高等工程专科学校教材

上册·高等数学

黄奕佗　张学元

华中理工大学出版社

高 等 数 学

（上 册）

黄奕佗 张学元

内 容 提 要

本书是根据工科专科教学需要编写的．全书分上、下两册出版．上册内容包括极限与连续，导数与微分，中值定理和导数的应用，不定积分，定积分及其应用，微分方程等7章．每章附有习题，书末有答案．

本书可作为高等专科学校"高等数学"的教材或参考书．

高 等 数 学（上册）

黄奕佗　张学元

责任编辑　李立鹏

·

华中理工大学出版社出版发行

（武昌喻家山）

新华书店湖北发行所经销

华中理工大学出版社沔阳印刷厂印刷

·

开本：787×1092　1/32　印张：12.75　字数：272 000

1989年7月第1版　1989年11月第2次印刷

印数：11 001-14 000

ISBN　7-5609-0341-X/O·54

定价：3.95元

前　言

十年来，我国的高等教育事业蓬勃发展，尤其是高等专科教育的发展更为迅速。为了进一步提高教学质量，急需编写、出版适合专科教学要求的教材。教材是师生进行教学活动的重要依据，决定着课程甚至专业的教学水平和教学效果。因此切实搞好教材建设，使专科学校的教材能充分体现专科的培养目标，符合教学大纲与教学计划的要求，是当前专科学校深化教学改革中的一项十分重要而又紧迫的工作。

各高等专科学校为了适应教学需要，根据专科的特点和教学要求，自编了部分教材或讲义，在一定程度上克服了长期使用本科教材因而难以体现专科特点的弊病。为了进一步提高教材编写和出版的质量，在国家教委的支持下，在华中理工大学出版社的积极倡导下，沈阳冶金机械专科学校、郑州机械专科学校、哈尔滨机电专科学校和湖南省轻工业专科学校等14所专科学校，于1987年5月成立了“东北、华中地区高等工程专科学校教材协调委员会”，组织和协调有关工程专科学校的教材编写工作。

经参加“协调委员会”的各校负责同志的协商，决定首先编写一套适用面较广的教材，并由各校组织学术水平较高、教学经验丰富的教师分工合作，进行编写。由于参加编写教材的教师的共同努力，以及华中理工大学出版社的大力支持，现已编写好了一套适用于高等工程专科学校的教材，它们是高等数学、线性代数、概率与数理统计、大专物理、理论力学、材料力学、工程力学、电工与电子技术、金属热加工、工程材料、机械原理、机械设计和机制工艺学。这些教材将由华中理工大学出版社陆续分批出版。

这套教材是在认真分析了十年来使用的国内外高校教材、自编讲义和较系统地总结了多年的教学经验的基础上编写出来的，因此较好地体现了专科特点，符合一般专科教学计划和教学大纲的要求，适合全日制

高等工程专科学校以及夜大、职大、函大的工程专科班使用。

这套教材的特点是，符合专科培养目标，内容的深度、广度适当，突出理论联系实际，注意知识的应用和学生能力的培养，适当介绍与反映了现代科学技术的新成就。这套教材不仅具有专科的特色和富于启发性，而且文字简练，结构严谨，插图清晰，是目前比较理想的专科教材，希望推广使用。

由于编写高等工程专科教材是一项新的工作，很多问题尚在探索之中，加之水平有限，编写时间较短，书中难免存在缺点和错误。殷切希望使用本教材的教师和广大读者批评指正。

东北、华中地区高等工程专科学校

教材协调委员会　主任　于勤兹

于1988年5月

序 言

高等工业专科学校是我国高等教育的一个重要层次，与本科应有明显的差异，因此专科基础课的教材应与本科有较大的不同，但多年来，专科基本上沿用本科的教材。我们认为，在教育改革全面深入发展之今日，亟需有一套能够满足专科要求、体现专科特点的数学教材，本教材就是基于上述想法的尝试。

