北京市高等教育精品教材立项项目

北京大学数学教学系列丛书

本科生
数学基础课教材

随机过程

何书元　编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

北京大学数学教学系列丛书

随机过程

何书元 编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目 (CIP) 数据

随机过程 / 何书元编著. — 北京：北京大学出版社，2008.11
(北京大学数学教学系列丛书)
ISBN 978-7-301-12902-9

I. 随 ··· II. 何 ··· III. 随机过程 – 高等学校 – 教材
IV. O211.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 166895 号

书　　　名： **随机过程**
著作责任者：何书元　编著
责 任 编 辑：刘　勇
标 准 书 号：ISBN 978-7-301-12902-9/O · 0737
出　版　者：北京大学出版社
地　　　址：北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　　址：http://www.pup.cn
电　　　话：邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62752021
出版部 62754962
电 子 信 箱：zpup@pup.pku.edu.cn
印　刷　者：北京大学印刷厂
发　行　者：北京大学出版社
经　销　者：新华书店
890 mm × 1240 mm　A5　10.875 印张　300 千字
2008 年 11 月第 1 版　2008 年 11 月第 1 次印刷
印　　　数：0001—4000 册
定　　　价：20.00 元

序　言

自 1995 年以来，在姜伯驹院士的主持下，北京大学数学科学学院根据国际数学发展的要求和北京大学数学教育的实际，创造性地贯彻教育部“加强基础，淡化专业，因材施教，分流培养”的办学方针，全面发挥我院学科门类齐全和师资力量雄厚的综合优势，在培养模式的转变、教学计划的修订、教学内容与方法的革新，以及教材建设等方面进行了全方位、大力度的改革，取得了显著的成效．2001 年，北京大学数学科学学院的这项改革成果荣获全国教学成果特等奖，在国内外产生很大反响．

在本科教育改革方面，我们按照加强基础、淡化专业的要求，对教学各主要环节进行了调整，使数学科学学院的全体学生在数学分析、高等代数、几何学、计算机等主干基础课程上，接受学时充分、强度足够的严格训练；在对学生分流培养阶段，我们在课程内容上坚决贯彻“少而精”的原则，大力压缩后续课程中多年逐步形成的过窄、过深和过繁的教学内容，为新的培养方向、实践性教学环节，以及为培养学生的创新能力所进行的基础科研训练争取到了必要的学时和空间．这样既使学生打下宽广、坚实的基础，又充分照顾到每个人的不同特长、爱好和发展取向．与上述改革相适应，积极而慎重地进行教学计划的修订，适当压缩常微、复变、偏微、实变、微分几何、抽象代数、泛函分析等后续课程的周学时．并增加了数学模型和计算机的相关课程，使学生有更大的选课余地．

在研究生教育中，在注重专题课程的同时，我们制定了 30 多门研究生普选基础课程 (其中数学系 18 门)，重点拓宽学生的专业基础和加强学生对数学整体发展及最新进展的了解．

教材建设是教学成果的一个重要体现．与修订的教学计划相配合，我们进行了有组织的教材建设．计划自 1999 年起用 8 年的

时间修订、编写和出版40余种教材. 这就是将陆续呈现在大家面前的《北京大学数学教学系列丛书》. 这套丛书凝聚了我们近十年在人才培养方面的思考, 记录了我们教学实践的足迹, 体现了我们教学改革的成果, 反映了我们对新世纪人才培养的理念, 代表了我们新时期的数学教学水平.

经过20世纪的空前发展, 数学的基本理论更加深入和完善, 而计算机技术的发展使得数学的应用更加直接和广泛, 而且活跃于生产第一线, 促进着技术和经济的发展, 所有这些都正在改变着人们对数学的传统认识. 同时也促使数学研究的方式发生巨大变化. 作为整个科学技术基础的数学, 正突破传统的范围而向人类一切知识领域渗透. 作为一种文化, 数学科学已成为推动人类文明进化、知识创新的重要因素, 将更深刻地改变着客观现实的面貌和人们对世界的认识. 数学素质已成为今天培养高层次创新人才的重要基础. 数学的理论和应用的巨大发展必然引起数学教育的深刻变革. 我们现在的改革还是初步的. 教学改革无禁区, 但要十分稳重和积极; 人才培养无止境, 既要遵循基本规律, 更要不断创新. 我们现在推出这套丛书, 目的是向大家学习. 让我们大家携起手来, 为提高中国数学教育水平和建设世界一流数学强国而共同努力.

