保险精算系列教材

高等代数学习指导与习题解析

刘丽 林谦 韩本三 高雪梅 编

BAOXIAN JINGSUAN XILIE JIAOCAI

GAODENG DAISHU

XUEXI ZHIDAO YU XITI JIEXI

西南财经大学出版社
Southwestern University of Finance & Economics Press

保险精算系列教材

高等代数

学习指导与习题解析

刘丽 林谦 韩本三 高雪梅 编

BAOXIAN JINGSUAN XILIE JIAOCAI

GAODENG DAISHU

XUEXI ZHIDAO YU XITI JIEXI

西南财经大学出版社
Southwestern University of Finance & Economics Press

图书在版编目(CIP)数据

高等代数学习指导与习题解析/刘丽,林谦,韩本三,高雪梅编．一成都:西南财经大学出版社,2009.1
ISBN 978-7-81138-140-5

Ⅰ.高…　Ⅱ.①刘…②林…③韩…④高…　Ⅲ.高等代数—高等学校—教学参考资料　Ⅳ.015

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 162866 号

高等代数学习指导与习题解析

刘丽　林谦　韩本三　高雪梅　编

责任编辑:于海生
封面设计:穆志坚
责任印制:封俊川

出版发行:	西南财经大学出版社(四川省成都市光华村街 55 号)
网　　址:	http://www.xcpress.net
电子邮件:	xcpress@mail.sc.cninfo.net
邮政编码:	610074
电　　话:	028-87353785　87352368
印　　刷:	郫县犀浦印刷厂
成品尺寸:	170mm×240mm
印　　张:	19
字　　数:	345 千字
版　　次:	2009 年 1 月第 1 版
印　　次:	2009 年 1 月第 1 次印刷
印　　数:	1—3000 册
书　　号:	ISBN 978-7-81138-140-5
定　　价:	32.80 元

前　　言

高等代数课程在我国以往仅在理工科的专业开设，但随着经济管理科学的深入研究，经济管理学科的很多专业也开设了高等代数课程。目前，高等代数课程已成为理工科和经济管理学科很多专业的一门重要的专业基础课程。

高等代数理论抽象，逻辑推理严密，很多读者在学习这门课时感到抽象难懂，对这门课程的重点难点把握不准，做习题也难以下手。为帮助读者解决这些问题，我们针对由刘丽教授编著、西南财经大学出版社出版的《高等代数》教材编写了这本学习指导与习题解析。本书与教材《高等代数》的各章相对应，每章按内容提要、重点难点、学习要求、典型题分析、习题解析五个部分编写。“内容提要”列出了各对应章节的基本概念、定理、重要公式与结论，归纳总结了一些主要计算方法以便于读者应用；“重点难点”的归纳和“学习要求”的提出可以帮助读者把握对高等代数知识的掌握程度；“典型题分析”精选了部分典型例题，并通过对这些例题的分析与解答，归纳总结了一些解题的方法与技巧；“习题解析”对教材《高等代数》所配全部习题做了详细解答，有的题还给出了多种解法，以帮助读者掌握更多的解题方法与技巧。本书除适用于使用该教材的师生和报考精算师资格考试的考生外，还可供学习“线性代数”的学生以及报考经济管理类研究生的考生使用。

本书是由刘丽、林谦、韩本三、高雪梅合作编写的，其中刘丽编写第四、第六章并负责全书的统稿；林谦编写第七、第八章；韩本三编写第一、第二章；高雪梅编写第三、第五章。由于我们的水平有限，书中错误在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

2008 年 9 月于西南财经大学

目　　录

第一章　行列式

一、内容提要

1. 行列式的定义

定义　将 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots n)$ 排成 n 行 n 列，记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

它表示所有位于不同行及不同列的 n 个元素的乘积的代数和，当这 n 个元素的行标按自然排列时，各项以列标排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数的奇偶性按下式冠以符号：

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$$

即列标排列为偶排列时带正号，列标排列为奇排列时带负号．称 D 为 n **阶行列式**.

