SHUXUE

■ 蔡小雄 著

更高更妙的

高中数学思想与方法

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

SHUXUE

高中数学竞赛系列丛书

- ◎ 更高更妙的高中数学思想与方法
- ◎ 全国高中数学联赛预测卷
- ◎ 高中数学竞赛真题评析
- ◎ 全国高中数学联赛冲刺
- ◎ 备战全国高中数学联赛

ISBN 978-7-308-06993-9

9 787308 069939 >

定价：28.00元

更高更妙的
高中数学思想与方法

蔡小雄　著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

更高更妙的高中数学思想与方法 / 蔡小雄著．—杭州：浙江大学出版社，2009．8
ISBN 978-7-308-06993-9

Ⅰ．更…　Ⅱ．蔡…　Ⅲ．数学课—高中—教学参考资料
Ⅳ．G634．603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 150980 号

更高更妙的高中数学思想与方法

蔡小雄　著

责任编辑	董德耀　沈国明
封面设计	刘依群
出版发行	浙江大学出版社
	(杭州天目山路 148 号　邮政编码 310028)
	(网址：http：//www.zjupress.com)
排　　版	杭州求是图文制作有限公司
印　　刷	杭州杭新印务有限公司
开　　本	787mm×960mm　1/16
印　　张	19
字　　数	360 千字
版 印 次	2009 年 9 月第 1 版　2009 年 9 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-308-06993-9
定　　价	28.00 元

浙江大学出版社发行部邮购电话　(0571)88925591

前　言

在学生群体中，大多数学生的学习水平比较接近，但也有些“与众不同”、“出类拔萃”的学生(以下将这些学生统称为资优生)，这是一本送给资优生的书.

现代教育最重要的特征就是高扬人的主体性，追求个人的全面发展，以期取得最大的效益和最高的发展.笔者在杭州二中有幸连续多年担任重点班的数学教师与班主任，这批学生大多是浙江省各个地区应届初中生中的佼佼者，他们有浓厚的学习兴趣、超常的学习能力、顽强的学习毅力、勇于创新的精神，与一般学生相比，在学习基础、学习能力上存在得天独厚的优势.面对这一特殊的群体，现有的教材肯定无法满足其强烈的求知欲，传统的教法也已不利于其主动探究，不能适应其超常发展.如同《伯乐相马》故事里所描述的千里马，千里马的习性与众不同，它跑得快，但食量大，如果按照普通马的食量喂养，它可能连普通马的能力都发挥不出来.但如果给予特殊的照顾，它能够日行千里.

对于资优生，书本上的基础知识基本上是过关的，教师更应该注重培养学生的思维，特别是培养学生思维的深刻性和独创性，要求学生能深入思考问题，善于概括归类，善于抓住事物的本质和规律，不唯上、不唯书，善于独立思考，勇于标新求异.因此，笔者结合多年的教学实践精心编写了这本书，为了资优生，为了让更多的资优生掌握一些“更高更妙”的数学思想与方法.

数学教育不仅是知识的传授，能力的培养，而且是一种文化的熏陶，素质的培养.因此，在本书的创意过程中，笔者力求形成的“亮点”有：

1.高屋建瓴——重视数学思想的渗透

在数学学习中，单纯靠题海战术盲目操练是很难获得理想成绩的，我们必须将自己置身于解题的更高境界.高中数学学习的更高境界主要是指运用数学思想武装自已，并有效地指导解题.数学《考试大纲》中指出：“数学思想和方法是数学知识在更高层次的抽象和概括，它蕴涵在数学知识的发生、发展和应用的过程中.”如果说数学知识是数学内容，可用文字和符号来记录和描述，那么数学思想则是数学意识，只能领会、运用，属于思维的范畴，用以对数学问题的认识、处理和解决.

