则进行. 因此，向量的加法也遵循同样的法则.

定义 1 设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是两个非零向量，且不共线，则以 A 为起点、$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的对角线向量 $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$（图 8.2）.

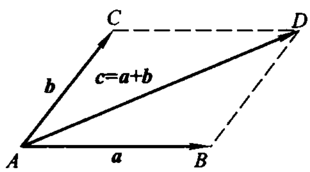


图 8.2

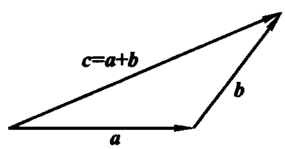


图 8.3

这种求向量和的方法称为平行四边形法则. 类似地，向量的加法还有**三角形法则**：将向量 $\boldsymbol{b}$ 平移，使其起点与 $\boldsymbol{a}$ 的终点重合，则以 $\boldsymbol{a}$ 的起点为起点，以 $\boldsymbol{b}$ 的终点为终点的向量 $\boldsymbol{c}$ 即为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，亦即 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$（图 8.3）.

两个向量的加法可以推广到任意有限个向量的情形：将这 n 个向量依次平行移动，使其首尾相接，则由第一个向量的起点至最末一个向量的终点所形成的向量就是这 n 个向量的和（图 8.4）.

这种求向量和的方法称为**多边形法则**或**折线法则**.

容易验证，向量的加法遵循下列运算规律：

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$（交换律）；

(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$（结合律）；

(3) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$.

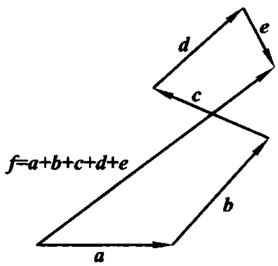


图 8.4

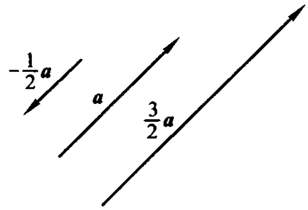


图 8.5

2. 向量的数乘

定义 2　向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ 的乘积是一个向量，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，其方向规定为：当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同，当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反，当 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 时，规定 $\lambda\boldsymbol{a}=0$. 而 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的模是 $|\boldsymbol{a}|$ 的 $|\lambda|$ 倍，即 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$.

从有向线段的角度看，向量与数的乘积 $\lambda\boldsymbol{a}$ 就是把向量 $\boldsymbol{a}$ 伸缩 $|\lambda|$ 倍，当 $\lambda>0$ 时，沿着 $\boldsymbol{a}$ 的方向伸缩，当 $\lambda<0$ 时，沿着 $\boldsymbol{a}$ 相反方向伸缩（图 8.5），特别地，$1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$，$(-1)\cdot\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$.

习惯上，称 $-\boldsymbol{a}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的负向量. 向量的减法规定为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$，则 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$.

向量的数乘满足下列规律：

(1) $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$.

首先，由数与向量乘积的定义可知，向量 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})$，$\mu(\lambda\boldsymbol{a})$，$(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ 都是与 $\boldsymbol{a}$ 平行的向量，它们的方向也相同，而且

$$|\lambda(\mu\boldsymbol{a})|=|\mu(\lambda\boldsymbol{a})|=|(\lambda\mu)\boldsymbol{a}|=|\lambda\mu||\boldsymbol{a}|.$$

(2) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$，$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

证明类似，从略.

由向量的数乘定义可得到两个向量平行的充要条件.

定理　向量 $\boldsymbol{a}$ 与非零向量 $\boldsymbol{b}$ 平行的充要条件是，存在数 λ 使得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，其中数 λ 由 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 唯一确定.

证　条件的充分性是显然的. 下证必要性.

设 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，取 $\lambda=0$ 即可；若 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同时，取 $\lambda=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$，当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相反时，取 $\lambda=-\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$，此时均有 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$.

再证明唯一性,设存在另一实数 μ,使 $\boldsymbol{a}=\mu\boldsymbol{b}$,则有 $\lambda\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{b}$,即 $(\lambda-\mu)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$,又因为 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$,故 $\lambda-\mu=0$,即 $\lambda=\mu$.