即 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

其中，符号“$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$”表示对全部 n 级排列求和.

行列式也可定义为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}$$

这两个定义是等价的.

2. 行列式的性质

设 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，将 D 中的行、列依次互换后所成的行列式称为 D 的转置行列式. 记作 D^T.

性质 1 $D^T=D$.

性质 2 互换行列式中两行（列）的位置，行列式反号.

推论 有两行（列）相同的行列式等于零.

性质 3 行列式中某行（列）的公因子可以提到行列式外面来. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论 1 有一行（列）全为零的行列式等于零.

推论 2 有两行（列）成比例的行列式等于零.

性质 4 若行列式 D 中某行的每个元素都是两数之和，则 D 可拆分成两个行列式：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$
=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

性质 5 将行列式中某行（列）元素的 k 倍加到另一行（列）的对应元素上，行列式的值不变.

3. 行列式按一行（列）展开定理

定理 1 n 阶行列式 D 等于它的任意一行（列）的元素与其代数余子式的乘积之和. 即

$$
D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \qquad (i = 1,2,\cdots,n)
$$

推论 n 阶行列式 D 中任意一行（列）元素与其他行（列）对应元素的代数余子式的乘积之和为零. 即

$$
a_{s1}A_{i1} + a_{s2}A_{i2} + \cdots + a_{sn}A_{in} = 0 \qquad (s \neq i)
$$

$$
a_{1s}A_{1j} + a_{2s}A_{2j} + \cdots + a_{ns}A_{nj} = 0 \qquad (s \neq j)
$$

4. Laplace 展开定理

定理 2 n 阶行列式 D 等于其取定的 k 行（列）的所有 k 阶子式与其对应的代数余子式的乘积之和.

设取定 D 的 k 行所得的所有 k 阶子式为 N_1，N_2，…，N_t，其对应的代数余子式为 A_1，A_2，…，A_t，则

$$
D = \sum_{i=1}^{t} N_i A_i \tag{1.9}
$$

其中 $t = C_n^k$.

5. 克莱姆（Cramer）法则

定理 3 若线性方程组

$$
\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}
$$

的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

则它有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ \cdots,\ x_n=\frac{D_n}{D}$$

其中 $D_j(j=1,2,\cdots,n)$ 是将 D 中的第 j 列元素依次换成上述方程组的常数项所得到的行列式. 即

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (j=1,2,\cdots,n)$$

二、重点难点

1. 行列式的两种定义.
2. 行列式的性质与计算是重点，要熟练掌握行列式的各个性质以及展开定理.
3. 行列式按一行（列）展开定理以及 Laplace 定理.
4. n 阶行列式计算.
5. 克莱姆（Cramer）法则的应用.

三、学习要求

1. 了解 n 级排列的定义、逆序数和奇偶性等概念.
2. 理解 n 阶行列式的定义.
3. 掌握行列式的性质.
4. 掌握用定义、性质和有关定理计算行列式的方法.
5. 理解 Cramer 法则，掌握 Cramer 法则的应用.

四、典型题分析

例1 设$f(x)=\begin{vmatrix} 2-x & 2 & 0 & -1 \\ 4 & x+1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 2x & -2 \\ 1 & -3 & 0 & x-1 \end{vmatrix}$，试求$f(x)$展开式中$x^4$项的系数，$x^3$的系数以及常数项.

分析 本题考察行列式的定义. 注意到x^4和x^3只会出现在主对角线乘积项中，所以我们并不需要求出整个$f(x)$. 而对于常数项，再根据多项式特点可知常数项为$f(0)$.

解 根据行列式定义，此行列式展开中只有$(2-x)(x+1)(2x)(x-1)$中才含有x^4和x^3.

因为$(2-x)(x+1)(2x)(x-1)=-2x^4+4x^3+2x^2-4x$，所以$f(x)$展开式中$x^4$项的系数为$-2$，$x^3$的系数为4. 又因为

$$f(0)=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 0 & -1 \end{vmatrix}=69$$

从而常数项为69.