2.独辟蹊径——将数学竞赛知识与高考数学有机结合起来

高考数学命题遵循考试大纲和教学大纲，体现“基础知识全面考，主干内容重点考，热

点知识反复考，冷点知识有时考”的命题原则. 从解答策略上来说，高考一般淡化解题中的特殊技巧，比较注重在解题的通性通法上精心设计. 但是认真分析近几年的高考试题，尤其是压轴题，我们不难发现，有很多问题又很难用“通性通法”顺利解决. 因此，在平时学习中，对于学有余力的同学来说，有必要适当掌握一些“竞赛”的方法或技巧，只有这样，才能真正在高考中做到处变不惊，游刃有余.

3. 一网打尽——收集整理参考了近五年所有的高考原题

对近五年来高考试卷及全国各重点中学最后一次模拟考试中出现的压轴题进行了系统整理，精选其中最典型的问题，从背景、方法与拓展等方面进行认真分析. 另外，书中也收集了笔者参加浙江省会考命题，浙江省数学竞赛夏令营命题，杭州市统测命题时编写的习题资料.

4. 来源实践——所有材料均经过优秀学生认真检验

本书大多数内容是在原浙江省理科创新实验班课堂实践的基础上发展与完善的. 值得一提的是，笔者曾将书中内容给杭州二中 2006 届重点班学生作为高考复习专题资料，取得较好成效，当年该班高考数学平均分为 143 分，全班有 50％的同学考取清华、北大，其中卢毅同学为浙江省高考理科第一名. 因此，对于高三以及高一、高二的优秀学生，这本书可以直接作为复习的教材使用.

衷心祝愿这本书能让同学们“如虎添翼”，在今后的数学考试中，过关斩将，所向披靡！

蔡小雄

2009 年 1 月 18 日

于杭州二中

目 录

第一章　更高更妙的数学解题策略

深化能力立意，突出能力与素质的考查始终是高考数学命题的导向与主题. 数学《考试大纲》明确要求："在考试中创设比较新颖的问题情境，构造有一定深度和广度的数学问题，要注意问题的多样化，体现思维的发散性. 精心设计考查数学主体内容，体现数学素质的试题，反映数、形运动变化的题目；研究型、探索型或开放型的试题". 综观近几年高考的数学试卷，我们也可以发现这样一个共同的特征，那就是每份试卷在保证一定量的基础题的同时，也加大了能力题的考查. 笔者认为，这也将成为今后命题的一大趋势，因为如此设计的优势在于可以让大部分学生获得基础分数，保证全省高考平均分达到一定的标准，又可满足部分优秀学生"英雄有用武之地". 冲击高分，脱颖而出. 因此，要冲击一流大学，必须搞定能力题.

关于能力题似乎没有一个标准的定义，一般认为一份试卷中最后两题就是能力题，有时也称把关题、综合题. 从高考试卷分布来看，能力题一般占全卷总分值的五分之一.

能力题往往具有知识容量大、能力要求高等特点，它能够综合考查数学知识、数学思想与数学方法. 对考生灵活运用所学知识解决实际问题的能力以及创新能力的要求较高. 因此，解高考能力题没有一种"放之四海而皆准"的统一方法. 但即使这样，我们还是可以从把握热点、重视情感、夯实基础、消除思维定式与适当延伸拓展等方面对其进行研究与突破，从而掌握解决策略，增强应试信心.

1.1　夯实基础知识，争取"拾级而上"

夯实基础知识，掌握基本方法是解决能力题的前提. 但夯实基础并不意味着搞题海战术. 有人认为数学教学最简单的方法是把大量的复习资料抛给学生，让学生在解题中自我领悟，教师只需评判结果，对对答案. 笔者认为这是一种不负责任的教法，实践也证明了这是一种收效甚微的低水平的教学，是应该摒弃的.

2003 年的高考数学被认为是十几年来综合题最多、最难的. 然而，笔者的一位叫袁媛

的女学生却考了满分(当年全省仅有三位同学获得高考数学满分).她在高三复习时并没有做大量的课外习题,而是非常认真地拿起教材,逐字逐句地阅读,一道一道地解决书本上的题目.这种学习方法值得我们深思与借鉴.因为很多时候,我们是“只在此山中,云深不知处”.