张继平

2002年5月18日

于北京大学蓝旗营

前　言

概率论通过对简单随机事件的研究，逐步进入复杂随机现象规律的研究，它是研究随机现象规律的有效方法和工具. 作为概率论的后续课程，本书进一步介绍相关随机变量的统计规律和基本理论.

和其他的数学课程类似，多做练习是理解随机过程的基本概念和掌握其理论与方法的基础. 本书每小节后面都配有适量的练习题供读者练手. 每章的后面配有更多的习题供选择使用. 习题的选择注意了对基本训练的要求，但更多考虑的是对应用问题的描述和解决. 习题附有参考答案，供读者参考.

为了书的完整和方便读者阅读，本书在第一章列出了概率统计的基本知识，供读者复习和查阅. 这部分内容供教师选择使用. 本书介绍了随机过程的基本统计推断方法，包括区间估计和假设检验. 这样的章节被打上 * 供选择使用. 如果不考虑统计推断的内容，则只需要初等概率论和高等数学的知识就可以学习本书，否则应当具备数理统计的基础知识或阅读本书的 §1.4，§1.6 和 §1.7.

泊松过程的理论结果已经十分完整，只在数学上证明这些结论会使得有关章节干净利落，但是会增加读者理解定理内涵的难度. 鉴于泊松过程的定理都有明确的实际背景和意义，所以在讲述定理前本书尽量通过举例使得读者能够想到定理的成立.

更新过程的理论已经完善，只是部分定理的数学证明比较复杂. 为了从这些复杂的理论证明中解脱出来，本书略去了一些纯技术性的数学推导，通过描述性的语言帮助读者理解定理的成立.

马氏链的理论体系近乎完善，但是部分定理的证明也存在技术性过强的问题. 鉴于本书的目的和课时的限制，我们只能介绍规则马氏链的理论和方法. 即使这样，少数定理的证明也会遇到比较复杂的情况. 感谢何声武教授的《随机过程引论》一书. 当我们遇到因

课时限制而不能给出完整证明的地方，就请有兴趣的读者去参考他的书了．当然，本书会在更简单一些的情况下给出相应定理的证明．

尽管布朗运动的背景明确，但是首次接触它时常会遇到不易理解的地方．本书只介绍布朗运动的基本概念和性质．通过花粉在液体表面受到水分子的碰撞而运动的轨迹引入布朗运动，引导读者从花粉的运动行为猜想布朗运动轨迹的可能性质．然后再考虑数学的证明．

本书主要介绍泊松过程、更新过程、离散时间马氏链、连续时间马氏链和布朗运动．前第二至第五章和不带 * 的部分是本书的主要内容．每周 4 学时的课程可以讲完上述五个随机过程，但要略去部分带 * 的内容．每周 3 学时的课程很难讲完这五个随机过程，除了略去部分带 * 的内容，从中选择四个随机过程就可以了．可供选择的方法如下：

第二章 $\longrightarrow$ 第三章 $\longrightarrow$ 第四章 $\longrightarrow$ 第五章

第二章 $\longrightarrow$ 第三章 $\longrightarrow$ 第四章 $\longrightarrow$ 第六章

第二章 $\longrightarrow$ 第四章 $\longrightarrow$ 第五章 $\longrightarrow$ 第六章

本书的写作尽量做到符合时代精神．和已有的同类教材比较，本书的理论体系较为完整，定理的证明较为轻松，全部正文尽量避免繁琐的数学推导，通过易懂的实例阐明重要的概念和定理．

为了用数学公式清楚地表达复杂的随机现象，熟练掌握条件概率公式的使用是非常重要的．在阅读本书时，应当注意条件概率的公式及其使用方法．

由于作者水平有限，书中难免不妥之处，请读者不吝指教．

何 书 元

北京海淀蓝旗营

2008 年 2 月

目　录

第一章　概率统计

本书所涉及的数集和函数都是高等数学中描述的数集和函数，不再赘述．本章仅列出概率统计方面的基本知识，以便查阅．

§1.1　事件与概率

通常把按照一定的想法去做的事情称为**试验** (experiment)，把试验的可能结果称为**样本点** (sample point)，称样本点的集合为**样本空间** (sample space)．对于一个特定的试验，以后总用 Ω 表示样本空间，用 ω 表示样本点，这时

$$\Omega=\{\omega \mid \omega \text{ 是试验的样本点}\}. \tag{1.1}$$

在概率论中，事件是样本空间 Ω 的子集．在实际问题中人们往往并不需要关心 Ω 的所有子集，只要把关心的子集称为事件就够了．但事件是 Ω 的子集，必须满足以下三个条件：