注 虽然行列式定义在实际当中用的比较少，但是对于某些特殊问题还是很方便的. 而且对理解行列式的性质和一些计算方法很有帮助. 希望读者能够加以深刻理解.

例2 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

分析 有限阶行列式理论上来说都可以将其化为三角行列式来做，当元素都是数字时这种方法更常用，本题采用此方法计算. 当然如果观察到某行或某列零元素很多，也可以利用按行（列）展开来求解.

解

$$D=\begin{vmatrix}1&0&-1&2\\0&-1&1&0\\-1&0&2&-1\\0&2&0&-1\end{vmatrix}\xlongequal{r_3+r_1}\begin{vmatrix}1&0&-1&2\\0&-1&1&0\\0&0&1&1\\0&2&0&-1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4+2r_2}\begin{vmatrix}1&0&-1&2\\0&-1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&2&-1\end{vmatrix}\xlongequal{r_4-2r_3}\begin{vmatrix}1&0&-1&2\\0&-1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&-3\end{vmatrix}=3$$

注 本题也可以采用按行（列）展开的方法，比如按第一行或按第一列展开，这种方法留给读者自己完成.

例3 计算 $D=\begin{vmatrix}a&b&c+d&1\\b&c&a+d&1\\c&d&a+b&1\\d&a&b+c&1\end{vmatrix}$.

分析 这个行列式每行元素和相等，可先将其他列都加到第一列，再简化.

解

$$D=\begin{vmatrix}a&b&c+d&1\\b&c&a+d&1\\c&d&a+b&1\\d&a&b+c&1\end{vmatrix}\xlongequal{c_1+c_2+c_3+c_4}\begin{vmatrix}a+b+c+d+1&b&c+d&1\\a+b+c+d+1&c&a+d&1\\a+b+c+d+1&d&a+b&1\\a+b+c+d+1&a&b+c&1\end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c+d+1)\begin{vmatrix}1&b&c+d&1\\1&c&a+d&1\\1&d&a+b&1\\1&a&b+c&1\end{vmatrix}=0.$$

例4 计算 $D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&3&4&5\\2^2&3^2&4^2&5^2\\2^4&3^4&4^4&5^4\end{vmatrix}$.

分析 此行列式类似但又不是范德蒙行列式，利用加边方法构造成范德蒙行列式，再结合范德蒙行列式的结论来求解.

解 构造行列式

$$D_1=\begin{vmatrix}1&1&1&1&1\\2&3&4&5&x\\2^2&3^2&4^2&5^2&x^2\\2^3&3^3&4^3&5^3&x^3\\2^4&3^4&4^4&5^4&x^4\end{vmatrix}$$

可以看出此行列式为范德蒙行列式，从而

$$D_1=(x-5)(x-4)(x-3)(x-2)\prod_{2\leqslant i<j\leqslant 5}(j-i)$$

将前四项乘积展开可得 x^3 的系数为 $-14\prod\limits_{2\leqslant i<j\leqslant 5}(j-i)$. 如果对 D_1 按第五列展开可得 x^3 的系数为 $(-1)^{4+5}D$. 所以有 $D=14\prod\limits_{2\leqslant i<j\leqslant 5}(j-i)$.

例5 设 $D=\begin{vmatrix}1&0&1&0\\-1&2&-3&1\\0&1&-1&3\\2&1&1&0\end{vmatrix}$，求 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}$，其中 $A_{4j}(j=1,2,3,4)$ 分别为第四行元素的代数余子式.

分析 根据代数余子式的概念可知，一个元素的代数余子式与其所在行的元素大小无关. 利用这个特点，可将上述四个三阶行列式的和转化为一个四阶行列式.

解 设 $D_1=\begin{vmatrix}1&0&1&0\\-1&2&-3&1\\0&1&-1&3\\1&1&1&1\end{vmatrix}$，则 D 和 D_1 中第四行元素的代数余子式对应相等. 所以对 D_1 按第四行展开可得 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=D_1$，求出 $D_1=-5$，所以 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=-5$.

