二十一世纪高等院校教材

二阶椭圆型偏微分方程引论

贾云锋 编著

$$\begin{cases} -d_1\Delta u=u(g_1(u)-h_1(v)), & x\in\Omega \\ -d_2\Delta v=v(g_2(v)-h_2(u)), & x\in\Omega \end{cases}$$

化学工业出版社

二阶椭圆型偏微分方程引论

ISBN 978-7-122-04343-6

定价：16.00元

二十一世纪高等院校教材

二阶椭圆型偏微分方程引论

贾云锋 编著

$$\begin{cases} -d_1\Delta u=u(g_1(u)-h_1(v)),\ x\in\Omega \\ -d_2\Delta v=v(g_2(v)-h_2(u)),\ x\in\Omega \end{cases}$$

化学工业出版社
·北京·

本书运用几类具体的半线性椭圆型方程系统地介绍了反应扩散方程中的重要问题。主要内容包括：带有扩散的两物质自催化反应模型，带有非单调反应函数的两种群食饵-捕食模型，带有扩散的三种群周期互惠模型，带有扩散的三种群周期竞争模型以及这些模型解的存在性、不存在性、稳定性、分歧、先验估计和解的渐近行为等。

本书可供理工科大学数学、应用数学和其它相关专业的大学生、研究生、教师以及有关的科学工作者参考。

图书在版编目（CIP）数据

二阶椭圆形偏微分方程引论 / 贾云锋编著.—北京：化学工业出版社，2008.12

ISBN 978-7-122-04343-6

Ⅰ. 二… Ⅱ.贾… Ⅲ.二阶－椭圆形方程：偏微分方程 Ⅳ.O175.23

中国版本图书馆CIP数据核字（2008）第195938号

责任编辑：宋　辉　　　　装帧设计：张好灵

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街13号　邮政编码100011）

印　　装：化学工业出版社印刷厂

787mm×1092mm　1/16　印张6½　字数120千字　2008年3月北京第1版第1次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899

网　　址：http://www.cip.com.cn

凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：16.00 元

前　　言

反应扩散系统理论体系源于人们用反应扩散方程（组）研究种群动力系统中相互作用的物种间的相互关系，随着这一领域研究的不断深入，反应扩散方程不仅被广泛用于研究具有扩散现象的种群动力系统中，而且在物理学、化学、医学、动植物保护和生态环境的综合治理与开发等研究领域也体现出一定的积极作用。

在本书第一章中，首先介绍了全书要用到的反应扩散系统研究领域的一些基本理论及经典结果，内容主要包括二阶椭圆型和抛物型偏微分方程的极值原理、上下解方法、特征值问题、不动点指数理论、分歧理论以及稳定性理论等，这些理论及结果是以后各章内容能够得以进行讨论和研究的基础；第二章介绍了一类带有齐次Neumann边界条件的两物质自催化反应模型；第三章介绍了一类带有非单调反应函数和齐次Dirichlet边界条件的两种群食饵-捕食模型；第四章介绍了一类具有时间周期性的、带有齐次Dirichlet边界条件的三种群互惠模型；第五章介绍了一类具有时间周期性的、带有齐次Neumann边界条件的三种群竞争模型共存态的渐近性，主要目的是介绍系统共存态的一种渐近行为，即一个物种灭绝，而另两个物种生存。

本书可供理工科大学数学、应用数学和其它相关专业的大学生、研究生、教师以及有关的科学工作者参考。

由于时间有限，书中难免有不足之处，敬请读者不吝赐教。

贾云锋

目　录

第一章 基本理论

本章介绍反应扩散方程理论体系的一些基本原理和基本结论,它们是本书研究能够得以进行的理论基础.这些内容涉及二阶椭圆型和抛物型偏微分方程的极值原理和上下解方法、特征值问题、特征值的变分原理、拓扑度理论、不动点指数理论、分歧理论以及稳定性理论等.

第一节 二阶偏微分方程的极值原理和上下解方法

本节叙述二阶椭圆型和抛物型偏微分方程的极值原理和上下解方法.

令

$$Lu=-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x)u,\qquad x\in\Omega,$$

$$Bu=a\frac{\partial u}{\partial \nu}+b(x)u,\qquad x\in\partial\Omega,$$

其中$\Omega\subset R^n$为有界开区域,边界$\partial\Omega$是$C^{2,\alpha}$的,$a_{ij},b_i,c\in C^{\alpha}(\overline{\Omega}),\alpha\in[0,1]$. $-L$是$\overline{\Omega}$上的一致椭圆算子,$a,b(x)$满足:(1) $a=0,b(x)=1$;或(2) $a=1,b(x)\geqslant 0,b(x)\in C(\partial\Omega)$. ν是$\partial\Omega$的外法向量.

