



北京市高等教育精品教材立项项目

北京大学数学教学系列丛书

本科生
数学基础课教材

随机过程

何书元 编著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

北京大学数学教学系列丛书

随机过程

何书元 编著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目 (CIP) 数据

随机过程 / 何书元编著. — 北京: 北京大学出版社, 2008.11
(北京大学数学教学系列丛书)

ISBN 978-7-301-12902-9

I. 随… II. 何… III. 随机过程 — 高等学校 — 教材
IV. O211.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 166895 号

书 名: 随机过程

著作责任者: 何书元 编著

责任编辑: 刘 勇

标准书号: ISBN 978-7-301-12902-9/O · 0737

出 版 者: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区成府路 205 号 100871

网 址: <http://www.pup.cn>

电 话: 邮购部 62752015 发行部 62750672 编辑部 62752021
出版部 62754962

电子信箱: zpup@pup.pku.edu.cn

印 刷 者: 北京大学印刷厂

发 行 者: 北京大学出版社

经 销 者: 新华书店

890 mm × 1240 mm A5 10.875 印张 300 千字

2008 年 11 月第 1 版 2008 年 11 月第 1 次印刷

印 数: 0001—4000 册

定 价: 20.00 元

序 言

自 1995 年以来,在姜伯驹院士的主持下,北京大学数学科学学院根据国际数学发展的要求和北京大学数学教育的实际,创造性地贯彻教育部“加强基础,淡化专业,因材施教,分流培养”的办学方针,全面发挥我院学科门类齐全和师资力量雄厚的综合优势,在培养模式的转变、教学计划的修订、教学内容与方法的革新,以及教材建设等方面进行了全方位、大力度的改革,取得了显著的成效. 2001 年,北京大学数学科学学院的这项改革成果荣获全国教学成果特等奖,在国内外产生很大反响.

在本科教育改革方面,我们按照加强基础、淡化专业的要求,对教学各主要环节进行了调整,使数学科学学院的全体学生在数学分析、高等代数、几何学、计算机等主干基础课程上,接受学时充分、强度足够的严格训练;在对学生分流培养阶段,我们在课程内容上坚决贯彻“少而精”的原则,大力压缩后续课程中多年逐步形成的过窄、过深和过繁的教学内容,为新的培养方向、实践性教学环节,以及为培养学生的创新能力所进行的基础科研训练争取到了必要的学时和空间. 这样既使学生打下宽广、坚实的基础,又充分照顾到每个人的不同特长、爱好和发展取向. 与上述改革相适应,积极而慎重地进行教学计划的修订,适当压缩常微、复变、偏微、实变、微分几何、抽象代数、泛函分析等后续课程的周学时. 并增加了数学模型和计算机的相关课程,使学生有更大的选课余地.

在研究生教育中,在注重专题课程的同时,我们制定了 30 多门研究生普选基础课程(其中数学系 18 门),重点拓宽学生的专业基础和加强学生对数学整体发展及最新进展的了解.

教材建设是教学成果的一个重要体现. 与修订的教学计划相配合,我们进行了有组织的教材建设. 计划自 1999 年起用 8 年的

时间修订、编写和出版 40 余种教材。这就是将陆续呈现在大家面前的《北京大学数学教学系列丛书》。这套丛书凝聚了我们近十年在人才培养方面的思考,记录了我们教学实践的足迹,体现了我们教学改革的成果,反映了我们对新世纪人才培养的理念,代表了我们新时期的数学教学水平。

经过 20 世纪的空前发展,数学的基本理论更加深入和完善,而计算机技术的发展使得数学的应用更加直接和广泛,而且活跃于生产第一线,促进着技术和经济的发展,所有这些都正在改变着人们对数学的传统认识。同时也促使数学研究的方式发生巨大变化。作为整个科学技术基础的数学,正突破传统的范围而向人类一切知识领域渗透。作为一种文化,数学科学已成为推动人类文明进化、知识创新的重要因素,将更深刻地改变着客观现实的面貌和人们对世界的认识。数学素质已成为今天培养高层次创新人才的重要基础。数学的理论和应用的巨大发展必然引起数学教育的深刻变革。我们现在的改革还是初步的。教学改革无禁区,但要十分稳重和积极;人才培养无止境,既要遵循基本规律,更要不断创新。我们现在推出这套丛书,目的是向大家学习,让我们大家携起手来,为提高中国数学教育水平和建设世界一流数学强国而共同努力。

张继平

2002 年 5 月 18 日

于北京大学蓝旗营

前 言

概率论通过对简单随机事件的研究,逐步进入复杂随机现象规律的研究,它是研究随机现象规律的有效方法和工具.作为概率论的后续课程,本书进一步介绍相关随机变量的统计规律和基本理论.