注 一般情况我们有

$$aA_{41}+bA_{42}+cA_{43}+dA_{44}=\begin{vmatrix}1&0&1&0\\-1&2&-3&1\\0&1&-1&3\\a&b&c&d\end{vmatrix}$$

例 6 计算 $D_n=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$.

分析 这种不确定阶数的行列式其元素排列一般都具有某种规律性，对这个行列式，我们可以很容易观察其元素取值的规律从而写出 D_{n-1}，D_{n-2}，…，D_2，D_1.

比如我们可以写出 D_{n-1} 为

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

解这种行列式的常用方法是将 D_n 按行（列）展开，从而建立一个递推公式，即低阶行列式与高阶行列式间的关系式，进而求出 D_n.

解 对 D_n 按第一列展开有

$$D_n=xD_{n-1}+(-1)^{1+n}a_n\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}$$

于是得递推公式

$$D_n=xD_{n-1}+a_n$$

所以

$$\begin{aligned} D_n &= xD_{n-1}+a_n=x(xD_{n-2}+a_{n-1})+a_n=x^2D_{n-2}+a_{n-1}x+a_n \\ &= x^2(xD_{n-3}+a_{n-2})+a_{n-1}x+a_n \\ &= \cdots \\ &= x^{n-2}(xD_1+a_2)+a_3x^{n-3}+\cdots+a_{n-1}x+a_n \\ &= x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n \end{aligned}$$

注 对于最后求 D_n，我们也可以采用找规律的办法. 例如我们根据 $D_1=x+a_1$，$D_2=xD_1+a_2$ 可以求出 D_2，再根据 $D_3=xD_2+a_3$ 求出 D_3，依次下去，当我们可以看出 D_n 表达式的规律后，就可以把 D_n 写出来了. 详细过程留给读者自己完成.

例 7 设 α，β，γ 为方程 $x^3+ax+b=0$ 的 3 个根，证明：

$$D=\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \gamma & \alpha & \beta\\ \beta & \gamma & \alpha\end{vmatrix}=0$$

分析 注意到方程的特点是没有二次项，即二次项系数为 0. 而由根与系数的关系可知二次项系数为 $\alpha+\beta+\gamma$. 利用这个特点可证明此题.

证明 由根与系数的关系可知 $\alpha+\beta+\gamma=0$. 所以

$$D=\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \gamma & \alpha & \beta\\ \beta & \gamma & \alpha\end{vmatrix}\xlongequal{c_1+c_2+c_3}\begin{vmatrix}\alpha+\beta+\gamma & \beta & \gamma\\ \alpha+\beta+\gamma & \alpha & \beta\\ \alpha+\beta+\gamma & \gamma & \alpha\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & \beta & \gamma\\ 0 & \alpha & \beta\\ 0 & \gamma & \alpha\end{vmatrix}=0$$

例 8 设方程组 $\begin{cases}\lambda x_1-x_2-x_3+x_4=0\\ -x_1+\lambda x_2+x_3-x_4=0\\ -x_1+x_2+\lambda x_3-x_4=0\\ x_1-x_2-x_3+\lambda x_4=0\end{cases}$ 存在非零解，求 λ 的值.

分析 克莱姆（Cramer）法则包括了齐次线性方程组的情况，因为齐次线性方程组特殊性在于其总是有解（零解），所以对于齐次线性方程组我们有如下结论：

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0\end{cases}\text{仅有零解的充要条件是 } D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}\neq 0$$

一个等价说法为

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0\end{cases}\text{存在非零解的充要条件是 } D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=0$$

