



惯性技术与 组合导航

GUANXING JISHU YU ZUHE DAOHANG

戴邵武 徐胜红 史贤俊 肖支才 © 编著

兵器工业出版社

内 容 简 介

本书在介绍惯性导航加速度计和惯性导航陀螺仪的基础上,重点介绍了惯性平台和惯性导航系统的工作原理,还简要介绍了其他类型导航系统基本原理和组合导航系统基本原理等知识。

全书共分十章,本书可供高等院校本科生和研究生作为惯性导航系统课程的教材或教学参考书使用,也可供从事惯性导航与制导系统研究与应用等工作的科学工作者和工程技术人员参考使用。

图书在版编目 (CIP) 数据

惯性技术与组合导航/戴邵武等编著. —北京:兵器工业出版社, 2009. 8

ISBN 978 - 7 - 80248 - 384 - 2

I. 惯… II. 戴… III. ①惯性导航②组合导航 IV. TN96

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2009) 第 137460 号

出版发行: 兵器工业出版社
发行电话: 010 - 68962596, 68962591
邮 编: 100089
社 址: 北京市海淀区车道沟 10 号
经 销: 各地新华书店
印 刷: 北京市北中印刷厂
版 次: 2009 年 8 月第 1 版第 1 次印刷

责任编辑: 周宜今
封面设计: 李尘工作室
责任校对: 郭 芳
责任印制: 赵春云
开 本: 787 × 1092 1/16
印 张: 16
字 数: 407 千字
定 价: 45.00 元

(版权所有 翻印必究 印装有误 负责调换)

前 言

惯性导航系统因其输出信息多、抗干扰能力强、工作自主性高，目前在空、海、天、地等各军用及民用领域被广泛使用。在飞机上，尤其是军机，惯导及其组合系统不仅在导航，而且在飞行控制、火力控制及武器投放等方面都有着重要的作用。是否装备惯导，以及装备什么样精度的惯导，已是衡量飞机和武器先进性的重要标志之一。

为适应惯性技术和惯性导航系统的飞速发展，本书在介绍惯性导航加速度计和惯性导航陀螺仪的基础上，重点介绍了惯性平台和惯性导航系统的工作原理，并介绍了组合导航系统的基本原理。

全书共分十章。第一章为绪论，简单介绍导航系统的基本概念；第二章回顾了学习惯性导航系统所必须具备的一些数学基础知识；第三章和第四章分别介绍惯性导航加速度计和陀螺仪这两类最重要的惯性元件；第五章介绍惯性平台的原理，以及单轴和三轴惯性平台；第六章介绍惯性导航系统的基本原理，包括半解析式和解析式惯性导航系统；第七章介绍惯导系统的误差分析；第八章介绍了惯导系统的自主初始对准和传递对准；第九章介绍捷联惯导系统基本原理；第十章对其他多种导航系统原理进行介绍，在此基础上，介绍组合导航系统基本原理。

本书由戴邵武、徐胜红、史贤俊和肖支才共同编著。戴邵武教授担任主编，主要编写了第一、三、四、六、九章，并对全书内容进行统筹审定；第二、八、十章由徐胜红编写；史贤俊编写了第五章；肖支才编写了第七章。硕士生路燕、马长里等同学做了大量文字录入和全部绘图工作，特在此表示感谢。

本书得到了海军航空工程学院训练部、301 教研室各位领导和同事的热情支持，在此表示感谢。

由于作者水平有限，时间仓促，书中不妥或者错误之处在所难免，恳请读者批评指正。

编 者

2008 年 12 月于烟台

目 录

第一章 绪论	(1)
第二章 惯性导航的数学基础	(8)
第一节 线性代数基础	(8)
第二节 地球模型	(11)
第三节 坐标系及坐标变换	(15)
第四节 四元数基础	(22)
第三章 惯性导航加速度计	(26)
第一节 概述	(26)
第二节 线位移式加速度计	(28)
第三节 浮子摆式加速度计	(31)
第四节 挠性加速度计	(38)
第五节 摆式积分陀螺加速度计	(43)
第六节 加速度计的再平衡技术	(47)
第七节 舒拉摆原理	(51)
第四章 惯性导航陀螺仪	(54)
第一节 概述	(54)
第二节 陀螺仪的力学特征	(56)
第三节 两自由度陀螺仪	(65)
第四节 单自由度陀螺仪	(74)
第五节 新型陀螺仪	(82)
第五章 惯性平台系统	(98)
第一节 概述	(98)
第二节 单轴陀螺稳定平台	(100)
第三节 单轴陀螺惯性平台	(104)
第四节 三轴陀螺稳定平台	(110)
第六章 惯导系统的基本原理	(115)
第一节 惯性导航系统的基本力学方程	(115)
第二节 半解析式惯性导航系统	(125)
第三节 解析式惯性导航系统	(137)
第七章 惯导系统的误差分析	(143)
第一节 指北方位惯导系统的运动方程	(143)
第二节 指北方位惯导系统的误差方程	(148)
第三节 误差分析	(150)