例 1　如果平面上的一个四边形的对角线互相平分,试用向量性质证明该四边形是平行四边形.

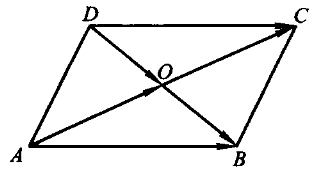


图 8.6

证　如图 8.6,在四边形 $ABCD$ 中,由题意,设 $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,由向量的加法法则有

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},$$

$$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},$$

即 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. 因此,四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

三、向量的坐标表示

以上我们用几何方法引进了向量的概念及其线性运算. 几何方法虽然比较直观,但是对于向量的计算并不方便. 为了更方便地使用向量这个有力工具,同时也为了便于用向量研究空间解析几何,下面我们引进向量的坐标表示,即用一个有序数组来表示向量,从而可把向量的运算化为数的运算.

1. 空间直角坐标系

过空间一定点 O,作三条相互垂直的数轴,它们均以 O 为原点,并且一般有相同的长度单位,分别称为 x 轴(横轴)、y 轴(纵轴)、z 轴(竖轴),统称为坐标轴. 通常把 x 轴和 y 轴配置在水平面上,而 z 轴则沿铅垂直线,它们正向的排列次序符合右手规则,即用右手握住 z 轴,四个手指从 x 轴正向以 $\frac{\pi}{2}$ 角转向 y 轴的正向时,大拇指就指向 z 轴的正向(图 8.7). 这种形式的坐标系通常称为**右手系**.

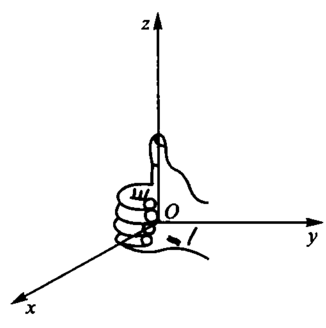


图 8.7

在空间直角坐标系中,由每两条坐标轴所决定的平面叫做坐标面,由 x 轴和 y 轴确定的平面叫做 xOy 面,而由 x 轴和 z 轴确定的平面叫做 xOz 面,由 y 轴和 z 轴确定的平面叫做 yOz 面. 三个坐标面把空间分成八个部分,每一个部分称为一个卦限. 其边界面含正向 x 轴,正向 y 轴和正向 z 轴的那个卦限称为第Ⅰ卦限,在 xOy 面的上方的其他三个卦限,按逆时针方向(从 z 轴向下看)依次称为第Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ卦限,在 xOy 面下方,与第Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ卦限相对的卦限依次称为第Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ卦限(图 8.8).

设 M 为空间一点，过 M 作三个平面分别垂直于三个坐标轴，它们与 x 轴、y 轴、z 轴的交点依次为 P,Q,R(图 8.9). 设 P,Q,R 三点在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标依次为 x,y,z. 这样，空间一点 M 就唯一地确定了一个三维有序数组 (x,y,z). 反之，对于任一有序的三维数组 (x,y,z)，在 x 轴上设坐标为 x 的点是 P，在 y 轴上坐标为 y 的点是 Q，在 z 轴上坐标为 z 的点是 R，过 P,Q,R 分别作与 x 轴、y 轴、z 轴垂直的三个平面，这三个平面在空间交于唯一的一点 M，即一个三维数组 (x,y,z) 唯一确定了空间一点 M. 因此空间任意一点 M 与一个三维有序数组 (x,y,z) 建立了一一对应关系，这三维有序数组 (x,y,z) 就称为点 M 的坐标，并把 x,y,z 依次称为点 M 的横坐标、纵坐标、竖坐标，点 M 的坐标也记作 $M(x,y,z)$.