解 根据上述分析我们知道

$$\begin{cases}\lambda x_1-x_2-x_3+x_4=0\\ -x_1+\lambda x_2+x_3-x_4=0\\ -x_1+x_2+\lambda x_3-x_4=0\\ x_1-x_2-x_3+\lambda x_4=0\end{cases}$$存在非零解的充要条件是$$\begin{vmatrix}\lambda & -1 & -1 & 1\\ -1 & \lambda & 1 & -1\\ -1 & 1 & \lambda & -1\\ 1 & -1 & -1 & \lambda\end{vmatrix}=0$$

而

$$\begin{vmatrix}\lambda & -1 & -1 & 1\\ -1 & \lambda & 1 & -1\\ -1 & 1 & \lambda & -1\\ 1 & -1 & -1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^3(\lambda+3)$$

所以$(\lambda-1)^3(\lambda+3)=0$，即$\lambda=1$或$\lambda=-3$.

五、习题解析

习题 1.1

1. 求以下排列的逆序数，并指出排列的奇偶性.

(1) 23157846　　　　(2) 528497631

(3) $24\cdots(2n)13\cdots(2n-1)$　　　　(4) $24\cdots(2n)(2n-1)(2n-3)\cdots31$

解　(1) $\tau(23157846)=1+1+1+2+2=7$，排列为奇排列.

(2) $\tau(528497631)=4+1+5+2+4+3+2+1=22$，排列为偶排列.

(3) $\tau(24\cdots(2n)13\cdots(2n-1))=1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$,

当$n=4k(k=1,2,\cdots)$或$n=4k+3(k=0,1,2,\cdots)$时此排列为偶排列，当$n=4k+1$或$n=4k+2(k=0,1,2,\cdots)$时此排列为奇排列；

(4) $\tau(24\cdots(2n)(2n-1)(2n-3)\cdots31)=1+2+\cdots+n+(n-1)+\cdots+1=n^2$,

n为奇数时为奇排列，n为偶数时为偶排列.

2. 确定i、j，使下面的8级排列为奇排列.

(1) $62i418j3$　　　　(2) $4i13j765$

解　(1) $\tau(62741853)=5+1+4+2+2+1=15$，所以当$i=7$，$j=5$时，排列为奇排列.

(2) $\tau(42138765)=3+1+3+2+1=10$，所以当$i=8$，$j=2$时，排列为奇排列.

3. 如果排列$i_1i_2\cdots i_{n-1}i_n$的逆序数为k，求排列$i_ni_{n-1}\cdots i_2i_1$的逆序数.

解 因为 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(i_n i_{n-1} \cdots i_1) = \dfrac{n(n-1)}{2}$，所以

$$\tau(i_n i_{n-1} \cdots i_1) = \frac{n(n-1)}{2} - k$$

4. 确定 i，j.

（1）使 $a_{13}a_{29}a_{37}a_{42}a_{5i}a_{61}a_{75}a_{8j}a_{94}$ 为 9 阶行列式 $|a_{ij}|$ 带正号的项；

（2）使 $a_{12}a_{21}a_{3i}a_{43}a_{57}a_{68}a_{7j}a_{84}a_{96}$ 为 9 阶行列式 $|a_{ij}|$ 带负号的项.

解

（1）因为 $\tau(397261584) = 18$，所以 $i=6$，$j=8$ 时 $a_{13}a_{29}a_{37}a_{42}a_{5i}a_{61}a_{75}a_{8j}a_{94}$ 为带正号项；

（2）因为 $\tau(215378946) = 9$，所以 $i=5$，$j=9$ 时 $a_{12}a_{21}a_{3i}a_{43}a_{57}a_{68}a_{7j}a_{84}a_{96}$ 为带负号项.

5. 计算下列行列式.

（1）$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & x & -1 \\ 3 & 0 & x \end{vmatrix}$　　（2）$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

（3）$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 8 & 5 \end{vmatrix}$　　（4）$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

（5）$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$

解

（1）$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & x & -1 \\ 3 & 0 & x \end{vmatrix}$

$= (-1)^{\tau(123)}x^2 + (-1)^{\tau(213)}(-2x) + (-1)^{\tau(231)}3$