本教材分《高等数学》上、下册，《线性代数》，《概率论与数理统计》出版。高等数学上册内容包括一元微积分、常微分方程；高等数学下册内容包括空间解析几何、多元微积分和级数；线性代数内容包括行矩阵、线性方程组、二次型、线性空间和线性变换；概率论与数理统计内容包括概率论的基本知识和常用数理统计方法。在编写过程中，集中了各地专科学校所提的宝贵意见，注意了与本科教材的区别，突出了工程专科的特点。本教材在布局、选材、体例和编写形式上尽量适应工程专科的需要，着重理论联系实际，着眼于基础理论和培养学生解决实际问题的能力。

本教材由华中理工大学出版社组织东北、华中地区部分高等工业专科学校的数学教师集体编写而成。《高等数学》（上、下册）由黄奕佗同志任主编，张学元、王庚生同志任副主编，由沈阳冶金专科学校副教授邢文斗同志主审。承担编写任务的有湖南省纺织专科学校余亮云同志，湖南轻工专科学校林捷升、凌叔平同志，郑州机械专科学校王建武同志。长春冶金地质专科学校李增良同志，吉林电气化专科学校徐玉卿同志。

《线性代数》由沈阳冶金专科学校沈思秀同志编写，由吉林电气化专科学校副教授林柯同志主审。《概率论与数理统计》由哈尔滨冶金测量专科学校吕本吉同志和本溪冶金专科学校刘智庆同志编写，由邵阳工业专科学校黄进阳副教授主审。

由于编者水平有限，专科教材改革正处于探索阶段，难免存在缺点甚至错误，激请同仁和读者批评指正，以利今后进一步修改。

编　者　1989.4.

目　录

第二章 导数与微分

第一章　极限与连续

17世纪笛卡儿(Descartes)把变量引入数学，对数学产生了巨大的影响，使数学从研究常量的初等数学进一步发展到研究变量的高等数学。微积分是高等数学的一个重要部分，它是研究变量间的依赖关系即函数关系的一门学科，是学习其它自然科学的基础。

本章首先在中学已有的函数知识的基础上，介绍初等函数和分段函数的概念，然后着重讨论函数的极限与连续性。

§1.1　初等函数、分段函数

1.1.1　初等函数

在同一自然现象或技术过程中，往往同时有几个变量变化着，它们彼此之间不是孤立的，而是相互依赖、相互联系，并按照一定的规律变化着。变量间的这种依赖关系数学上称为函数关系。

定义　设D是一个实数集，如果对于D中的每一个数x，按照某个确定的规律，变量y都有唯一确定的值和它对应，那末变量y就叫做定义在数集D上的x的**函数**，记作

$$y=f(x)$$

并称x为**自变量**，y为**因变量**（或函数），自变量x的变化范围D叫做函数的**定义域**，当x取遍D中的一切实数值时，与之对应的函数值的集合叫做**函数的值域**。通常定义域和值域可用区间来表示。

如果自变量取某一数值x_0时，函数$y=f(x)$有确定的值与之对应，则称函数在点x_0处有定义，且记x_0处的函数值为

$$f(x_0) \quad 或 \quad y|_{x=x_0}.$$

因此，函数的定义域D就是使函数有定义的x值的集合。

由函数的定义可知，定义域D和对应规律是构成函数关系的两个要素，而相应的函数值随着D和规律的给定而确定，因此，两个函数当且仅当它们的定义域和对应规律都相同时，它们才是相等的。变量间的对应规律常用解析式、表格或图象来表示。

在中学数学里，已详细地研究过：

幂函数　$y=x^\mu$（μ为常数）；

指数函数$y=a^x(a>0,a\neq1)$；

对数函数$y=\log_a x(a>0,a\neq1)$；

三角函数$y=\sin x, y=\cos x, y=\mathrm{tg}x, y=\mathrm{ctg}x, y=\sec x, y=\csc x$；

反三角函数　$y=\arcsin x$，　$y=\arccos x$，　$y=\mathrm{arctg}x$，$y=\mathrm{arcctg}x$。

以上五种函数是构成较复杂函数的最基本的单元，称为**基本初等函数**，读者要自行复习，以掌握它们的图形和性质（定义域、值域、奇偶性、单调性及周期性等）。

在实际问题中，有很多比较复杂的函数是由几个比较简单的函数"叠置"而成的，例如，在简谐振动中，位移y与时间t的函数关系$y=A\sin(\omega t+\varphi)$（$A$为振幅，$\varphi$为初相位）就是由三角函数$y=A\sin u$和线性函数$u=\omega t+\varphi$"叠置"而成，这种由几个较简单的函数"叠置"而成的函数叫做复合函数，一般地我们有