第四节 ψ 方程	(152)
第八章 惯导系统的初始对准	(157)
第一节 初始对准的一般概念	(157)
第二节 水平对准	(159)
第三节 方位对准	(163)
第四节 陀螺仪的测漂、定标和漂移补偿	(167)
第五节 卡尔曼滤波器在初始对准中的应用	(177)
第六节 传递对准	(193)
第九章 捷联惯导系统	(200)
第一节 概述	(200)
第二节 捷联惯导系统的位置矩阵与姿态矩阵	(201)
第三节 捷联惯导系统的基本力学方程	(204)
第四节 惯性元件的误差补偿	(213)
第五节 捷联惯导系统简要工作流程	(214)
第六节 无陀螺捷联惯导系统	(217)
第十章 组合导航系统	(219)
第一节 其他类型导航系统	(219)
第二节 组合导航系统的组合方式	(238)
第三节 SINS/GPS 组合导航系统	(243)
第四节 SINS/北斗组合导航系统	(245)
参考文献	(249)

第一章 绪 论

一、导航的基本概念

所谓导航，顾名思义就是引导航行的意思，也就是正确地引导航行体沿着预定的航线、以要求的精度、在指定的时间内将航行体引导至目的地。导航系统是确定航行体的位置和方向，并引导其按预定航线航行的整套设备（包括航行体上的、地面上的和空间上的设备）。导航系统为很多交通工具的操作和控制系统提供必要的信息，操作控制系统根据这些信息来产生相应的动作。例如，这个动作可能是一个飞行器自动驾驶仪的方向校正指示或者是引导自动飞行器的反馈控制信号。这些系统通过弹上计算机与弹载传感器合并，允许在很少或没有必要的外界辅助源的情况下自主地工作。

要使飞机、舰船等成功地完成所预定的航行任务，除了起始点和目标点位置之外，还需要随时知道航行体的即时位置、航行速度、航行体的姿态、航向等参数，这些参数通常称为导航参数，其中最主要的就是必须知道航行体所处的即时位置，因为只有确定了即时位置才能考虑怎样到达下一个目的地的问题。如果连自己已经到了什么地方，下一步该到什么地方都不知道的话，那就无从谈起完成预定的航行任务。由此可见，导航问题对飞行来说是极为重要的。早期，导航工作一般是由领航员完成的。随着科学技术的发展，现在越来越多地使用导航仪器，使其代替领航员的工作而自动地执行导航任务，自然，这些能实现导航功能的仪器、仪表系统就是导航系统。当导航系统作为独立装置并由航行体带着一起做任意运动时，其任务就是提供即时位置信息和航向信息。对航行体的作用就只限于影响操作人员按需要驾驶飞机或舰船，使之到达预定的目的地。以航空为例，测量飞机的位置、速度、姿态等导航参数，通过驾驶人员或飞行自动控制系统引导其按预定航线航行的整套设备（包括地面设备）称为飞机的导航系统。导航系统只提供各种导航参数，而不直接参与对航行体航行的控制，因此它是一个开环系统，在一定意义上，也可以说导航系统是一个信息处理系统，即把导航仪表所测量的航行信息处理成需要的各种导航参数。

通常将飞机、舰船、导弹、坦克及宇宙飞行器等，统称载体，于是也就有了航空导航、舰船导航、陆地导航及航天制导之分。

导航的最基本要素就是载体的即时位置（坐标）、航行速度、航行方位（航向）或飞行过距离等。例如，一架飞机从一个机场起飞，希望准确飞到第二个机场，除了要知道起始机场的位置坐标外，更主要的就是即时了解飞机空中实时的位置、航向和速度。因为只有明确了飞机当前的位置参数，才能借助机上和地面的导航设备与人工目视协同，完成正确引导飞机向目的地航行的任务。可见，导航对飞机能否准确完成飞行和作战任务是非常重要的。

追溯历史，中国人发明的指南针就是用于指示船舶航行方向的最简单的航行仪器，随后用于飞机上的磁罗盘、陀螺半罗盘、陀螺磁罗盘和航向姿态系统等，都是以磁定向并确定飞机飞行航向的重要导航仪器。但是，这些导航仪器（或仪表）并不能直接确定飞机的空中