引理1.1.1[1,2] (椭圆型方程强极值原理)设在Ω内,$c(x)\leq,\not\equiv 0$且有界. 再设$u(x)\in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$且在$\Omega$内满足$Lu\geqslant(\leqslant)0$.那么,除非$u$在$\Omega$中恒为常数, 否则$u$在$\Omega$内部不能取到非负最大值(非正最小值).

引理1.1.2[1] (椭圆型方程导数形式的强极值原理)设在Ω内,$c(x)\leqslant,\not\equiv 0$且有界. $u(x)\in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$且在$\Omega$内满足$Lu\geqslant(\leqslant)0$.再设$0\geqslant m=\min_{x\in\overline{\Omega}}u(x)=u(x_0),x_0\in\partial\Omega(0\leqslant M=\max_{x\in\overline{\Omega}}u(x)=u(x_0),x_0\in\partial\Omega)$,且$\partial\Omega$有内切球性质.那么,当$u$不恒为常数时

$$\frac{\partial u}{\partial\nu}<(>)0.$$

对某个$T>0$,记

$$Q_T=\Omega\times(0,T],\quad S_T=\partial\Omega\times(0,T],$$

$$Q_\infty=\Omega\times(0,\infty),\quad S_\infty=\partial\Omega\times(0,\infty).$$

再令

$$L_tu=-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x,t)u,\qquad (x,t)\in Q_T,$$

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial u}{\partial t} + L_t u, \qquad (x,t) \in Q_T,$$

$$B_t u = a\frac{\partial u}{\partial \nu} + b(x,t)u, \qquad (x,t) \in S_T,$$

其中$a_{ij}(x,t), b_i(x,t) \in C^{\alpha}(\overline{Q}_T), \alpha \in [0,1]$, $-\mathcal{L}$是Q_T上的抛物算子,$a, b(x,t)$满足: (1) $a=0$, $a=0$, $b(x;t)=1$;或(2) $a=1, b(x,t) \geqslant 0, b(x,t) \in C(S_T)$.

引理1.1.3[1] (抛物型方程强极值原理)设在Q_T内,$c(x,t) \leqslant, \not\equiv 0$且有界.再设$u(x,t) \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(Q_T)$且在$Q_T$内满足$\mathcal{L}u \geqslant (\leqslant) 0$.那么,除非$u$在$Q_T$中恒为常数,否则$u$在$Q_T$内部不能取到非负最大值(非正最小值).

引理1.1.4[1] (抛物型方程导数形式的强极值原理)设在Q_T内,$c(x,t) \leqslant, \not\equiv 0$且有界.$u(x,t) \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C(\overline{Q}_T)$且在$Q_T$内满足$\mathcal{L}u \geqslant (\leqslant) 0$.再设

$$0 \geqslant m = \min_{(x,t)\in\overline{Q}_T} u(x,t) = u(x_0,t_0), (x_0,t_0) \in S_T,$$

$$(0 \leqslant M = \max_{(x,t)\in\overline{Q}_T} u(x,t) = u(x_0,t_0), (x_0,t_0) \in S_T),$$

且$\partial\Omega$有内切球性质.那么,当u不恒为常数时

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} < (>) 0.$$

对上面定义的算子L, B,考虑边值问题

$$Lu = f(x,u), \qquad x \in \Omega,$$

$$Bu = g(x), \qquad x \in \partial\Omega,$$

其中$g(x) \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$可延拓到$\Omega$内部成为$\widehat{g}(x)$,使得$\widehat{g}(x) \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$且$\widehat{g}(x) = g(x), x \in \partial\Omega$.

引理1.1.5[1] (椭圆型方程边值问题的上下解方法)设$\overline{u}$, $\underline{u}$分别是上面边值问题的上、下解,且$\forall x \in \Omega, \overline{u} \geqslant \underline{u}$,$m = \min_{x\in\overline{\Omega}} \underline{u}(x) < M = \max_{x\in\overline{\Omega}} \overline{u}(x)$.若存在常数$K > 0$,使得$\forall (x,u),(y,v) \in \overline{\Omega} \times [m,M]$有

$$|f(x,u) - f(y,v)| \leqslant K(|x-y|^{\alpha} + |u-v|),$$

则该边值问题存在解$u(x) \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$满足

$$\underline{u}(x) \leqslant u(x) \leqslant \overline{u}(x).$$

第二节 特征值问题和特征值的变分原理

本节叙述二阶线性自伴椭圆型算子的特征值问题和特征值的变分原理.