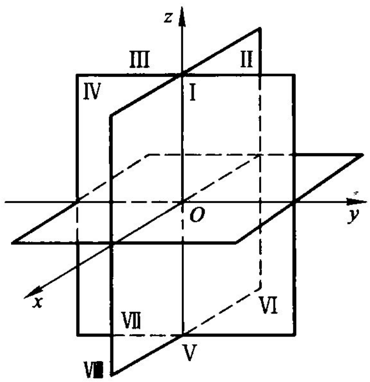


图 8.8

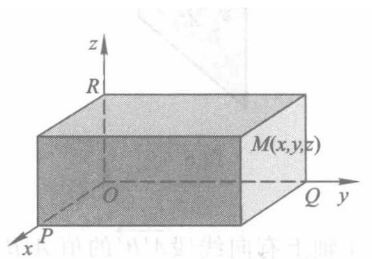


图 8.9

显然，坐标原点 O 的坐标为 $(0,0,0)$，在坐标轴和坐标面上的点的坐标也各有特点，如 x 轴上点的坐标可写成 $(x,0,0)$，y 轴、z 轴上点的坐标可分别写为 $(0,y,0)$ 及 $(0,0,z)$；xOy 面上点的坐标可写成 $(x,y,0)$，yOz 面和 xOz 面上点的坐标可分别写成 $(0,y,z)$ 和 $(x,0,z)$.

2. 向量在轴上的投影

首先引进两个向量夹角的概念.

设 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是两个非零向量，O 为空间任一点，过点 O 作向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则称 $\angle AOB=\varphi\,(0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$ 为两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，记作 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 或 $\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\rangle$(图 8.10).

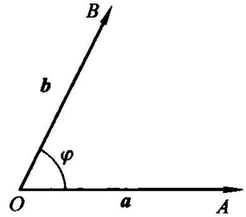


图 8.10

若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行且方向相同，则规定 $\varphi=0$，若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行且方向相反，则规定 $\varphi=\pi$. 类似地，定义一向量与一数轴的夹角为向量与该数轴上正向单位向量

的夹角;同样,空间两个数轴间的夹角规定为这两个数轴上两正向单位向量之间的夹角.

下面介绍向量在轴上的投影.

设 A 为空间一点,过点 A 作一垂直于 x 轴的平面 π,则 π 与 x 轴的交点 A' 称为点 A 在 x 轴上的**投影**(图 8.11).

设向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点为 A、终点为 B,点 A,B 在 x 轴上的投影分别为 A',B',则 x 轴上的有向线段 $\overrightarrow{A'B'}$ 的值 $A'B'$ 称为向量 $\overrightarrow{AB}$ 在 x 轴上的投影(图 8.12),记作 $\mathrm{Prj}_x\overrightarrow{AB}$,即 $\mathrm{Prj}_x\overrightarrow{AB}=A'B'$.

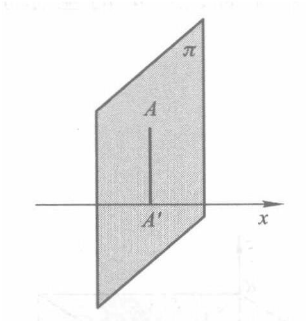


图 8.11

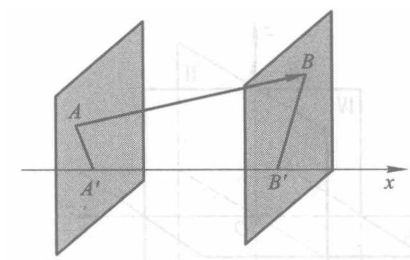


图 8.12

x 轴上有向线段 $\overrightarrow{A'B'}$ 的值 $A'B'$ 是这样一个实数:其绝对值 $|A'B'|=|\overrightarrow{A'B'}|$,其符号由 $\overrightarrow{A'B'}$ 的方向确定,当 $\overrightarrow{A'B'}$ 的方向与 x 轴的方向相同时,取正号;当 $\overrightarrow{A'B'}$ 的方向与 x 轴的方向相反时,取负号.

有了向量与轴的夹角及向量的投影等概念,下面再证明几个有关向量投影的重要结论.