和其他的数学课程类似,多做练习是理解随机过程的基本概念和掌握其理论与方法的基础.本书每小节后面都配有适量的练习题供读者练手.每章的后面配有更多的习题供选择使用.习题的选择注意了基本训练的要求,但更多考虑的是对应用问题的描述和解决.习题附有参考答案,供读者参考.

为了书的完整和方便读者阅读,本书在第一章列出了概率统计的基本知识,供读者复习和查阅.这部分内容供教师选择使用.本书介绍了随机过程的基本统计推断方法,包括区间估计和假设检验.这样的章节被打上*供选择使用.如果不考虑统计推断的内容,则只需要初等概率论和高等数学的知识就可以学习本书,否则应当具备数理统计的基础知识或阅读本书的 §1.4, §1.6 和 §1.7.

泊松过程的理论结果已经十分完整,只在数学上证明这些结论会使得有关章节干净利落,但是会增加读者理解定理内涵的难度.鉴于泊松过程的定理都有明确的实际背景和意义,所以在讲述定理前本书尽量通过举例使得读者能够想到定理的成立.

更新过程的理论已经完善,只是部分定理的数学证明比较复杂.为了从这些复杂的理论证明中解脱出来,本书略去了一些纯技术性的数学推导,通过描述性的语言帮助读者理解定理的成立.

马氏链的理论体系近乎完善,但是部分定理的证明也存在技术性过强的问题.鉴于本书的目的和课时的限制,我们只能介绍规则马氏链的理论和方法.即使这样,少数定理的证明也会遇到比较复杂的情况.感谢何声武教授的《随机过程引论》一书.当我们遇到因

课时限制而不能给出完整证明的地方,就请有兴趣的读者去参考他的书了.当然,本书会在更简单一些的情况下给出相应定理的证明.

尽管布朗运动的背景明确,但是首次接触它时常会遇到不易理解的地方.本书只介绍布朗运动的基本概念和性质.通过花粉在液体表面受到水分子的碰撞而运动的轨迹引入布朗运动,引导读者从花粉的运动行为猜想布朗运动轨迹的可能性质.然后再考虑数学的证明.

本书主要介绍泊松过程、更新过程、离散时间马氏链、连续时间马氏链和布朗运动.前第二至第五章和不带*的部分是本书的主要内容.每周4学时的课程可以讲完上述五个随机过程,但要略去部分带*的内容.每周3学时的课程很难讲完这五个随机过程,除了略去部分带*的内容,从中选择四个随机过程就可以了.可供选择的方法如下:

第二章 → 第三章 → 第四章 → 第五章

第二章 → 第三章 → 第四章 → 第六章

第二章 → 第四章 → 第五章 → 第六章

本书的写作尽量做到符合时代精神.和已有的同类教材比较,本书的理论体系较为完整,定理的证明较为轻松,全部正文尽量避免繁琐的数学推导,通过易懂的实例阐明重要的概念和定理.

为了用数学公式清楚地表达复杂的随机现象,熟练掌握条件概率公式的使用是非常重要的.在阅读本书时,应当注意条件概率的公式及其使用方法.

由于作者水平有限,书中难免不妥之处,请读者不吝指教.