考虑特征值问题

$$\begin{cases} -\triangle\varphi + q(x)\varphi = \lambda\varphi, & x\in\Omega, \\ \varphi|_{\partial\Omega} = 0, & x\in\partial\Omega. \end{cases} \tag{1.2.1}$$

引理1.2.1[1,3] 若$q(x)\in C(\Omega)$,则问题(1.2.1)的所有特征值$\lambda_i(q(x)), i=1,2,\cdots$,满足

$$\lambda_1(q(x)) < \lambda_2(q(x)) \leqslant \lambda_3(q(x)) \leqslant \cdots \leqslant\to +\infty,$$

其中主特征值$\lambda_1(q(x))$是单的,相应的特征函数为$\varphi_1(x),\varphi_2(x),\varphi_3(x),\cdots,x\in\Omega$,其中$\varphi_1(x)>0$,且比较原理成立:若$q_1(x)\geqslant q_2(x), x\in\Omega$,则$\lambda_j(q_1(x))\geqslant\lambda_j(q_2(x)), j=1,2,\cdots$,且当$q_1(x)\not\equiv q_2(x)$时,$\lambda_j(q_1(x))>\lambda_j(q_2(x))$.由变分原理[4]还有

$$\lambda_1(q(x)) = \inf_{x\in\Omega}\left\{\frac{\int_\Omega|\nabla\varphi|^2dx + \int_\Omega q(x)\varphi^2dx}{\int_\Omega\varphi^2dx}\right\}.$$

考虑特征值问题

$$\begin{cases} -\triangle\varphi - \lambda q(x)\varphi = 0, & x\in\Omega, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} + r(x)\varphi = 0, & x\in\partial\Omega. \end{cases} \tag{1.2.2}$$

引理1.2.2[5] 若$q(x)\in C(\Omega), q(x)\geqslant 0$,则问题(1.2.1)的所有特征值$\lambda_i(q(x)), i=1,2,\cdots$,满足

$$\lambda_1(q(x)) < \lambda_2(q(x)) \leqslant \lambda_3(q(x)) \leqslant \cdots \leqslant\to +\infty,$$

其中主特征值$\lambda_1(q(x))$是单的,相应的特征函数为$\varphi_1(x),\varphi_2(x),\varphi_3(x),\cdots,x\in\Omega$,其中$\varphi_1(x)>0$,且比较原理成立:若$q_1(x)\geqslant q_2(x), x\in\Omega$,则$\lambda_j(q_1(x))\leqslant\lambda_j(q_2(x)), j=1,2,\cdots$,且当$q_1(x)\not\equiv q_2(x)$时,$\lambda_j(q_1(x))<\lambda_j(q_2(x))$.由变分原理[4]还有

$$\lambda_1(q(x)) = \inf_{x\in\Omega}\left\{\frac{\int_\Omega|\nabla\varphi|^2dx + \int_{\partial\Omega} r(x)\varphi^2ds}{\int_\Omega q(x)\varphi^2dx}\right\}.$$

第三节 Banach空间上的拓扑度理论和不动点指数理论

本节叙述Banach空间上紧连续映射的拓扑度理论和不动点指数理论.

设E为实的Banach空间,$W\subset E$是一闭凸子集.若$\forall\alpha\geqslant 0, \alpha W\subset W$,则称$W$是$E$中的一个楔.如果$W\cap\{-W\}=\{0\}$,则称$W$是$E$中的一个锥.设$y\in W$,令

$$W_y = \{x\in E: y+\nu x\in W,\ \ \nu>0\},$$

$$S_y = \{x \in \overline{W}_y : -x \in \overline{W}_y\}.$$

则$\overline{W}_y$是E中的一个楔,S_y是E的闭子集,且$\overline{W}_y, S_y$均是凸的.设T是定义在E上的紧线性算子,且T在$\overline{W}$上是不变的.如果存在$t \in (0,1), w \in \overline{W}_y \backslash S_Y$,使得$w - tTw \in S_y$,那么称$T$在$\overline{W}_y$ 上具有α性质.设W是E中的一个楔,$A : W \to W$为紧线性算子且y_0是A在W上的不动点,记L 为A在y_0处的Fréchet导数,即$L = A'(y_0)$.

引理1.3.1[6,7]　如果算子$I - L$在E上是可逆的,那么

(i) 若L在$\overline{W}_{y_0}$上具有α性质,则$\text{index}_W(A, y_0) = 0$;

(ii) 若L在$\overline{W}_{y_0}$不具有α性质,则$\text{index}_W(A, y_0) = \text{index}_{S_{y_0}}(A, y_0) = \text{index}_E(L, 0) = \pm 1$.