位置。因为具有同一航向的飞机，即使在一个很小范围的空域内也可以有很多架。显然，这种单一导航技术已无法满足社会生产发展和人类历史进步的需要。特别是随着航空、航海及航天技术的飞速发展，简单的、单一功能的导航仪器，已远远不能满足这些飞机、舰船及其他载体的要求。因此，也就提出了如何利用当时科学技术的新成就，创造出精度更高、用途更广和适应性更强的导航技术和导航仪器，以适应导航的新要求。无线电导航、天文导航、多普勒雷达导航、卫星导航、惯性导航和组合导航等正是在导航技术发展的需要和科学技术发展的可能条件下，迅速发展并得到广泛应用的导航方案。

二、几种主要导航方法简介

（一）无线电导航

无线电导航是利用无线电波在均匀介质和自由空间直线传播及恒速两大特性，进行引导航行的一种方法。

这种导航方法分两种，一种是通过设置在飞机和地面上的收发设备，测量飞机相对地面台的距离、距离差或相位差定位。如地美依测距导航系统、罗兰双曲线导航系统、奥米加双曲线导航系统。另一种是通过机上接收系统，接收地面台站发射的无线电信号，测量飞机相对于已知地面台的方位角来定位，如伏尔测向导航系统。目前军用飞机使用较多的是测向与测距共用一个地面台的塔康导航系统。

无线电导航的主要优点是精度较高，缺点是工作时必须有地面台配合，电波易受干扰也容易暴露自身，在军事上应用就显得严重不足。

（二）多普勒雷达导航

多普勒雷达导航是利用随飞机速度变化，在发射波和反射波之间产生的频率差——多普勒频移的大小，来测量飞机相对地面的速度，进而完成导航任务的一种方法。

这种导航方法，只需要机上设立雷达发射和接收装置便可测出地速的大小。再借助机上天向系统输出航向角，将地速分解成沿地理北向和东向的速度分量，进而确定两个方向的距离变化及经、纬度大小，也就确定了飞机位置。

多普勒雷达导航的主要优点是无须地面台，因而是主动式，自主性强。但是它工作时必须发射电波，容易受干扰和暴露自己；此外，定位精度与反射面形状有密切关系，当飞机在海面和沙漠上空工作时，由于反射性极差会大大降低工作性能；同时导航精度也受雷达天线姿态的影响，当飞机接收不到反射波时，就完全丧失工作能力。

（三）卫星导航

目前广泛应用的卫星导航是 GPS 全球定位系统和 GLONASS 全球导航系统。它们都是利用无线电波传播的直线性和等速性实施测距定位，以及利用载体与卫星之间的多普勒频移进行测速的导航方法。

卫星导航由导航卫星、地面站和用户设备三大部分组成。GPS 导航星共有 24 颗分布在六个近似圆形轨道上；地面站主要用来跟踪、计算和向卫星发送数据；用户设备包括接收、处理和显示部分。天空中的卫星由于位置随时可知，如同地面上的无线电导航台搬到了空中，于是便可测量卫星到飞机的距离，实现定位要求。同时卫星发射的电波，经飞机上接收设备测出二者之间的多普勒频移，可以确定飞机相对卫星的距离变化率，即载体运动速度。

GPS 卫星导航系统，是近几年发展速度最快的一种导航系统。它的主要优点是导航精度

很高,又适于全球导航,加之用户设备简单,价格低廉,所以应用领域十分广泛。但它需要庞大的地面站支持,电波又易受干扰,是一种被动式导航系统。特别是卫星受人控制,作为军事目的应用时易受制于人。

“伽利略”是欧洲联合研制的卫星导航系统,原理和 GPS 基本相同。“伽利略”的定位精度优于 GPS,军民信号都可以达到 1m 的精度。“伽利略”为地面用户提供 3 种信号:免费使用的信号、加密且需交费使用的信号、加密且需满足更高要求的信号。其精度依次提高,最高精度比 GPS 高 10 倍,即使是免费使用的信号精度也达到 6m。“伽利略”系统的另一个优势在于,它能够与美国的 GPS、俄罗斯的 GLONASS 系统实现多系统内的相互兼容。伽利略的接收机可以采集各个系统的数据或者通过各个系统数据的组合来实现定位导航的要求。

我国的北斗导航系统的方案于 1983 年提出,北斗星系统由三颗(两颗工作卫星、一颗备用卫星)定位卫星(北斗一号)、地面控制中心为主的地面部分、北斗用户终端三部分组成。其突出特点是构成系统的空间卫星数目少、用户终端设备简单、一切复杂性均集中于地面中心处理站。“北斗一号”卫星定位系统是利用地球同步卫星为用户提供快速定位、简短数字报文通信和授时服务的一种全天候、区域性的卫星定位系统。可向用户提供全天候、二十四小时的即时定位服务,授时精度可达数十纳秒的同步精度,其精度与 GPS 相当。