何书元

北京海淀蓝旗营

2008年2月

目 录

第一章 概率统计	(1)
§1.1 事件与概率	(1)
§1.2 随机向量及其分布	(3)
§1.3 数学期望及其计算	(6)
A. 数学期望	(6)
B. 条件概率和条件数学期望	(8)
C. 数学期望的计算公式	(9)
D. 概率不等式	(11)
§1.4 总体, 样本与次序统计量	(11)
A. 总体与样本	(11)
B. 次序统计量	(12)
§1.5 特征函数和概率极限定理	(13)
A. 特征函数	(13)
B. 概率极限定理	(14)
§1.6 参数估计	(16)
A. 最大似然估计	(16)
B. 抽样分布的上 α 分位数	(16)
§1.7 置信区间和假设检验	(17)
§1.8 随机变量举例	(18)
A. 两点分布	(18)
B. 二项分布	(19)
C. 几何分布	(20)
D. 泊松分布	(20)
E. 指数分布	(20)
F. 正态分布	(22)
习题一	(23)

第二章 泊松过程	(25)
§2.1 计数过程和泊松过程	(25)
A. 随机过程和随机序列	(25)
B. 计数过程	(26)
C. 泊松过程	(27)
练习 2.1	(32)
§2.2 泊松呼叫流	(32)
A. 呼叫流的概率分布	(33)
B. 等待间隔 X_n 的分布	(36)
C. 到达时刻的条件分布	(37)
D. 简单呼叫流	(41)
练习 2.2	(42)
§2.3 年龄和剩余寿命	(43)
练习 2.3	(46)
§2.4 泊松过程的汇合与分流	(46)
A. 泊松过程的汇合	(47)
B. 泊松过程的分流	(49)
C. 复合泊松过程	(53)
练习 2.4	(55)
*§2.5 泊松过程的参数估计	(55)
A. 用 $N(t)$ 估计 λ	(55)
B. 用 S_n 估计 λ	(58)
C. 复合泊松过程的参数估计	(59)
练习 2.5	(59)
*§2.6 非时齐泊松过程	(60)
A. 非时齐泊松过程	(60)
B. 强度函数的估计	(62)
习题二	(66)
第三章 更新过程	(72)
§3.1 更新过程	(72)
A. 极限定理	(73)

B. 更新函数	(75)
C. 更新流	(78)
练习 3.1	(79)
§3.2 更新定理	(80)
A. 停时	(80)
B. 基本更新定理	(83)
C. 布莱克威尔定理	(84)
D. 关键更新定理	(86)
练习 3.2	(88)
§3.3 更新方程和分支过程	(89)
A. 卷积及其性质	(89)
B. 更新方程	(92)
C. 分支过程	(93)
练习 3.3	(96)
§3.4 开关系统	(97)
A. 开关系统	(97)
B. 多个状态的系统	(103)
练习 3.4	(104)
§3.5 年龄和剩余寿命	(105)
A. 年龄 $A(t)$ 的分布	(106)
B. 剩余寿命 $R(t)$ 的分布	(107)
C. t 时服役部件的寿命分布	(108)
D. $S_{N(t)}$ 的分布函数	(109)
练习 3.5	(112)
§3.6 年龄, 剩余寿命和更新间隔的比较	(112)
A. $A(t)$, $R(t)$ 和更新间隔的比较	(113)
B. $X_{N(t)+1}$ 随机大于更新间隔	(114)
C. $E A(t)$, $E R(t)$ 和 $E X_{N(t)+1}$ 的极限	(115)
练习 3.6	(118)
*§3.7 延迟更新过程	(119)
A. 平衡更新过程	(119)

B. 延迟更新过程	(120)
C. 延迟开系统	(125)
*§3.8 有偿更新过程	(126)
习题三	(131)
第四章 离散时间马尔可夫链	(136)
§4.1 马氏链及其转移概率	(136)
练习 4.1	(141)
§4.2 柯尔莫哥洛夫 - 切普曼方程	(141)
A. K-C 方程	(141)
B. 初始分布和 X_n 的分布	(143)
练习 4.2	(145)
§4.3 状态的命名和周期	(145)
A. 常返与非常返状态	(146)
B. 正常返和零常返状态	(149)
C. 周期及其性质	(151)
D. 遍历状态	(153)
练习 4.3	(155)
§4.4 状态空间分类	(156)
A. 状态空间的分解	(156)
B. 简单随机游动的常返性	(158)
C. 质点在常返等价类中的转移	(161)
练习 4.4	(166)
§4.5 不变分布	(167)
练习 4.5	(173)
§4.6 平稳可逆分布	(174)
A. 平稳性	(174)
B. 平稳可逆性	(177)
C. 平稳可逆分布的计算	(179)
练习 4.6	(183)
§4.7 离散时间分支过程	(184)
A. 灭绝概率	(186)