定义　设$y=f(u)$是数集B上u的函数，而$u=\varphi(x)$是数集

A上x的函数，那末y通过u的联系也是数集A上x的函数：$y=f[\varphi(x)]$，称此函数为由$y=f(u)$与$u=\varphi(x)$复合而成的复合函数，其中u叫做中间变量。

函数$u=\varphi(x)$的值域不能超出$y=f(u)$的定义域B，因此复合函数$y=f[\varphi(x)]$的定义域D是由$u=\varphi(x)$的定义域A中的那些x点组成的：点x必须使$\varphi(x)$的值落在$f(u)$的定义域B中。

例1 设$f(x)=\ln x$，$\varphi(x)=\sin x$，求复合函数$f[\varphi(x)]$及其定义域。

解 将$f(x)$中的x换成$\varphi(x)=\sin x$，即得

$$f[\varphi(x)]=\ln\sin x.$$

解不等式$\sin x>0$，得$y=\ln\sin x$的定义域

$$\{x|\ 2k\pi<x<(2k+1)\pi,k\in Z\}.$$

它只是$\varphi(x)=\sin x$的定义域$R=\{x|\ -\infty<x<+\infty\}$的一部分。由此例还看出，由几个函数构成一个复合函数，应由里往外逐层复合，反过来，要将一个复合函数分解为几个简单的函数，应从外往里逐层分解。这里的所谓简单函数是指基本初等函数及其四则运算所构成的函数.

例2 将下列函数分解为较简单的函数：

(1) $y=\sin^2\sqrt{1-x^2}$；

(2) $y=\sqrt{2+\frac{1}{3}\mathrm{arctg}(e^{x-1}+5)}$.

解 (1) $y=u^2,u=\sin v,v=w^{\frac{1}{2}},w=1-x^2$.

(2) $y=u^{\frac{1}{2}},u=2+v,v=\frac{1}{3}\mathrm{arctg}w,w=e^x+5,$

$z=x-1$.

这里的复合过程稍复杂一些，中间变量不止一个，u、v、w、z等都是中间变量，复合函数的变量间的关系可形象地用"锁链"关系表示成

$$y—u—v—w—z—x$$

由基本初等函数及常数经过有限次四则运算与有限次复合步骤且用一个式子表示的函数统称为**初等函数**。以上各例都是初等函数。

1.1.2 双曲函数

双曲函数是一类初等函数，它们虽是由指数函数e^x、e^{-x}构成的，但由于在工程技术等应用问题中，经常要用到这些函数，所以单独提出来讨论。

定义 双曲正弦函数

$$\mathrm{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2};\tag{1-1}$$

双曲余弦函数

$$\mathrm{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2};\tag{1-2}$$

它们的图形如图1-1所示。

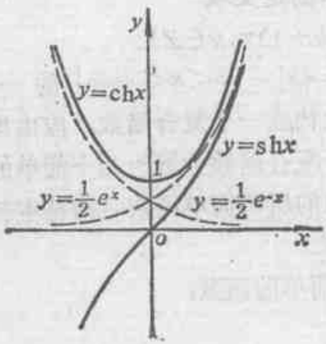

图 1-1

双曲函数间的关系与三角函数类似，由定义可直接验证下列公式成立：

$$\mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}^2x=1,$$
$$\mathrm{ch}2x=\mathrm{ch}^2x+\mathrm{sh}^2x,\mathrm{sh}2x=2\mathrm{sh}x\mathrm{ch}x,$$
$$\mathrm{sh}(x\pm y)=\mathrm{sh}x\mathrm{ch}y\pm\mathrm{ch}x\mathrm{sh}y,$$
$$\mathrm{ch}(x\pm y)=\mathrm{ch}x\mathrm{ch}y\pm\mathrm{sh}x\mathrm{sh}y.$$