如果$I - L$在E上不可逆,但在$\overline{W}_{y_0} \backslash \{0\}$上可逆,那么

(iii) 若$I - L : \overline{W}_{y_0} \to \overline{W}_{y_0}$不满,则$\text{index}_W(A, y_0) = 0$;

(iv) 若L在$\overline{W}_{y_0}$上不具有α性质,则$\text{index}_W(A, y_0) = \pm 1$.

引理1.3.2[2]　设Ω是E中的有界开集,x_0是全连续映射$F : \overline{\Omega} \to E$在$\Omega$内的不动点.若1不是$A := F'(x_0)$的特征值,则$x_0$是$F$的孤立不动点,且

$$\deg(I - F, \Omega, 0) = \text{index}(I - F, x_0) = \text{index}(I - A, 0) = (-1)^{\sigma},$$

其中σ为全连续算子A的所有大于1的特征值的代数重数之和.

第四节　Banach空间上的分歧理论和稳定性理论

本节叙述Banach空间上的分歧理论和稳定性理论.以下设X, Y为Banach空间.

引理1.4.1[8,9]　设U是$R \times X$中的开集, $f \in C^2(U, Y)$. 对$\forall \lambda \in R$,方程$f(\lambda, u) = 0$满足$f(\lambda, 0) = 0$.记$L_0 = D_u f(\lambda_0, 0), L_1 = D_\lambda D_u f(\lambda_0, 0)$.其中$D_u, D_\lambda$均表示Fréchet导数.若以下条件成立

(i) $\dim N(L_0) = 1$,且对某个$u_0 \in X, N(L_0) = \text{span}\{u_0\}$;

(ii) $\text{codim} R(L_0) = \dim(Y \backslash R(L_0)) = 1$;

(iii) $L_1 u_0 \notin R(L_0)$.

则存在$\delta > 0$及光滑曲线$(\lambda, \varphi) : (-\delta, \delta) \to R \times Z$使得$\forall |s| < \delta, f(\lambda(s), s(u_0 + \varphi(s))) = 0$,且$\lambda(0) = \lambda_0, \varphi(0) = 0$,其中$Z$满足$X = \text{span}\{u_0\} \oplus Z$. 而且,存在$(\lambda_0, 0)$的邻域,使得$f$的零点或者在这条曲线上,或者为$(\lambda, 0)$.

设μ为复数,算子$L_0, K \in B(X, Y)$.如果

(i) $\dim N(L_0 - \mu K) = \text{codim} R(L_0 - \mu K) = 1$;

(ii) $N(L_0 - \mu K) = \text{span}\{u_0\}$;

(iii) $K u_0 \notin R(L_0 - \mu K)$,

那么称μ为L_0的$K-$单特征值(这样,在上面的引理中,0实际上可看成是L_0的L_1-单特

征值).特别地,在$X = Y, K = I$且μ 是L_0的孤立谱点时,μ是L_0的$I-$单特征值当且仅当μ是L_0的单重特征值.

引理1.4.2[8]　若μ为L_0相应于特征函数u_0的$K-$单特征值,则存在$\rho > 0$,使得当$\|L - L_0\| < \rho$时,L有唯一的相应于特征函数$w(L) = u_0 + z(L)$的$K-$单特征值$\eta(L)$.其中,$z(L) \in Z, \mathrm{span}\{u_0\} \oplus Z = X$.而且, $\eta(L_0) = \mu_0, w(L_0) = u_0$,映射$L \to (\eta(L), w(L))$是光滑的.

引理1.4.3[8]　设引理1.4.1的假设成立.如果包含映射$i: X \to Y$连续,且0是L_0的相应于特征函数u_0的$I-$单特征值,那么存在定义在λ_0和0的邻域内的函数

$$\lambda \to (\gamma(\lambda), v(\lambda)) \subset R \times X, \quad s \to (\eta(s), w(s)) \subset R \times X$$

使得

$$(\gamma(\lambda_0), v(\lambda_0)) = (0, u_0) = (\eta(0), w(0)),$$

$$v(\lambda) - u_0 \in Z, \quad w(s) - u_0 \in Z.$$

且在λ_0和0的邻域内分别有

$$D_u f(\lambda, 0) v(\lambda) = \gamma(\lambda) v(\lambda), \quad D_u f(\lambda(s), u(s)) w(s) = \eta(s) w(s).$$

引理1.4.4[8,10]　设引理1.4.1的假设成立.则对上面定义的函数$\gamma(\lambda)$和$\eta(s)$有$\gamma'(\lambda_0) \neq 0$.同时,如果在0的充分小的邻域内$\eta(s) \neq 0$,那么

$$\lim_{s \to 0} \frac{s\lambda'(s)\gamma'(\lambda_0)}{\eta(s)} = -1.$$

这样,由该引理知,分歧解的稳定性取决于$\eta(s)$的符号.当$\eta(s) < 0$时分歧解是稳定的,当$\eta(s) > 0$时分歧解是不稳定的.