另外,复习中我们发现很多同学数学成绩徘徊不前的一个重要原因就是“急功近利”,不能沉下心来认真研读教材,从教材中明了数学概念,领会数学思想,掌握数学方法.

事实上,即使是高考试题中的能力题也不是空中楼阁,命题者往往会“心太软”,特意设计一些“梯子”,只要熟练掌握教材内容,熟悉常用方法,解答时就可“拾级而上”,甚至渐入佳境,直捣黄龙.

2008 年浙江省的高考数学试卷被认为是浙江省独立命题以来最难的.然而作为“最难”试卷的最后一题真的像传说中的那么“恐怖”吗?看了原题及以下解析,同学大都会觉得,其实也不过如此.

【例 1】 (2008 年高考浙江理科最后一题)已知数列$\{a_n\}$,$a_n\geqslant 0$,$a_1=0$,$a_{n+1}^2+a_{n+1}-1=a_n^2(n\in\mathbf{N}^+)$.记:$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$,$T_n=\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)}+\cdots+\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$.

求证:当 $n\in\mathbf{N}^+$ 时,

(1)$a_n<a_{n+1}$;

(2)$S_n>n-2$;

(3)$T_n<3$.

讲解 第(1)小题要证明 $a_n<a_{n+1}$,实质上是比较两数大小,教材中关于比较两数大小的思路最典型的是:作差比较与作商比较,对于本题两种方法都可顺利实现.

证法一(作差比较):由于 $a_n\geqslant 0$,因此,只要证明 $a_n^2<a_{n+1}^2$,即 $a_{n+1}^2-a_n^2>0$,而由已知条件知

$a_{n+1}^2-a_n^2=1-a_{n+1}$,所以只要证明 $a_{n+1}<1$.

注意到 $a_{n+1}^2+a_{n+1}-1=a_n^2\Leftrightarrow a_{n+1}^2+a_{n+1}-2=a_n^2-1$

$\Leftrightarrow(a_{n+1}+2)(a_{n+1}-1)=(a_n-1)(a_n+1)$,因此,$a_{n+1}-1$ 与 a_n-1 同号,

也与 $a_1-1=-1$ 同号,因此,$a_{n+1}<1$ 得证.

证法二(作商比较):因为 $a_n\geqslant 0$,所以要证明 $a_n<a_{n+1}$,只要证$\frac{a_n}{a_{n+1}}<1$,

注意到 $a_{n+1}^2+a_{n+1}^2-1=a_n\Leftrightarrow\frac{a_n^2}{a_{n+1}^2}=1+\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_{n+1}^2}=1+\frac{1}{a_{n+1}}\left(1-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$,

因此,也只要证明 $a_{n+1}<1$,由证法一可知成立.

如果以上两种方法都想不到，运用“数学归纳法”也可大功告成.

证法三(数学归纳法)：用数学归纳法证明.

①当 $n=1$ 时，因为 a_2 是方程 $x^2+x-1=0$ 的正根，所以 $a_1<a_2$.

②假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^+)$ 时，$a_k<a_{k+1}$，因为

$a_{k+1}^2-a_k^2=(a_{k+2}^2+a_{k+2}-1)-(a_{k+1}^2+a_{k+1}-1)=(a_{k+2}-a_{k+1})(a_{k+2}+a_{k+1}+1)$，

所以 $a_{k+1}<a_{k+2}$. 即当 $n=k+1$ 时，$a_n<a_{n+1}$ 也成立.

根据①和②，可知 $a_n<a_{n+1}$ 对任何 $n\in\mathbf{N}^+$ 都成立.

有了第(1)小题作为基础，第(2)小题只要反复运用已知的递推关系式就可.

(2)**证法一**：欲证 $S_n>n-2$，只需证 $(a_1-1)+(a_2-1)+\cdots+(a_n-1)>-2$，

而由已知条件知 $a_{n+1}-1=a_n^2-a_{n+1}^2$，

所以由 $(a_1-1)+(a_2-1)+\cdots+(a_n-1)=-1+a_1^2-a_2^2+a_2^2-a_3^2+\cdots+a_{n-1}^2-a_n^2$

由(1)知 $a_n<1$，$\therefore -a_n^2>-1$，所以 $S_n>n-2$ 得证.