(四) 天文导航

利用天空中的星体,在一定时刻与地球的地理位置具有相对固定关系这一特点,通过观察星体,以确定载体位置的一种导航方法。

天文导航主要借助星体跟踪器自动跟踪两个星体,以便随时测出星体相对载体基准参考面的高度角和方位角,并经过计算得到载体的位置和航向。通常载体基准参考面的确定由陀螺稳定平台来实现。

天文导航系统的定向和定位精度不随工作时间增长而降低,隐蔽性好,自主性强。所以天文导航尤其是天文与其他导航的组合仍具有广泛的应用,特别是高空、远程、跨海洋、过极地、经沙漠的飞行更显优势。但在云雾天气飞行或中、低空即使天气很好,只能看见太阳而看不到其他星体时,难以完成定位的任务,这使天文导航在航空上的应用受到一定限制。

三、惯性导航

(一) 惯性导航的基本原理

惯性导航是利用惯性测量元件测量载体相对于惯性空间的运动参数,并经计算后实施导航任务的。由加速度计测量载体的加速度,并在给定运动初始条件下,由导航计算机算出载体的速度、距离和位置(经、纬度);由陀螺仪测量载体的角运动,并经转换、处理,输出载体的姿态和航向。

(二) 惯性导航的基本组成

通过对惯性导航基本原理的描述可知,一个完整的惯性导航系统应包括以下几个主要部分:

1. 加速度计

加速度计用于测量飞机运动的加速度。一般应由三个加速度计完成三个方向的测量。

2. 稳定平台

稳定平台为加速度计提供一个准确的安装基准和测量基准,以保证不管飞机作何种机动飞行,三个加速度计的空间指向是不变的。也就是这个稳定平台在方位上要指正北向,在平面上要与当地水平面平行,使平台的三个轴正好指向东、北、天三个方向。陀螺仪是稳定平台的核心部件,因而这样的平台也叫陀螺稳定平台。正因为有了这样一个基准平台,飞机相对该平台在方位上的偏角就反映了飞机的航向,飞机相对该平台在水平两个轴向上的偏角就反映了飞机的俯仰和倾斜(横滚)。可见,稳定平台同时还代替了地平仪、罗盘或航向姿态系统的功能。

3. 导航计算机

导航计算机用于进行积分、相加、乘除和三角函数等数学计算,同时为保证平台始终水平和指北,要随飞机运动和地球自转,不断计算出修正平台位置的指令信号,还要计算并补偿有害加速度等。

4. 控制显示器

控制显示器的一个功用是向计算机输入飞机初始运动参数和位置参数;另一个功用是显示飞行过程中的导航参数,还可以进行必要的控制操作,以实现惯性导航的更多功能。

(三) 惯性导航的特点

随着科学技术和国防事业的不断发展,人们对导航技术也提出了越来越高的要求。导航设备除了一般设备要求的安全可靠、体积小、重量轻和价格低廉等以外,在军事上应用的要求是十分苛刻的。通常惯性导航大多是可以满足这些特殊要求的,主要有以下几个方面:

1. 工作自主性强

目前飞机导航的方法有多种,根据获得导航参数的手段,其方法大致可以分为自主式和非自主式两大类。不依靠外界信息,在不与外界发生任何联系的条件下能独立完成导航或制导任务的是自主式的;而必须有地面设备或依靠其他装置才能完成导航和制导任务的就是非自主式的。

自主式导航工作时,导航设备不依靠地面辅助设备或其他方面的任何信息,而能独立自主地进行工作。这样一方面可以扩大飞机的活动范围,在没有任何地面导航台的边远地区和海洋上空执行任务;另一方面它与外界无任何信息交换,可以避免被敌人发现而受攻击或施放干扰。对军用机来讲,这两方面尤为重要,它不希望受地面导航设备的影响太大,要求能独立自主、安全、隐蔽地去执行自己的任务。惯性导航仅仅依靠机载设备感测加速度,不依靠任何其他信息而能独立地完成导航任务,是一种自主性最强的导航方法。

2. 提供导航参数多

惯性导航可以为机上用户提供加速度、速度、位置、姿态和航向等最全面的导航参数,可以与飞行控制系统交联,实现飞机的自动驾驶;与飞机火控系统交联,实时提供火控计算所需的速度、姿态和航向等信号,极大地提高瞄准和攻击精度;与飞机着陆系统配合,保证安全可靠着陆。另外,光学瞄准系统、侦察照相系统、电视摄像系统以及雷达天线系统等机载设备都离不开惯性导航系统输出的有关信号。惯性导航的这一优势也是其他导航系统无法比拟的。