设$T: R \times X \to X$是紧连续可微算子,对某个$b \in R$满足$T(b, 0) = 0$,且$\forall u \in X$,$T(b, u)$可表示为

$$T(b, u) = K(b)u + R(b, u),$$

其中$K(b)$是定义在X上的线性紧算子,且Fréchet导数R_u满足$R_u(b, 0) = 0$. 如果x_0是T的孤立不动点,那么我们可以通过拓扑度来定义T在x_0点的指数index $T(x_0, 0)$为

$$\mathrm{index}\, T(x_0, 0) = \deg(I - T, B, x_0),$$

其中B是以x_0为心的球,且x_0是T在B内的唯一不动点.如果算子$I - T'(x_0)$可逆,那么x_0是T的孤立不动点,且[10,11]

$$\mathrm{index}\, T(x_0, 0) = \deg(I - T, B, x_0) = \deg(I - T'(x_0), B, 0).$$

现在以b作为分歧参数考虑方程$u = T(b,u)$的分歧解,我们有以下的全局分歧定理.

引理1.4.5[11,12] 设对某个$b_0 \in R$,存在$\varepsilon > 0$,使得当$0 < |b - b_0| < \varepsilon$时算子$I - K(b)$可逆. 如果指数$\operatorname{index} T((b,\cdot),0)$在$(b_0-\varepsilon, b_0)$和$(b_0, b_0+\varepsilon)$上均是常数,但当$b_0 - \varepsilon < b_1 < b_0 < b_2 < b_0 + \varepsilon$时$\operatorname{index} T((b_1,\cdot),0) \neq \operatorname{index} T((b_2,\cdot),0)$,那么方程$u = T(b,u)$在$b-u$平面内存在一条连续解曲线$C$,且下面两条之一成立:

(i) C从点$(b_0,0)$延伸到某点$(\hat{b}_0,0)$,其中$\hat{b} \neq b_0$,这时算子$I - K(\hat{b})$不可逆;

(ii) C在$R \times X$内由点$(b_0,0)$延伸到无穷远点.

第二章 带有扩散的两物质自催化反应模型

第一节 引 言

本章研究一类带有齐次Neumann边界条件的两物质自催化反应模型

$$\begin{cases} u_t - d_1\Delta u = a - uv^2, & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ v_t - d_2\Delta v = uv^2 - v, & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \\ u = u_0 \geqslant, \not\equiv 0, v = v_0 \geqslant, \not\equiv 0, & x \in \Omega, \quad t = 0, \end{cases} \tag{2.1.1}$$

其中$\Omega \subset R^n$为一具有光滑边界$\partial\Omega$的有界区域, a为正常数. 变量u, v分别表示两种物质的浓度, d_1, d_2分别表示u, v的扩散率. $\frac{\partial}{\partial \nu}$表示边界$\partial\Omega$上的外法向导数.

类似于系统(2.1.1)的椭圆系统已受到一些学者的关注(参见文献[13~18]).本章我们讨论相应于系统(2.1.1)的椭圆系统

$$d_1\Delta u - uv^2 + a = 0, \quad x \in \Omega, \tag{2.1.2}$$

$$d_2\Delta v + uv^2 - v = 0, \quad x \in \Omega, \tag{2.1.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \partial\Omega, \tag{2.1.4}$$

的正古典解.

在下面的讨论中, 系统(2.1.2)~(2.1.4)的正解的有界性显得比较重要. 对该系统正解的有界性,我们将不给出详细证明,只是运用文献[19,20]中所获得的一些结果来阐明系统(2.1.2)~(2.1.4)的正解的有界性(证明方法完全类似于文献[19,20]中关于模型正解有界性的证明方法,这里将不给出).

在文献[19,20]中,作者考虑了所谓的Sel'kov反应扩散系统

$$\begin{cases} u_t - \theta\Delta u = \lambda(1 - uv^p), & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ v_t - \Delta v = \lambda(uv^p - v), & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \\ u = u_0 \geqslant, \not\equiv 0, v = v_0 \geqslant, \not\equiv 0, & x \in \Omega, \quad t = 0, \end{cases} \tag{2.1.5}$$

其中$\Omega, u, v, \frac{\partial u}{\partial \nu}$同系统(2.1.1), θ, λ和p为正常数.利用函数的正交分解、Sobolev嵌入定理[21,22]、Poincaré不等式[23]、Harnack不等式[24]以及Hölder不等式[21],通过复杂而有详细地推导,作者给出了系统(2.1.5)平衡态系统正解的有界性.