投影定理 1 设向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 x 轴的夹角为 $\varphi(0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$,则 $\overrightarrow{AB}$ 在 x 轴上的投影等于向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模乘以夹角 φ 的余弦,即

$$\mathrm{Prj}_x\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cos\varphi. \tag{8.1}$$

证 设 A' 和 B' 分别为向量 $\overrightarrow{AB}$ 的起点 A 和终点 B 在 x 轴上的投影(图 8.13).将向量 $\overrightarrow{AB}$ 平移到 $\overrightarrow{A'B''}$,其中 B'' 在过终点 B 所作的垂直于 x 轴的平面 π_2 上,则 $\angle B'A'B''=\varphi$.

在直角 $\triangle A'B'B''$ 中,$\angle A'B'B''$ 为直角,故 $\left|\overrightarrow{A'B'}\right|=\left|\overrightarrow{A'B''}\right|\cos\varphi$. 由于 $\overrightarrow{A'B''}=\overrightarrow{AB}$,因此

$$\mathrm{Prj}_x\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cos\varphi.$$

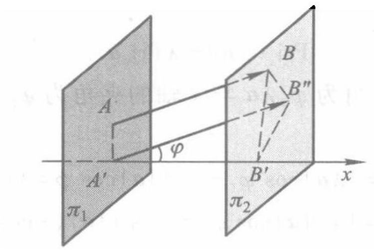


图 8.13

由上述投影定理可知,当向量$\overrightarrow{AB}$与 x 轴的夹角 φ 为锐角时,$\overrightarrow{AB}$在 x 轴上的投影为正;当向量$\overrightarrow{AB}$与 x 轴的夹角 φ 为钝角时,$\overrightarrow{AB}$在 x 轴上的投影为负;当 φ 为直角时,投影为零. 显然,相等的向量在同一数轴上的投影是相等的.

投影定理 2　两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和在同一数轴上的投影等于这两个向量在该数轴上投影的和,即

$$\mathrm{Prj}_x(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathrm{Prj}_x\boldsymbol{a}+\mathrm{Prj}_x\boldsymbol{b}. \tag{8.2}$$

证　如图 8.14. 设 x 轴为投影轴. $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$,则$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,于是

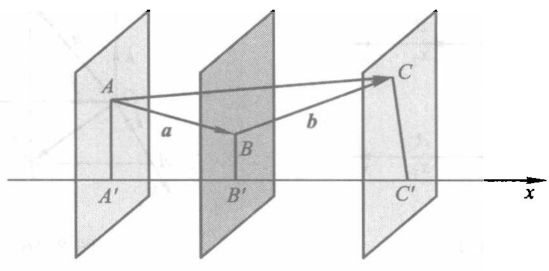


图 8.14

$$\mathrm{Prj}_x(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathrm{Prj}_x\overrightarrow{AC}=A'C'.$$

而

$$\mathrm{Prj}_x\boldsymbol{a}+\mathrm{Prj}_x\boldsymbol{b}=\mathrm{Prj}_x\overrightarrow{AB}+\mathrm{Prj}_x\overrightarrow{BC}=A'B'+B'C'=A'C',$$

故

$$\mathrm{Prj}_x(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathrm{Prj}_x\boldsymbol{a}+\mathrm{Prj}_x\boldsymbol{b}.$$

这个定理的结论可以推广到任意有限个向量的情形,即有

$$\mathrm{Prj}_x(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n)=\mathrm{Prj}_x\boldsymbol{a}_1+\mathrm{Prj}_x\boldsymbol{a}_2+\cdots+\mathrm{Prj}_x\boldsymbol{a}_n. \tag{8.3}$$

投影定理 3　向量与数的乘积的投影等于该向量在同一数轴上的投影与该

数的积,即

$$\mathrm{Prj}_x(\lambda \boldsymbol{a}) = \lambda \mathrm{Prj}_x \boldsymbol{a}. \tag{8.4}$$

证 设 $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴的夹角为 φ,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 x 轴的夹角为 φ_1,则当 $\lambda>0$ 时,$\varphi_1=\varphi$,当 $\lambda<0$ 时,$\varphi_1=\pi-\varphi$. 于是