3. 抗干扰力强,适用条件宽

惯性导航对磁、电、光、热及核辐射等形成的波、场、线的影响不敏感,具有极强的抗

干扰能力,不易被敌方发现,也不易被敌方干扰;同时也不受气象条件限制,能满足全天候导航的要求;也不受地面形状、沙漠或海面影响,能满足全球范围导航的要求。

但惯性导航也有着突出缺点,即导航精度随时间增长而降低。

由于惯性导航的核心部件陀螺仪存在漂移误差,致使稳定平台随飞行时间的不断增长偏离基准位置的角度不断增大,使加速度的测量和即时位置的计算误差不断增加,导航精度不断降低。所以,惯性导航在短程飞行中具有较高的精度,而长时间的远程飞行导航精度不甚理想。为了提高远程飞行的精度,只有提高陀螺仪、加速度计的制造精度,而这都会增加生产中的难度和提高产品的成本。例如美国 B-52 远程轰炸机使用的惯导系统,其导航精度由小飞机的 1n mile/h 提高到 0.04n mile/h ,其精度满足了要求,但成本却大大提高了。

(四) 平台式惯导与捷联式惯导

平台式惯性导航系统(简称平台式惯导),核心部分是有一个实际的陀螺稳定平台。平台上的三个实体轴,重现了所要求的东、北、天地理坐标系三个轴向,它为加速度计提供了精确的安装基准,保证三个加速度计测得的值正好是导航计算时所需的三个加速度分量。同时,这个平台完全隔离了飞机机动运动,保证了加速度计的良好工作环境。平台上的陀螺仪作为平台轴相对基准面偏离的角度(角速度)信号传感器,将其检测信号送至伺服放大器,经电机带动平台轴重新返回基准面。

捷联式惯性导航系统(简称捷联式惯导)与平台式惯导的主要区别就是不再有实体的陀螺稳定平台,加速度计和陀螺仪直接安装在载体上。“平台”这个概念和功能还是要有,只是由导航计算机来实现,这时的关键问题是要将陀螺仪测量的绕机体坐标系的三个角速度通过计算机实时计算,形成由机体坐标系向类似实际平台的“平台”坐标系转换,即解出姿态矩阵表示式。以这个“数学平台”为基础,再将机体坐标系各轴上的加速度信号变换成沿“平台”坐标系各轴上的加速度信号,这样才能进行导航参数计算;同时,利用这个姿态矩阵,还可求得载体的姿态和航向信号,使实体平台功能无一缺少。

捷联式惯导的主要优点是,取消了结构复杂的机电式平台,减少了大量机械零件、电子元件、电气线路,不仅减小了体积、质量、功耗和成本,还大大提高了系统可靠性和可维护性。但是由于陀螺仪和加速度计直接与载体固连,载体的运动将直接传递到惯性元件(陀螺、加速度计),恶劣的工作环境将引起惯性元件一系列动态误差,所以误差补偿技术要复杂得多,另外导航精度一般低于平台式惯导,这是捷联式惯导的主要不足。由于捷联式惯导除了进行平台式惯导所需的一切计算外,还要进行大量的姿态矩阵、坐标变换以及动态误差补偿计算,所以对计算机的速度、容量和精度要求均比平台式高。计算机问题曾是捷联式惯导发展过程中的一大障碍,但目前的计算机技术不仅满足了捷联式惯导的所有要求,而且反过来成为促进捷联式惯导实时计算、误差补偿和冗余配置等多项技术发展的积极因素。

四、惯性导航与惯性制导的区别

惯性制导(Inertial Guidance)与惯性导航(Inertial Navigation)的原理是相同的,都基于牛顿运动第二定律,以测量载体加速度为其最基本的信息源;其组成也是基本相同的,都有陀螺仪、加速度计和稳定平台(对平台式惯性制导系统而言);都有平台式和捷联式两种类型;输出参数也基本相同。

二者主要的区别是工作方式不同,惯性导航可以工作在两种不同的状态:一种是根据惯

性导航系统输出的位置、航向等导航参数,驾驶员可以人工自由操纵并引导飞机按预定航线飞向目的地,此时惯导系统可以说是一个导航参数测量装置,输出这些信息后即完成它的任务;另一种是根据惯性导航系统输出的导航参数,直接传递给飞行自动控制系统,通过控制系统解算形成控制信号,直接操纵飞机自动按预定航线飞向目的地,这时的惯性导航系统相当于飞行控制系统中的一个敏感测量环节,由飞控系统实施闭环控制,驾驶员仅仅起到一个监控作用,不参与飞机操纵。习惯上把第一种工作方式称为惯性导航系统工作于指示状态,第二种工作方式称为自动导航状态。