*B. 参数估计	(190)
练习 4.7	(191)
*§4.8 强大数律和中心极限定理	(191)
A. 强马氏性	(191)
B. 强大数律和中心极限定理	(192)
练习 4.8	(195)
*§4.9 马氏链的统计推断	(195)
A. 一步转移概率的估计	(195)
B. $P = P_0$ 的假设检验	(196)
C. 独立性检验	(197)
习题四	(198)
第五章 连续时间马尔可夫链	(204)
§5.1 连续时间马氏链的定义	(204)
练习 5.1	(206)
§5.2 泊松过程是马氏链	(206)
练习 5.2	(209)
§5.3 转移速率矩阵	(209)
练习 5.3	(213)
§5.4 连续时间马氏链的结构	(213)
A. 保守马氏链	(213)
B. 马氏链的结构	(217)
练习 5.4	(220)
§5.5 柯尔莫哥洛夫方程	(220)
A. 向后和向前方程	(221)
B. 解柯尔莫哥洛夫方程	(222)
练习 5.5	(225)
§5.6 生灭过程	(226)
A. 线性生灭过程	(227)
B. 线性纯生过程	(231)
C. 生灭过程	(233)
D. 简单的传染病模型	(234)

练习 5.6	(236)
§5.7 连续时间分支过程	(236)
练习 5.7	(239)
§5.8 马氏链的极限分布	(240)
A. $p_{ij}(t)$ 的极限	(240)
B. 马氏链的 h 骨架和状态分类	(241)
C. 平稳不变分布	(244)
练习 5.8	(250)
§5.9 时间可逆的马氏链	(251)
A. 时间可逆的马氏链	(251)
B. 可逆分布的计算	(253)
习题五	(257)
第六章 布朗运动	(261)
§6.1 布朗运动	(261)
A. 布朗运动	(261)
B. 二维布朗运动	(264)
§6.2 布朗运动的简单性质	(264)
§6.3 首中时和 Arcsin 律	(265)
A. 首中时和最大值的分布	(266)
B. Arcsin 律	(268)
§6.4 布朗桥与经验过程	(270)
*§6.5 布朗运动的轨迹	(273)
A. 轨迹的不可微	(273)
B. 轨迹的无限长	(274)
C. 重对数律	(276)
*§6.6 随机游动与布朗运动	(276)
习题六	(279)
第七章 应用举例	(281)
§7.1 互联网的 PageRank 问题	(281)
A. 半马氏过程	(282)
B. 用转移速率矩阵作 PageRank	(286)

§7.2 简单排队问题	(286)
A. $M/G/1$ 忙期	(287)
B. $M/M/m$ 排队	(289)
§7.3 系统维修问题	(293)
部分习题参考答案和提示	(299)
附录 A 部分定理的证明	(313)
附录 B 常见分布的期望、方差、母函数和特征函数	(320)
附录 C1 标准正态分布表	(321)
附录 C2 标准正态分布的上 α 分位数	(322)
附录 C3 $\chi^2(n)$ 分布的上 α 分位数	(323)
符号说明	(325)
参考书目	(326)
名词索引	(327)

第一章 概率统计

本书所涉及的数集和函数都是高等数学中描述的数集和函数,不再赘述. 本章仅列出概率统计方面的基本知识, 以便查阅.

§1.1 事件与概率

通常把按照一定的想法去做的事情称为**试验** (experiment), 把试验的可能结果称为**样本点** (sample point), 称样本点的集合为**样本空间** (sample space). 对于一个特定的试验, 以后总用 Ω 表示样本空间, 用 ω 表示样本点, 这时

$$\Omega = \{\omega \mid \omega \text{ 是试验的样本点}\}. \quad (1.1)$$

在概率论中, 事件是样本空间 Ω 的子集. 在实际问题中人们往往并不需要关心 Ω 的所有子集, 只要把关心的子集称为事件就够了. 但事件是 Ω 的子集, 必须满足以下三个条件:

(a1) Ω 是事件;

(a2) 若 A 是事件, 则 $\bar{A}$ 是事件;

(a3) 若 A_j 是事件, 则 $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ 是事件.