证法二：由 $a_{k+1}^2+a_{k+1}-1=a_k$，$k=1,2,\cdots,n-1(n\geqslant 2)$，

得 $a_n^2+(a_2+a_3+\cdots+a_n)-(n-1)=a_1^2$.

因为 $a_1=0$，所以 $S_n=n-1-a_n^2$. 由以上(1)中证法一可知 $a_n<1$，$S_n>n-2$.

当然，有了(1)，$a_n<1$ 也可用以下方法证得：

因为 $a_n<a_{n+1}$ 及 $a_{n+1}=1+a_n^2-2a_{n+1}^2<1$，因此，$a_n<1$.

(3)标准答案中提供的方法看起来简捷，实际上难以想到，原解答如下：

由 $a_{k+1}^2+a_{k+1}=1+a_k^2\geqslant 2a_k$，得 $\dfrac{1}{1+a_{k+1}}\leqslant\dfrac{a_{k+1}}{2a_k}(k=2,3,\cdots,n-1,n\geqslant 3)$，

所以 $\dfrac{1}{(1+a_3)(1+a_4)\cdots(1+a_n)}\leqslant\dfrac{a_n}{2^{n-2}a_2}(n\geqslant 3)$，

于是 $\dfrac{1}{(1+a_2)(1+a_3)\cdots(1+a_n)}\leqslant\dfrac{a_n}{2^{n-2}(a_2^2+a_2)}=\dfrac{a_n}{2^{n-2}}<\dfrac{1}{2^{n-2}}(n\geqslant 3)$，

故当 $n\geqslant 3$ 时，$T_n<1+1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-2}}<3$，又因为 $T_1<T_2<T_3$，所以 $T_n<3$.

事实上，根本无需如此“兴师动众”.

要证明 $T_n<3$，肯定要对

$$T_n=\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)}+\cdots+\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$$

求和化简放缩或放缩求和化简. 中学教材中，对于数列求和，最主要的策略就是转化，化归为等差或等比数列来处理. 而从已知式的结构特征来看，转化为等比是首选，因此，不妨将通项 $\dfrac{1}{(1+a_2)(1+a_3)\cdots(1+a_n)}$ 进行放缩. 由 $a_n<a_{n+1}$ 及 $a_n\geqslant 0$，

显然有$\dfrac{1}{(1+a_2)(1+a_3)\cdots(1+a_n)}\leqslant\dfrac{1}{(1+a_2)^{n-1}}$，

因此，$T_n\leqslant\dfrac{1}{1+a_1}+\dfrac{1}{1+a_2}+\dfrac{1}{(1+a_2)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(1+a_2)^{n-1}}=\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{1+a_2}\right)^n}{1-\dfrac{1}{1+a_2}}<\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+a_2}}$，

只要证明$\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+a_2}}<3$，化简，知只要证明 $a_2>\dfrac{1}{2}$，不难从已知条件解得 $a_2=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}>\dfrac{1}{2}$. 至此，原问题圆满解决.

让我们再看湖北省 2007 年的能力题.

【例 2】 （2007 年湖北省高考理科最后一题）已知 m,n 为正整数，

(1)用数学归纳法证明：当 $x>-1$ 时，$(1+x)^m\geqslant1+mx$；

(2)对于 $n\geqslant6$，已知$\left(1-\dfrac{1}{n+3}\right)^n<\dfrac{1}{2}$，求证：$\left(1-\dfrac{m}{n+3}\right)^n<\left(\dfrac{1}{2}\right)^m$，$m=1,2,\cdots,n$；

(3)求出满足等式 $3^n+4^n+\cdots+(n+2)^n=(n+3)^n$ 的所有正整数 n.