在系统(2.1.5)中,如果取$p = 2$并且记$d_1 = \frac{\theta}{\lambda}, d_2 = \frac{1}{\lambda}$,则系统(2.1.1)和(2.1.5)几乎是一样的. 二者的区别就在于系统(2.1.5)中的常数1换成了系统(2.1.1)中的常数a.

如果将系统(2.1.5)中的常数1换成a,我们会发现文献[19,20]中证明(2.1.5)平衡态系统的正解的有界性的方法仍然有效.因此依照文献[19,20]所给出的关于系统(2.1.5)的正解的有界性结论,对于系统(2.1.2)~(2.1.4)的正解的有界性,我们很容易给出以下估计:

设d_{12}, P,和d_2'为正常数且满足:如果$n = 3, P < \frac{5}{2}$.则存在依赖于d_{12}, P, d_2', a, n和Ω的正常数C_1,C_2使得:如果$\frac{d_1}{d_2} \geqslant d_{12}, P \geqslant 2, \frac{1}{d_2} \leqslant d_2'$, 则系统(2.1.2)~(2.1.4)的正解$(u, v)$满足

$$C_1 \leqslant \min_{x \in \overline{\Omega}} \{u(x), v(x)\} \leqslant \max_{x \in \overline{\Omega}} \{u(x), v(x)\} \leqslant C_2.$$

这样,在本章后面的内容中,如果涉及到系统(2.1.2)~(2.1.4)的正解的有界性,我们自然认为正解是有界的.同时,鉴于文献[19,20]的工作, 在本章中,我们总假定Ω的维数$n \leqslant 3$.

本章的内容安排如下:在第二节中,我们主要运用积分的方法以及几个著名的不等式讨论了系统(2.1.2)~(2.1.4)的正解的系列性质;在第三节,利用正解的有界性,说明了当扩散率比较大时系统(2.1.2)~(2.1.4)没有正解;在第四节,我们讨论了系统常数正解$(u, v) = (\frac{1}{a}, a)$的稳定性;在第五节,分别以$a$和扩散率$d_1, d_2$作为分歧参数,分析了系统(2.1.2)~(2.1.4)发自常数平衡解$(\frac{1}{a}, a)$的处的分歧解,给出了系统存在分歧解的条件,并讨论了分歧解的稳定性;在第六节,运用不动点指数理论以及泛函分析的相关知识,我们讨论了系统非常数正解的存在性;最后一节,就Ω是一维的情形,我们对系统(2.1.2)~(2.1.4)的共存态作了全局分析,指出在一维的情形,(2.1.2)~(2.1.4)发自常数平衡解$(\frac{1}{a}, a)$的处的分歧解一定延伸到无穷远.

第二节　正解的基本性质

本节运用积分方法和几个著名的不等式讨论系统(2.1.1)非平凡稳定态解的基本性质,也就是系统(2.1.2)~(2.1.4)正解的基本性质. 为方便起见,对函数$f \in L^1(\Omega)$,我们用$\overline{f}$表示f在Ω上的平均值,即$\overline{f} = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f(x)dx$.

命题2.2.1　设(u, v)是系统(2.1.2)~(2.1.4)的正解,则

(i) $\overline{v} = a$;

(ii) 要么$uv = 1$,要么$uv - 1$在Ω上改变符号.

证明　令$w(x) = d_2 v(x) + d_1 u(x)$. 则$w$满足$\Delta w = d_2 \Delta v + d_1 \Delta u, x \in \Omega, \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0, x \in \partial\Omega$.

(2.1.3)加(2.1.4)得

$$\Delta w = v - a. \tag{2.2.1}$$

将(2.2.1)在Ω上积分可得

$$\int_\Omega (v - a)dx = \int_\Omega \Delta w dx = 0.$$

这样,$\int_\Omega vdx = a|\Omega|$, (i)成立.

令$z(x) = d_2v(x) - d_1u(x)$.则z满足$\Delta z = d_2\Delta v - d_1\Delta u, x \in \Omega, \frac{\partial z}{\partial \nu} = 0, x \in \partial\Omega$.

(2.1.4)减(2.1.3)可得

$$\Delta z = v + a - 2uv^2. \tag{2.2.2}$$

将(2.2.2)在Ω上积分可得

$$\int_\Omega (v + a - 2uv^2)dx = \int_\Omega \Delta z dx = 0.$$

进而,我们有

$$\int_\Omega (uv - 1)vdx = 0.$$

由于v是正的,因此(ii)成立.证毕.