惯性导航系统用于各类导弹和各类火箭时,主要是利用惯性导航系统输出的位置、加速度、速度或航向姿态信息,形成指令信号,控制载体姿态、航向或关闭发动机,使其按预定轨道航行。显然这种控制运行是惯导系统与控制系统的紧密结合,类似惯性导航中的自动导航状态。但由于导弹、火箭均无人监控,所以习惯上把无人操纵和监控的运载体上的惯性导航系统叫惯性制导系统。

由于惯性制导系统用于无人操纵的载体,所以构成上不同于惯性导航系统,不设控制显示器。另外,惯性制导系统工作上还有两个特点:一是由于导弹、火箭运行时间很短,所以导航精度随时间增长而下降的矛盾不突出,通常对其陀螺仪和位置精度的要求低于惯性导航系统一个数量级;二是导弹、火箭发射时的冲击振动载荷较飞机、舰船大得多,所以对惯性制导的强度、抗震及可靠性要求特别高。

五、惯性技术的发展

惯性导航、惯性制导统称惯导。把惯导系统技术、惯性元件技术、惯性测量技术以及与其有关的系统和装置一律称为惯性技术。

惯性技术按陀螺仪的发展来分,最早为滚珠轴承式框架陀螺仪,以后又出现液浮、气浮支承的陀螺仪以及静电、挠性、激光、光纤陀螺仪等。

惯性技术按惯导系统所使用的陀螺仪来分,经历了以下几个阶段:

1942年德国V-2火箭上,用两个二自由度位置陀螺仪控制箭体的姿态和航向,用一个陀螺加速度计测量箭体纵轴方向的加速度。当飞行速度达到1380m/s时(飞行70s),接通火箭发动机的熄火装置,关闭发动机,使箭体按自由弹道飞行,实现了轨道和弹着点的控制。尽管这时还没有完善的三轴陀螺稳定平台,结构上还有许多不合理之处,导航和制导精度也比较低,但它毕竟是当时世界上独一无二的付诸实际使用的第一个惯性制导系统,把惯导技术的研究推向了一个新的高度。

20世纪50年代,以液浮和气浮陀螺仪构成的平台式惯导系统开始在飞机、舰船和导弹上广泛应用。1954年,惯导系统在飞机上试飞成功。1958年,装备液浮陀螺惯导系统的核潜艇,从珍珠港附近潜入冰层以下的深海进行远程航行,穿过北极到达欧洲波斯兰港,历时21天,潜航96h,露出水面时,其实际位置和计算位置仅差几海里。这一时期航空惯导的典型代表是美国利登(Litton)公司的军用LN-3和民用LTN-51系统,它们是以液浮陀螺、液浮摆式加速度计构成的平台式惯导系统。

20世纪60年代,动力调谐式挠性陀螺仪研制成功,挠性加速度计代替液浮摆式加速度计。1966年美国基尔福特(Kearfott)公司研制出挠性陀螺惯导系统,并用于飞机和导弹,这为后来航空惯导的典型代表美国利登公司的军用LN-39和民用LTN-72系统的出现奠定

了基础。

20 世纪 70 年代, 在利用高压静电场支承球形转子、取代机械支承的静电陀螺研制成功后, 先后在核潜艇和远程飞机上装备静电陀螺平台式惯导系统。

20 世纪 80 年代以后到 90 年代初, 以激光陀螺仪、光纤陀螺仪为代表的捷联式惯导系统, 得到了极其迅速的发展和非常广泛的应用。这一时期航空惯导的典型代表是利登公司的环形激光陀螺捷联惯导系统 LN-93, 美国霍尼韦尔 (Honeywell) 公司的环形激光陀螺捷联惯导系统 H-423 (H-423/E)。

20 世纪 90 年代以后, 惯性技术的发展, 在系统方面主要是广泛应用惯导与 GPS 全球定位系统以及惯导与其他导航系统的双重和多重组合。

第二章 惯性导航的数学基础

本章主要回顾和介绍惯性导航理论涉及的一些数学基础知识，包括向量和矩阵的基本代数运算、地球模型、常用坐标系、进行坐标变换的方向余弦矩阵，以及四元数知识等。

第一节 线性代数基础

一、向量与矩阵运算

惯性导航研究中需要进行大量运算，向量和矩阵的应用极大地方便了各种变换和解算方程的推导，并使结论更加简洁。

(一) 向量

一个由 n 个标量数值 x_i 构成的列向量 X 表示如下

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

行向量可以由列向量转置得到：

$$X^T = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]$$

(二) 矩阵

一个由 $n \times m$ 个标量 a_{ij} 构成的矩阵 A 表示如下

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

列向量可以看成 $(n \times 1)$ 矩阵，行向量可以看成 $(1 \times n)$ 矩阵；矩阵也可以看成由行向量或列向量排列而成。

矩阵 A 的转置可以表示如下

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

(三) 向量/矩阵运算

相容的向量和矩阵可以按照下面的基本运算来计算。

加法:

$$C = A + B \quad \text{或} \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