讲解 本题的第(1)小题所要证明的不等式实际上是贝努利(Bernoulli)不等式的一个变式. Bernoulli 不等式的一般形式为："设 $x>-1$，则当 $0<\alpha<1$ 时，$(1+x)^\alpha\leqslant1+\alpha x$，而当 $\alpha<0$ 或 $\alpha>1$ 时，$(1+x)^\alpha\geqslant1+\alpha x$，当且仅当 $x=0$ 时取等号."用数学归纳法证明该题难度不大，此处证明略.

第(2)小题根据题设提供的不等式$\left(1-\dfrac{1}{n+3}\right)^n<\dfrac{1}{2}$，可得$\left[\left(1-\dfrac{1}{n+3}\right)^n\right]^m<\left(\dfrac{1}{2}\right)^m$，因此，只要证明$\left(1-\dfrac{m}{n+3}\right)^n<\left[\left(1-\dfrac{1}{n+3}\right)^n\right]^m=\left[\left(1-\dfrac{1}{n+3}\right)^m\right]^n$，

而由(1)得 $0<1-\dfrac{m}{n+3}\leqslant\left(1-\dfrac{1}{n+3}\right)^m$，因此，上式成立，从而原不等式得证.

第(3)题可直接利用(2)的结论，当 $n\geqslant6$ 时，

$$\left(1-\frac{1}{n+3}\right)^n+\left(1-\frac{2}{n+3}\right)^n+\cdots+\left(1-\frac{n}{n+3}\right)^n<\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n$$
$$=1-\frac{1}{2^n}<1,$$

因此，有$\left(\dfrac{n+2}{n+3}\right)^n+\left(\dfrac{n+1}{n+3}\right)^n+\cdots+\left(\dfrac{3}{n+3}\right)^n<1$. 即

$3^n+4^n+\cdots+(n+2)^n<(n+3)^n$.

故当 $n\geqslant6$ 时，不存在满足该等式的正整数 n. 只需要逐一验证 $n=1,2,3,4,5$ 的情形

即可. 不难得到所求的 n 只有 2,3.

"喝牛奶能品出青草的芳香",学数学做数学题也是一样,只有真正将基础知识了然于胸,遇到难题时,你才会抓住根本,迎刃而上.

1.2　防止思维定式,实现"移花接木"

思维定式是指思维在形式上常常采用的、比较固定的甚或是相对凝固的一种思维逻辑、思维推理、思维内容. 它是人脑习惯使用的一系列已被固化的概念、规则、理论和逻辑的抽象形式. 而数学解题的思维定式主要是指解题者在解决数学问题的思维过程中表现出来的思维的定向预备状态. 它使人们以比较固定的方式去进行认知或作出反应,并影响着问题解决时的趋向性. 对于高考中的很多能力题,有时受思维定式的影响,解题思路一不小心就会走进"死胡同". 如下题:

【例 1】　(2008 年高考全国 II 文科试题)设 $a\in\mathbf{R}$,函数 $f(x)=ax^3-3x^2$.

(1)若 $x=2$ 是函数 $y=f(x)$ 的极值点,求 a 的值;

(2)若函数 $g(x)=f(x)+f'(x)$,$x\in[0,2]$,在 $x=0$ 处取得最大值,求 a 的取值范围.

讲解　(1)根据极值的概念,先求导得:$f'(x)=3ax^2-6x=3x(ax-2)$. 因为 $x=2$ 是函数 $y=f(x)$ 的极值点,所以 $f'(2)=0$,即 $6(2a-2)=0$,因此 $a=1$. 经验证,当 $a=1$ 时,$x=2$ 是函数 $y=f(x)$ 的极值点.