当 $\lambda>0$ 时,$\mathrm{Prj}_x(\lambda\boldsymbol{a}) = |\lambda\boldsymbol{a}|\cos\varphi_1 = |\lambda||\boldsymbol{a}|\cos\varphi = \lambda\mathrm{Prj}_x\boldsymbol{a}$;

当 $\lambda<0$ 时,$\mathrm{Prj}_x(\lambda\boldsymbol{a}) = |\lambda||\boldsymbol{a}|\cos\varphi_1 = (-\lambda)|\boldsymbol{a}|(-\cos\varphi) = \lambda\mathrm{Prj}_x\boldsymbol{a}$;

当 $\lambda=0$ 时,$\mathrm{Prj}_x(\lambda\boldsymbol{a}) = 0 = \lambda\mathrm{Prj}_x\boldsymbol{a}$.

例 2 设 A,B 为 x 轴上坐标分别为 x_1,x_2 的两点,$\boldsymbol{e}$ 为与 x 轴正向一致的单位向量,则 $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1)\boldsymbol{e}$.

解 当 $x_2>x_1$ 时,$\overrightarrow{AB}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 同向(图 8.15(a)),由于 $|\overrightarrow{AB}|=x_2-x_1$,因此 $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1)\boldsymbol{e}$;当 $x_2<x_1$ 时,$\overrightarrow{AB}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 反向(图 8.15(b)),有 $|\overrightarrow{AB}|=x_1-x_2$,因此,$\overrightarrow{AB}=-(x_1-x_2)\boldsymbol{e}=(x_2-x_1)\boldsymbol{e}$;当 $x_2=x_1$ 时,显然有 $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1)\boldsymbol{e}$.

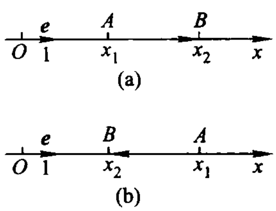


图 8.15

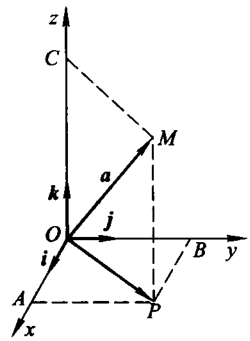


图 8.16

3. 向量的坐标

在空间取定直角坐标系 $Oxyz$ 中,分别取与 x 轴、y 轴、z 轴的正方向相同的三个单位向量,记作 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$,并称它们为这一坐标系的基本单位向量. 设 $\boldsymbol{a}$ 为空间任一向量,将它平移,使其始点在坐标原点 O,终点在 $M(x,y,z)$,并设点 M 在 x 轴、y 轴、z 轴上的投影分别为 A,B,C,在 xOy 面上的投影为点 P(图 8.16),则

$$\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{i},\quad \overrightarrow{OB}=y\boldsymbol{j},\quad \overrightarrow{OC}=z\boldsymbol{k}.$$

由图可知

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC},$$

即

$$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}. \tag{8.5}$$

式(8.5)右端称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标分解式或坐标表示式，其中 x,y,z 分别称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴、y 轴、z 轴上的投影. 式(8.5)也可写为

$$\boldsymbol{a}=(x,y,z). \tag{8.6}$$

因此，起点在原点的向量的坐标与其终点的坐标相同.

注　向量$\overrightarrow{OM}$也称为点 M 的向径.

4. 利用向量的坐标进行向量的线性运算

设有两向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$，$\lambda$ 为常数，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}&=(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})\pm(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k})\\&=(a_1\pm b_1)\boldsymbol{i}+(a_2\pm b_2)\boldsymbol{j}+(a_3\pm b_3)\boldsymbol{k}\\&=(a_1\pm b_1,a_2\pm b_2,a_3\pm b_3),\end{aligned} \tag{8.7}$$

$$\begin{aligned}\lambda\boldsymbol{a}&=\lambda(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})=(\lambda a_1)\boldsymbol{i}+(\lambda a_2)\boldsymbol{j}+(\lambda a_3)\boldsymbol{k}\\&=(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3).\end{aligned} \tag{8.8}$$

由此说明，向量的加、减运算及数乘运算可以转化为它们相应坐标的运算.