减法:

$$C = A - B \quad \text{或} \quad c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

乘法:

$$C = AB \quad \text{或} \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \times b_{kj}$$

相容的向量或矩阵在加法和减法中是指应具有相同的行数和列数; 对于乘法, 是指左边矩阵的列数必须等于右边矩阵的行数。

矩阵求逆等同于矩阵除法运算。 $n \times n$ 方阵 A 的逆定义如下

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_{n \times n}$$

其中, 单位矩阵 $I_{n \times n}$ 定义如下

$$I_{n \times n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

只有矩阵是非奇异矩阵时, 该矩阵才有逆。非奇异矩阵的行列式不等于零, 即

$$|A| \neq 0$$

向量/矩阵运算遵循一些特殊规则:

(1) 矩阵相乘不满足交换律, 即

$$AB \neq BA$$

(2) 矩阵乘积的转置等于各矩阵转置后以相反的顺序相乘:

$$(AB)^T = B^T A^T$$

(3) $n \times 1$ 维向量 X 和 $n \times 1$ 维的向量 Y 的内积为

$$X^T Y = \sum_{i=1}^n x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n \quad (2.1)$$

(4) $n \times 1$ 维向量 X 和 $m \times 1$ 维向量 Y 的外积为

$$XY^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} [y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_m] = \begin{bmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & \cdots & x_1 y_m \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & \cdots & x_2 y_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n y_1 & x_n y_2 & \cdots & x_n y_m \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

(四) 矩阵/向量乘积

给定一对相容的矩阵和向量的乘积如下

$$Y = AX \quad (2.3)$$

或

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

矩阵与向量相乘时的相容条件是矩阵的列数必须等于被乘向量的行数。

(五) 相似变换

在式 (2.3) 中, X 和 Y 被矩阵 A 联系在一起。如果 X 和 Y 维数相同, 且利用非奇异 (可逆) 矩阵 B 把向量 X 和 Y 变换成另外一对向量, 如

$$U = BX$$

$$V = BY$$

那么向量 U 和 V 就被相似变换联系在一起。可由下面的计算步骤说明:

$$V = BY = BAX = BAB^{-1}U \quad (2.4)$$

其中, 矩阵 “ BAB^{-1} ” 是相似变换。

(六) 三维向量

三维空间状态向量在惯导研究中会大量用到, 并且经常要用到向量叉乘等运算公式。

向量的叉乘可以用一个矩阵/向量乘积来表示。当 A 和 B 均为三维向量时, A 和 B 的叉乘可表示为

$$A \times B = \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b_3 & -b_2 \\ -b_3 & 0 & b_1 \\ b_2 & -b_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = -B \times A \quad (2.5)$$

也就是说: 向量的叉乘可以表示成一个矩阵和一个向量的乘积, 其中矩阵称 “斜对称阵”。斜对称矩阵的性质是它的转置等于其自身取负, 即

$$A^T = -A \quad (2.6)$$

二、向量与矩阵微积分

向量和矩阵的微积分运算遵循相同的规则。

一个向量 (矩阵) 对一个标量求导仍是一个向量 (矩阵), 求导后的向量 (矩阵) 的元素是原来向量 (矩阵) 中的元素分别对那个标量求导的结果。例如, 向量 X 对时间 t 求导:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

而一个标量 a 对一个向量求导, 定义为如下形式的行向量:

$$\frac{\partial a}{\partial \mathbf{X}} = \left[\frac{\partial a}{\partial x_1} \quad \frac{\partial a}{\partial x_2} \quad \cdots \quad \frac{\partial a}{\partial x_n} \right] \quad (2.8)$$

如果标量 a 表示为

$$a = \mathbf{Y}^T \mathbf{X} = y_1 x_1 + y_2 x_2 + \cdots + y_n x_n$$

其中, $\mathbf{X}$ 和 $\mathbf{Y}$ 均为 $n \times 1$ 维向量, 那么

$$\frac{\partial a}{\partial \mathbf{X}} = [y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_n] \quad (2.9)$$

一个向量对另一个向量求导结果为一个矩阵:

$$\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{A} \quad (2.10)$$

其中, 矩阵 $\mathbf{A}$ 的元素为

$$a_{ij} = \frac{\partial y_i}{\partial x_j}$$

第二节 地球模型

对于惯性导航系统来说, 一般可以将地球简化为一个扁平的椭球体, 地球重力模型也类似地进行简化。本节将介绍两个重要的地球建模要素:

- (1) 椭球几何体;
- (2) 椭球体重力场。

地球椭球几何体和地球椭球体重力场模型有很多, 对不同的用途, 这些模型参数的具体取值有所不同。世界各国采用的参考椭球不下十余种, 但大部分都是仅在局部地区测量大地水准面的基础上确定的, 仅在局部地区适用。目前世界上广泛采用的地球模型是世界大地坐标系 (World Geodetic System, WGS-84)。

一、椭球几何体

(一) 地球形状

地球表面的形状起伏、高低不平, 有高山、盆地、海洋等, 它的真实形状很不规则, 并

不是一个理想的椭球体。由于地球绕其极轴转动，所以赤道各处的地球半径比极轴方向的半径要长，因而地球可以近似看作一个“旋转椭球体”，但又不能用旋转流体的平衡模型来想象它，因为地球不是匀质物体。这种不规则的真实球体无法用数学模型来表达，因此，在导航中通常不用它来描述地球的形状。

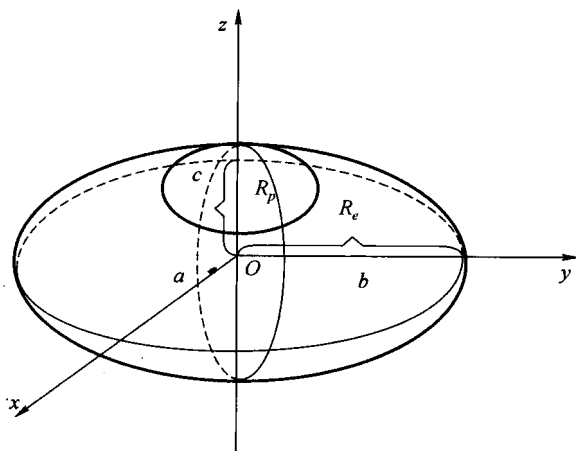


图 2.1 参考椭球体

不过，地球的曲面可以用数学模型来描述。那么该如何描述呢？海洋中各处的海平面与该处的重力矢量相垂直，若采用海平面作为基准，把它延伸到全部陆地形成一个表面，称之为“大地水准面”，而这个面所包围的几何体是一个椭球体，这就是所谓的“大地水准体”，其长、短轴由大地测量确定。大地水准面体现了地球各处重力矢量的分布情况，且因地球各处经纬度的测量与重力测量有关，所以用大地水准体表示地球形状是比较合理的。这样的地球椭球表面常被称为“参考椭球体”，如图 2.1 所示。

地球近似为旋转椭球体，其赤道平面是圆，其半径为 R_e ，地球极轴半径为 R_p ，赤道半径 R_e 比极轴半径 R_p 长。取坐标系 $Oxyz$ ，原点在地球的球心， Ox 轴及 Oy 轴在赤道平面内， Oz 轴与地球自转轴重合。

(二) 垂线

地球表面的垂线有如下 4 种，如图 2.2 所示：

(1) 地心垂线——参考椭球体上 P_0 点到地球中心 O 的连线 P_0O 称为地心垂线，即地心垂线定义为地球表面某一点和地心的连线。

(2) 引力垂线——参考椭球体上 P_0 点沿该点地球引力方向的连线称为引力垂线，即引力垂线定义为沿地球引力方向的直线。

(3) 地理垂线——参考椭球体上 P_0 点的法线 P_0A 称为地理垂线，也叫测地垂线，即地理垂线定义为地球表面某一点法线方向的直线。

(4) 天文垂线——参考椭球体上 P_0 点沿该点地球重力方向的连线 P_0B 称为天文垂线，也叫重力垂线，即天文垂线定义为沿地球重力 g 方向的直线。

这 4 种垂线的方向是各不相同的，通常比较关心的是地理垂线和天文垂线，它们之间的偏差一般不超过半个角分，因此在飞行导航时可以忽略，并把地理垂线和天文垂线看成是重合的。

(三) 纬度

地球纬度的定义有如下 4 种（分别对应于以上的 4

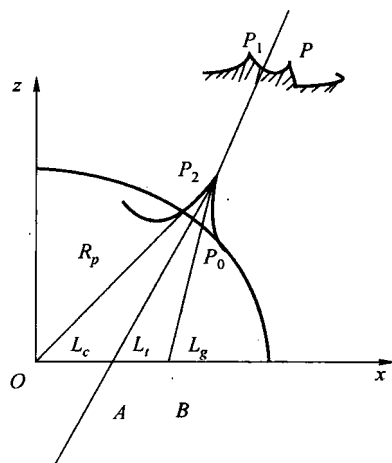


图 2.2 地球的各种垂线与纬度