(2)受思维定式的影响,很多同学会先求 $g(x)=f(x)+f'(x)$,$x\in[0,2]$ 的极值,再讨论端点值与极值的大小. 如此解答将十分复杂. 如果能够充分运用最大值的概念,先由 $g(0)\geqslant g(2)$ 解出 $a\leqslant\frac{6}{5}$,再逆向验证,则会快捷得多. 具体解答如下:注意到 $g(x)=ax^3-3x^2+3ax^2-6x=ax^2(x+3)-3x(x+2)$. 当 $g(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上的最大值为 $g(0)$ 时,$g(0)\geqslant g(2)$,即 $0\geqslant 20a-24$. 解得 $a\leqslant\frac{6}{5}$. 反之,当 $a\leqslant\frac{6}{5}$ 时,对任意 $x\in[0,2]$,$g(x)\leqslant\frac{6}{5}x^2(x+3)-3x(x+2)=\frac{3x}{5}(2x^2+x-10)=\frac{3x}{5}(2x+5)(x-2)\leqslant 0$,而 $g(0)=0$,故 $g(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上的最大值为 $g(0)$. 因此 a 的取值范围为 $\left(-\infty,\frac{6}{5}\right]$.

【例 2】　(2007 年高考福建理科最后一题)已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-kx$,$x\in\mathbf{R}$,

(1)若 $k=\mathrm{e}$,试确定函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2)若 $k>0$,且对于任意 $x\in\mathbf{R}$,$f(|x|)>0$ 恒成立,试确定实数 k 的取值范围;

(3)设函数 $F(x)=f(x)+f(-x)$，求证：

$$F(1)F(2)\cdots F(n)>(e^{n+1}+2)^{\frac{n}{2}}(n\in\mathbf{N}^{+}).$$

讲解 本题的三个小题之间联系不密切，其中(1)(2)借助导数不难解得. 本处具体解答略；第(3)小题受思维定式的影响，一般会先将 $F(x)$ 具体化，再代入所求证不等式左边，从而将原不等式转化为：

$(\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1})(\mathrm{e}^{2}+\mathrm{e}^{-2})(\mathrm{e}^{3}+\mathrm{e}^{-3})\cdots(\mathrm{e}^{n}+\mathrm{e}^{-n})>(\mathrm{e}^{n+1}+2)^{\frac{n}{2}}(n\in\mathbf{N}^{+})$，注意到不等式左右两边均含有 n，因此很想运用数学归纳法进行证明，为此，从 k 到 $k+1$ 时需要证明 $(\mathrm{e}^{k+1}+\mathrm{e}^{-(k+1)})(\mathrm{e}^{k+1}+2)^{\frac{k}{2}}\geqslant(\mathrm{e}^{k+2}+2)^{\frac{k+1}{2}}$，而该不等式的证明既要用到放缩技巧又要用多元的柯西不等式，而这些都属于竞赛中的高层次要求.

因此，解答时必须另辟蹊径.

注意到 $n+1=(n-1)+2=\cdots=1+n$，因此可借鉴课本中推导等差数列前 n 项和公式时运用的"倒序相加法"，进行"倒序相乘"，并统一放缩. 简解如下：设 $m,n\in\mathbf{N}^{+}$，则

$F(m)F(n)=\mathrm{e}^{m+n}+\mathrm{e}^{-(m+n)}+\mathrm{e}^{m-n}+\mathrm{e}^{-m+n}>\mathrm{e}^{m+n}+\mathrm{e}^{-(m+n)}+2>\mathrm{e}^{m+n}+2$，

因此 $F(1)F(n)>\mathrm{e}^{n+1}+2, F(2)F(n-1)>\mathrm{e}^{n+1}+2,\cdots\cdots,F(n)F(1)>\mathrm{e}^{n+1}+2$. 由此得，$[F(1)F(2)\cdots F(n)]^{2}=[F(1)F(n)][F(2)F(n-1)]\cdots[F(n)F(1)]>(\mathrm{e}^{n+1}+2)^{n}$，

故 $F(1)F(2)\cdots F(n)>(\mathrm{e}^{n+1}+2)^{\frac{n}{2}}, n\in\mathbf{N}^{+}$.

另外，我们经常会遇到有多个变量的问题，这些综合性问题中常常有一个变元处于主要地位，我们称之为主元，由于受思维定式的影响，解决该类问题时，我们往往对"主元"穷追猛打，当然，这在很多情况下是正确的. 但在某些特定条件下，此路往往不畅，这时若能变更主元，转移变元在问题中的地位，就能使问题迎刃而解. 如下题：若不等式 $x^{2}+px>4x+p-3$ 对一切 $0\leqslant p\leqslant 4$ 均成立，试求实数 x 的取值范围.