现在令$\xi = \overline{u} - u, \eta = \overline{v} - v$.则$\int_\Omega \xi dx = \overline{u}\int_\Omega dx - \int_\Omega udx = 0, \int_\Omega \eta dx = \overline{v}\int_\Omega dx - \int_\Omega vdx = 0$.这样,对(2.1.2)~(2.1.4)的正解$(u,v)$,如果$(u,v)$是常数正解,则$\xi \equiv \eta \equiv 0$.反之,$\xi$和$\eta$在$\Omega$上一定改变符号.

命题2.2.2 设(u,v)是系统(2.1.2)~(2.1.4)的非常数正解,则

$$\int_\Omega \xi\eta dx < 0, \quad \int_\Omega \nabla\xi\nabla\eta dx < 0.$$

证明 由(2.2.1)我们有

$$-\Delta w = a - v = \eta. \tag{2.2.3}$$

(2.2.3)的两端同乘以$w = d_2v + d_1u$然后在Ω上积分可得

$$\int_\Omega |\nabla w|^2 dx = \int_\Omega \eta w dx = d_2\int_\Omega \eta v dx + d_1\int_\Omega \eta u dx$$

$$\begin{aligned}
&= d_2\left(\overline{v}\int_\Omega \eta dx - \int_\Omega \eta^2 dx\right) + d_1\left(\overline{u}\int_\Omega \eta dx - \int_\Omega \xi\eta dx\right) \\
&= -d_2\int_\Omega \eta^2 dx - d_1\int_\Omega \xi\eta dx.
\end{aligned}$$

这表明

$$\int_\Omega \xi\eta dx = -\frac{1}{d_1}\left(\int_\Omega |\nabla w|^2 dx + d_2\int_\Omega \eta^2 dx\right) < 0. \tag{2.2.4}$$

(2.2.3)的两端同乘以η然后在Ω上积分可得

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \eta^2 dx &= -\int_\Omega \eta\Delta w dx = \int_\Omega \nabla\eta\nabla w dx \\
&= \int_\Omega \nabla\eta(d_2\nabla v + d_1\nabla u)dx \\
&= -d_2\int_\Omega |\nabla\eta|^2 dx - d_1\int_\Omega \nabla\xi\nabla\eta dx.
\end{aligned}$$

这意味着

$$\int_\Omega \nabla\xi\nabla\eta dx = -\frac{1}{d_1}\left(d_2\int_\Omega |\nabla\eta|^2 dx + \int_\Omega \eta^2 dx\right) < 0. \tag{2.2.5}$$

证毕.

在本章后面的内容中,我们用$\mu_1 > 0$表示算子$-\Delta$在齐次Neumann边界条件下的第二特征值.

命题2.2.3 设(u,v)是系统(2.1.2)~(2.1.4)的非常数正解,则

$$-\int_\Omega \xi\eta dx - d_1d_2\int_\Omega \nabla\xi\nabla\eta dx \leqslant \frac{1+d_1\mu_1}{\mu_1}\int_\Omega |\nabla\xi|^2 dx + d_2\int_\Omega |\nabla\eta|^2 dx.$$

证明 (2.2.1)的两端同乘以$\xi+\eta$然后在Ω上积分,则左端为

$$\begin{aligned}\int_\Omega (\xi+\eta)\Delta w dx &= -\int_\Omega (d_1\nabla u + d_2\nabla v)(\nabla\xi+\nabla\eta)dx\\ &= \int_\Omega (d_1\nabla\xi + d_2\nabla\eta)(\nabla\xi+\nabla\eta)dx\\ &= d_1\int_\Omega |\nabla\xi|^2 dx + d_1d_2\int_\Omega \nabla\xi\nabla\eta dx + d_2\int_\Omega |\nabla\eta|^2 dx.\end{aligned}$$

右端为

$$\begin{aligned}\int_\Omega (v-a)(\xi+\eta)dx &= \int_\Omega u(\xi+\eta)dx - a\int_\Omega (\xi+\eta)dx\\ &= \int_\Omega (\overline{u}-\xi)(\xi+\eta)dx\\ &= -\int_\Omega \xi^2 dx - \int_\Omega \xi\eta dx.\end{aligned}$$

这样由Poincaré不等式[23]我们有

$$\begin{aligned}-\int_\Omega \xi\eta dx - d_1d_2\int_\Omega \nabla\xi\nabla\eta dx &= \int_\Omega \xi^2 dx + d_1\int_\Omega |\nabla\xi|^2 dx + d_2\int_\Omega |\nabla\eta|^2 dx\\ &\leqslant \frac{1+d_1\mu_1}{\mu_1}\int_\Omega |\nabla\xi|^2 dx + d_2\int_\Omega |\nabla\eta|^2 dx.\end{aligned}$$

证毕.