例 3　设空间有两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$，求向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的坐标.

解　如图 8.17，由式(8.6)知

$$\overrightarrow{OM_1}=(x_1,y_1,z_1),\overrightarrow{OM_2}=(x_2,y_2,z_2),$$

从而

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M_2}&=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}\\&=(x_2,y_2,z_2)-(x_1,y_1,z_1)=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1).\end{aligned}$$

即起点不在原点的向量的坐标等于终点坐标减去起点坐标.

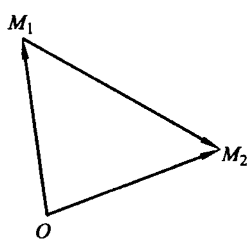


图 8.17

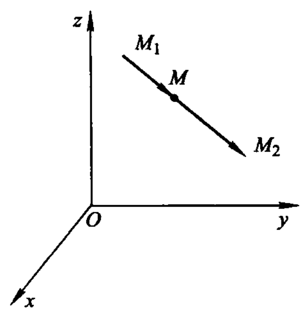


图 8.18

例 4　设有两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$，点 M 分线段 M_1M_2 成定比 $\lambda(\lambda\neq-1)$，求点 M 的坐标.

解　如图 8.18. 设点 M 的坐标为(x,y,z)，由题设$\overrightarrow{M_1M}=\lambda\,\overrightarrow{MM_2}$，得

$$(x-x_1,y-y_1,z-z_1)=\lambda(x_2-x,y_2-y,z_2-z),$$

从而

$$x-x_1=\lambda(x_2-x),y-y_1=\lambda(y_2-y),z-z_1=\lambda(z_2-z),$$

由此解得点 M 的坐标

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}. \tag{8.9}$$

上式称为线段 M_1M_2 的定比分点公式.

特别地,当 $\lambda=1$ 时,点 M 是线段 M_1M_2 的中点,其坐标为

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},y=\frac{y_1+y_2}{2},z=\frac{z_1+z_2}{2}. \tag{8.10}$$

前面定理 1 曾经指出,向量 $\boldsymbol{a}$ 与非零向量 $\boldsymbol{b}$ 共线的充要条件是 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$,按坐标形式表示有 $(a_1,a_2,a_3)=\lambda(b_1,b_2,b_3)$,从而

$$a_1=\lambda b_1,a_2=\lambda b_2,a_3=\lambda b_3 \quad 或写成 \quad \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}. \tag{8.11}$$

即两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$ 平行的充要条件是它们的坐标对应成比例.

应当指出,上式中若某一分母为 0,则规定相应分子也是 0,但由于 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$,因此分母不会同时为 0.

四、向量的模和方向余弦的坐标表示式

确定一个向量,需要知道它的大小(即模)和方向,怎样用坐标来表示这两个要素呢?

1. 向量的模与两点间距离公式

设有向量 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$,作 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$,如图 8.19 所示. 由于 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$,由勾股定理得

$$|\boldsymbol{r}|=|OM|=\sqrt{|OP|^2+|OQ|^2+|OR|^2}.$$

由于 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$,$\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j}$,$\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$,于是得向量模的坐标表示式 $|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

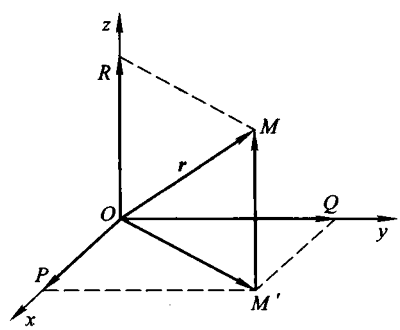


图 8.19

由向量模的坐标表示很容易得到空间两点间距离公式.

设有点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 及点 $M_2(x_2,y_2,z_2)$,则点 M_1 与点 M_2 间的距离 $|M_1M_2|$ 就是向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模,由例 4 知 $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$,由此可得 M_1,M_2 两点间的距离