若视 x 为主元来处理，既繁且易出错，而实行主元的转化，使问题变成关于 p 的一次不等式，则会峰回路转，解答如下：

由于 $x^{2}+px>4x+p-3$，因此 $(x-1)p+x^{2}-4x+3>0$，令 $g(p)=(x-1)p+x^{2}-4x+3$，则要使它对 $0\leqslant p\leqslant 4$ 均有 $g(p)>0$，只要有 $\begin{cases}g(0)>0,\\ g(4)>0,\end{cases}$ 解得 $x>3$ 或 $x<-1$.

思维定式还表现在解答策略上，大多数同学在做能力题时，肯定是从第一小题做到最后一小题，当第一小题解答思路受阻时，就直接将整题放弃. 这是不可取的. 面对难题，我们不仅可以缺步解答，还可以跳步解答，满分拿不到，则争取获得部分分数，况且，第一小题不会做，利用第一小题结论解决后面的问题，只要解答正确照样给分. 因此，根据需要调整题干设问顺序进行解答也是一种值得借鉴的方法.

1.3 灵活运用策略，尝试“借石攻玉”

古人有“运筹帷幄，决胜千里”的说法．的确，在战场上，有妙计良策才可能打胜仗．在解题中，“妙计良策”也能使我们如鱼得水．因此，当我们对数学知识，数学思想方法的学习和运用达到了一定水平时，应该把一般的思维升华到策略的境界．只有掌握了一定的解题策略，才会在遇到问题时，找到问题的思考点和突破口，迅速、正确地解题．在中学阶段比较常用的解决能力题的策略有：归纳猜想，类比迁移，进退互化，整体处理，正难则反等．

1.3.1 归纳猜想

数学解题与数学发现一样，通常都是在运用观察、分析、归纳等探索性方法进行探索的基础上，获得对有关问题的结论或解决方法的猜想，然后再设法证明或否定猜想，进而达到解决问题的目的．高考中很多能力题，尤其是有关数列的能力题大都可以通过观察、归纳从而猜想一般性结论，再用数学归纳法给出证明．

【例 1】 已知函数 $f(x)$ 与函数 $y=\sqrt{a(x-1)}(a>0)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称．

(1)在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n>a_1$．在数列 $\{b_n\}$ 中，$b_1=2$，$S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$．若点 $P_n(a_n,\frac{S_n}{n})(n\in\mathbf{N}^+)$ 在函数 $f(x)$ 的图象上，求 a 的值；

(2)在(1)的条件下，过点 P_n 作倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$ 的直线 l_n，若 l_n 在 y 轴上的截距为 $\frac{1}{3}(b_n+1)$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式．

讲解 (1)函数 $f(x)$ 是 $y=\sqrt{a(x-1)}(a>0)$ 的反函数，则 $f(x)=\frac{x^2}{a}+1(x\geqslant 0)$．

因为点 $P_n(a_n,\frac{S_n}{n})(n\in\mathbf{N}^+)$ 在函数 $f(x)$ 的图象上，则 $\frac{S_n}{n}=\frac{{a_n}^2}{a}+1$． ………(*)

令 $n=1$ 得：$S_1=\frac{a_1^2}{a}+1$，$a_1=1$，$S_1=b_1=2$，则 $a=1$．

(2)由(1)得 $a=1$，(*)式可化为：$\frac{S_n}{n}=a_n^2+1$． ……………………………… ①

直线 l_n 的方程为：$y-\frac{S_n}{n}=x-a_n$，因为 l_n 在 y 轴上的截距为 $\frac{1}{3}(b_n+1)$，

所以 $\frac{S_n}{n}-a_n=\frac{1}{3}(b_n+1)$，结合①式可得：$b_n=3a_n^2-3a_n+2$． …………………… ②