命题2.2.4 设(u,v)是系统(2.1.2)~(2.1.4)的非常数正解,则存在常数

$$C_3 := C_3(\mu_1, C_2), C_4 := C_4(\mu_1, C_2)$$

使得

$$\int_\Omega |\nabla\eta|^2 dx + \int_\Omega \eta^2 dx \leqslant \frac{C_3}{d_2^2}, \quad \int_\Omega |\nabla\xi|^2 dx + \int_\Omega \xi^2 dx \leqslant \frac{C_4}{d_1^2}.$$

证明 我们只需证明第一个不等式,第二个不等式可类似证明.

由于$C_1 < \min\{u(x), v(x)\} \leqslant \max\{u(x), v(x)\} < C_2$,易见

$$|uv^2 - v| = |uv-1|v < |C_2^2 - 1|C_2 := C.$$

(2.1.4)的两端同乘以η然后在Ω上积分,则有

$$\int_\Omega (v-uv^2)\eta dx = d_2\int_\Omega \eta\Delta v dx = -d_2\int_\Omega \eta\Delta\eta dx = d_2\int_\Omega |\nabla\eta|^2 dx.$$

利用Hölder不等式[21]可得

$$\int_\Omega (v-uv^2)\eta dx \leqslant C\int_\Omega |\eta| dx \leqslant C|\Omega|^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |\eta|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.2.6}$$

对(2.2.6),结合Poincaré不等式[23]$\int_\Omega \eta^2 dx \leqslant \frac{1}{\mu_1}\int_\Omega |\nabla\eta|^2 dx$,我们有

$$d_2\int_\Omega |\nabla\eta|^2 dx \leqslant C|\Omega|^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |\eta|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant C\frac{|\Omega|^{\frac{1}{2}}}{\mu_1^{\frac{1}{2}}}\left(\int_\Omega |\nabla\eta|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

进而,由上面讨论有$\int_\Omega |\nabla\eta|^2 dx \leqslant \frac{C^2|\Omega|}{d_2^2\mu_1}$和$\int_\Omega \eta^2 dx \leqslant \frac{C^2|\Omega|}{d_2^2\mu_1^2}$. 因此

$$\int_\Omega |\nabla\eta|^2 dx + \int_\Omega \eta^2 dx \leqslant \left(\frac{1}{\mu_1}+1\right)\int_\Omega |\nabla\eta|^2 dx \leqslant \frac{C_3}{d_2^2},$$

其中$C_3 = \frac{(\mu_1+1)C^2|\Omega|}{\mu_1^2}$. 证毕.

命题2.2.5　设(u, v)是系统(2.1.2)~(2.1.4)的非常数正解,则

$$\frac{3}{4}\frac{d_1^2\mu_1^2}{d_2^2\mu_1^2 + d_2\mu_1 + 1} \leqslant \frac{\int_\Omega |\nabla v|^2 dx}{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx} < \frac{d_1^2}{d_2^2}.$$

证明　令$w(x) = d_2 v(x) + d_1 u(x)$.则$w$满足$\nabla w = d_2\nabla v + d_1\nabla u, x \in \Omega, \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0$, $x \in \partial\Omega$.由(2.2.5)有

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla w|^2 dx &= d_2^2\int_\Omega |\nabla v|^2 dx + 2d_1d_2\int_\Omega \nabla u\nabla v dx + d_1^2\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\\ &= d_2^2\int_\Omega |\nabla\eta|^2 dx + 2d_1d_2\int_\Omega \nabla\xi\nabla\eta dx + d_1^2\int_\Omega |\nabla\xi|^2 dx\\ &= d_2^2\int_\Omega |\nabla\eta|^2 dx - 2d_2\left(\int_\Omega \eta^2 dx + d_2\int_\Omega |\nabla\eta|^2 dx\right) + d_1^2\int_\Omega |\nabla\xi|^2 dx\\ &= d_1^2\int_\Omega |\nabla\xi|^2 dx - d_2^2\int_\Omega |\nabla\eta|^2 dx - 2d_2\int_\Omega \eta^2 dx.\end{aligned} \tag{2.2.7}$$

这样,我们有

$$\begin{aligned}d_2^2\int_\Omega |\nabla\eta|^2 dx &< d_2^2\int_\Omega |\nabla\eta|^2 dx + 2d_2\int_\Omega \eta^2 dx\\ &= d_1^2\int_\Omega |\nabla\xi|^2 dx - \int_\Omega |\nabla w|^2 dx\\ &< d_1^2\int_\Omega |\nabla\xi|^2 dx.\end{aligned}$$