(a1) Ω 是事件；

(a2) 若 A 是事件，则 $\overline{A}$ 是事件；

(a3) 若 A_j 是事件，则 $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j$ 是事件．

由上面的条件 (a1), (a2), (a3) 知道，如果 A, B 是事件，则 $A\cup B$, $A\cap B$, $A-B$, $\overline{A}$ 都是事件．于是，事件经过有限次集合运算所得结果还是事件．

对于事件 A，若用 $P(A)$ 表示事件 A 发生的概率，则 $P(A)$ 满足以下条件：

(b1) 非负性：对于任何事件 A, $P(A)\geqslant 0$；

(b2) 完全性：$P(\Omega)=1$；

(b3) 可列可加性：对于互不相容的事件 $A_1, A_2, \cdots$，有

$$P\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j).$$

对于样本空间 Ω 和概率 P, 用 $\mathcal{F}$ 表示全体事件时, 称三位一体的 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为**概率空间** (probability space).

下面是概率 P 的基本性质:

(1) $P(\phi) = 0$.

(2) 有限可加性: 如果 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 互不相容, 则

$$P\Big(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j).$$

(3) 单调性: 如果 $B \subset A$, 则 $P(A) - P(B) = P(A-B) \geqslant 0$.

(4) 加法公式: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

(5) 次可加性: $P\Big(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\Big) \leqslant \sum_{j=1}^{n} P(A_j)$.

(6) 条件概率公式: 当 $P(A) > 0$ 时, 有 $P(B|A) = P(AB)/P(A)$.

(7) 条件概率是概率: 对已知的正概率事件 A, 定义条件概率 $P_A(B) = P(B|A)$, $B \in \mathcal{F}$. 则 P_A 是概率, $(\Omega, \mathcal{F}, P_A)$ 是概率空间. 当 $P(AB) > 0$ 时, 有

$$P_A(C|B) = P(C|AB).$$

(8) 乘法公式:

$$P(B_1B_2\cdots B_n) = P(B_1)P(B_2|B_1)\cdots P(B_n|B_1B_2\cdots B_{n-1}).$$

当 $P(A) > 0$ 时, 将 P 换成 P_A 就得到

$$P(B_1B_2\cdots B_n|A) = P(B_1|A)P(B_2|B_1A)\cdots P(B_n|B_1B_2\cdots B_{n-1}A).$$

(9) 全概率公式: 如果事件 $A_1, A_2, \cdots$ 互不相容, 则当 $B \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ 或者 $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \Omega$ 时, 有

$$P(B) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j)P(B|A_j),$$

$$P(B|A)=\sum_{j=1}^{\infty}P(A_j|A)P(B|AA_j),\quad 当\ P(A)>0. \tag{1.2}$$

(10) 概率的连续性：如果 $A_1\subset A_2\subset\cdots$, $B_1\supset B_2\supset\cdots$, 则有

$$P\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j\Big)=\lim_{n\to\infty}P(A_n),\quad P\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty}B_j\Big)=\lim_{n\to\infty}P(B_n).$$

(11) Borel-Cantelli 引理：若 $\sum\limits_{j=1}^{\infty}P(A_j)<\infty$, 则

$$P(\text{有无穷个 } A_j \text{ 发生})=0.$$

§1.2 随机向量及其分布

随机变量 X 是定义在样本空间 Ω 上的函数，使得对于 $\mathbf{R}=(-\infty,\infty)$ 的子集 A, $\{X\in A\}$ 是事件.

对于随机变量 X, 称 $F(t)=P(X\leqslant t)$ 为 X 的**分布函数**. 分布函数是单调不减的右连续函数. 用 $F(t-)$ 表示 F 在 t 的左极限，有

$$P(X=t)=F(t)-F(t-),\quad t\in(-\infty,\infty).$$

如果 X 表示生物的 (或仪器的使用) 寿命，则 $P(X>x)$ 是该生物 (或仪器) 到 t 时还存活 (或工作) 的概率，因而称 $\overline{F}(t)=P(X>t)$ 为寿命 X 的**生存函数** (survival function). 于是

$$\overline{F}(t)=1-F(t)=P(X>t). \tag{2.1}$$

如果 $F(t)$ 是 X 的分布函数，非负函数 $f(s)$ 使得对所有的 t, 有

$$F(t)=\int_{-\infty}^{t}f(s)\mathrm{d}s,$$

则称 $f(s)$ 为 F 或 X 的**密度函数**, 称 X 是**连续型随机变量**. 这时对于 $(-\infty,\infty)$ 的子集 A, 有

$$P(X\in A)=\int_A f(s)\mathrm{d}s.$$