由上面的条件 (a1), (a2), (a3) 知道, 如果 A, B 是事件, 则 $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $\bar{A}$ 都是事件. 于是, 事件经过有限次集合运算所得结果还是事件.

对于事件 A , 若用 $P(A)$ 表示事件 A 发生的概率, 则 $P(A)$ 满足以下条件:

(b1) 非负性: 对于任何事件 A , $P(A) \geq 0$;

(b2) 完全性: $P(\Omega) = 1$;

(b3) 可列可加性: 对于互不相容的事件 $A_1, A_2, \dots$, 有

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j).$$

对于样本空间 Ω 和概率 P , 用 $\mathcal{F}$ 表示全体事件时, 称三位一体的 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为**概率空间** (probability space).

下面是概率 P 的基本性质:

(1) $P(\phi) = 0$.

(2) 有限可加性: 如果 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 互不相容, 则

$$P\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{j=1}^n P(A_j).$$

(3) 单调性: 如果 $B \subset A$, 则 $P(A) - P(B) = P(A - B) \geq 0$.

(4) 加法公式: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

(5) 次可加性: $P\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) \leq \sum_{j=1}^n P(A_j)$.

(6) 条件概率公式: 当 $P(A) > 0$ 时, 有 $P(B|A) = P(AB)/P(A)$.

(7) 条件概率是概率: 对已知的正概率事件 A , 定义条件概率 $P_A(B) = P(B|A)$, $B \in \mathcal{F}$. 则 P_A 是概率, $(\Omega, \mathcal{F}, P_A)$ 是概率空间. 当 $P(AB) > 0$ 时, 有

$$P_A(C|B) = P(C|AB).$$

(8) 乘法公式:

$$P(B_1 B_2 \cdots B_n) = P(B_1)P(B_2|B_1) \cdots P(B_n|B_1 B_2 \cdots B_{n-1}).$$

当 $P(A) > 0$ 时, 将 P 换成 P_A 就得到

$$P(B_1 B_2 \cdots B_n|A) = P(B_1|A)P(B_2|B_1 A) \cdots P(B_n|B_1 B_2 \cdots B_{n-1} A).$$

(9) 全概率公式: 如果事件 $A_1, A_2, \dots$ 互不相容, 则当 $B \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$

或者 $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \Omega$ 时, 有

$$P(B) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j)P(B|A_j),$$

$$P(B|A) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j|A)P(B|AA_j), \quad \text{当 } P(A) > 0. \quad (1.2)$$

(10) 概率的连续性: 如果 $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$, $B_1 \supset B_2 \supset \cdots$, 则有

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n), \quad P\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n).$$

(11) Borel-Cantelli 引理: 若 $\sum_{j=1}^{\infty} P(A_j) < \infty$, 则

$$P(\text{有无穷个 } A_j \text{ 发生}) = 0.$$

§1.2 随机向量及其分布

随机变量 X 是定义在样本空间 Ω 上的函数, 使得对于 $\mathbf{R} = (-\infty, \infty)$ 的子集 A , $\{X \in A\}$ 是事件.

对于随机变量 X , 称 $F(t) = P(X \leq t)$ 为 X 的**分布函数**. 分布函数是单调不减的右连续函数. 用 $F(t-)$ 表示 F 在 t 的左极限, 有

$$P(X = t) = F(t) - F(t-), \quad t \in (-\infty, \infty).$$

如果 X 表示生物的 (或仪器的使用) 寿命, 则 $P(X > x)$ 是该生物 (或仪器) 到 t 时还存活 (或工作) 的概率, 因而称 $\bar{F}(t) = P(X > t)$ 为寿命 X 的**生存函数** (survival function). 于是

$$\bar{F}(t) = 1 - F(t) = P(X > t). \quad (2.1)$$

如果 $F(t)$ 是 X 的分布函数, 非负函数 $f(s)$ 使得对所有的 t , 有

$$F(t) = \int_{-\infty}^t f(s) ds,$$

则称 $f(s)$ 为 F 或 X 的**密度函数**, 称 X 是**连续型随机变量**. 这时对于 $(-\infty, \infty)$ 的子集 A , 有

$$P(X \in A) = \int_A f(s) ds.$$