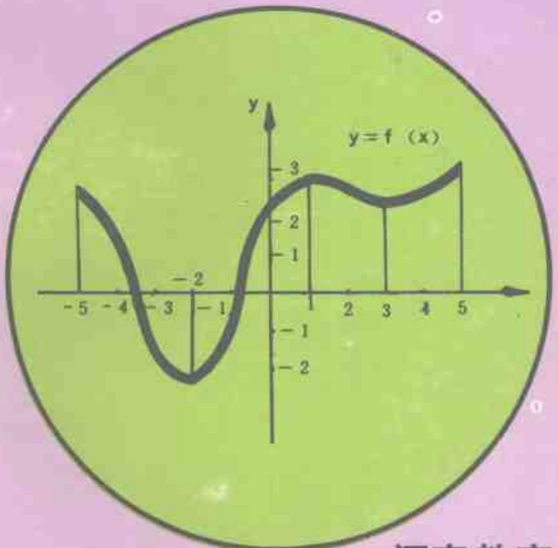
函数·思想·方法

中学数学专题丛书

祝　融　朱华伟　林六十
张耀之　周名存　崔　璨



河南教育出版社

中学数学专题丛书

函数·思想·方法

编著　祝　融　朱华伟　林六十
　　　张耀之　周名存　崔　璨

河南教育出版社

（豫）新登字03号

中学数学专题丛书

函數·思想·方法

编著 祝 融 朱华伟 林六十
张耀之 周名存 崔 璨

责任编辑 张国旺

河南教育出版社出版
河南第一新华印刷厂印刷
河南省新华书店发行

787×1092毫米 32开本 15.625印张 333千字
1994年5月第1版 1994年5月第1次印刷

印数1—3,000册

ISBN 7-5347-1189-4/G·987

定价 7.10元

前　言

《中学数学专题丛书》是一套大型中学数学教学的资料性工具书。顾名思义，这套丛书是按照中学数学的专题分册，每个专题揉合成一个系统进行详赡撰述，形成它独自的全、深、透的特色。每册内容囊括的资料全面，理论探索和实际应用力求达到当代发展的应有高度和广度，所涉及的数学知识和技能浸透到具有内在联系的各数学学科。例题典型，涉足面广，思路清晰，方法灵巧。因此，它是中学数学教师理想的备课和进修的参考书。它的问世，将有助于中学数学的教学和研究工作的进展。

这套丛书计划出版五十个专题，从知识、方法、思维和能力诸方面确立选题，以综合概括中学数学的全貌。

《丛书》已经出版的第一批五部著作是：

《活跃在数学中的参数》、《数列·递推·递归》、《怎样寻求$P(k+1)$的证明》、《截面·折叠·展平》和《选排·取并·填格》等。

即将出版的第二批五部著作是：

《函数·思想·方法》、《不等式·理论·方法》、《二项展开·定理·应用》、《极值漫笔》和《漫话定值》等。

《函数·思想·方法》是该丛书的一种。它首先全面阐述了函数的有关概念及各类的初等函数；紧接着介绍了函数

思想以及借助于函数思想来解数学题的各种方法；接着介绍了有关函数方程的知识以及数学竞赛中常见题的一些解法等。最后，以三章的篇幅着重研究了有关一元二次函数的问题。因为一元二次函数的表示式是二次三项式，所以，在研究二次函数之前，以专章探讨了二次三项式的因式分解问题，为二次函数的研究奠定了基础。因为二次函数这一课题在中学是主要内容之一，同时，它所阐述的方法又广为应用，因此，在专章研究二次函数之中，比较全面、细致，分析透彻，典型例题概括性强，真正起到举一反三之功效。由于二次函数的极值涉足面广，所以，也以专章论述。不但解决了它本身的问题，同时，也为其他有关极值问题提供了解题方法。

本书最后参考文献中，由徐松柏同志较为全面的整编出近年来我国在函数方面出版的书目和各数学期刊中发表的研究文章，以供查找参考。

在本书的编写过程中，我们参阅了数学期刊中大量的有关文章以及有关参考书籍，在此对作者们表示衷心地感谢。王永领和张益南同志为全书绘制了插图，对他们的辛勤劳动致以亲切地问候。

本书所涉及的专题为大家所注目，我们也力争按照丛书的要求创作，但写起来总有力不从心之感。谨将我们之拙见，作为一家之言，抛砖引玉，敬希广大同仁们提出斧正。

编　者

1991.12

目　录

第一章　函数……………………………………………………(1)
第一节　映射与函数……………………………………………(1)
第二节　初等函数………………………………………………(23)
第三节　函数的性质……………………………………………(34)
第四节　函数解析式、定义域、值域及最值……(52)
第五节　函数图象………………………………………………(90)
第六节　函数问题选解……………………………………(130)
第二章　函数思想………………………………………………(148)
第一节　函数思想概述……………………………………(148)
第二节　函数思想与数学解题…………………………(151)
第三节　函数思想与中学数学教学…………………(290)
第三章　函数方程………………………………………………(295)
第一节　函数方程的概念………………………………(296)
第二节　基本初等函数的定义…………………………(301)
第三节　函数方程的解法………………………………(316)
第四节　函数方程综合问题的研究…………………(324)
第四章　二次三项式剖析…………………………………(344)
第一节　二次三项式的配方……………………………(344)
第二节　十字相乘法的因式分解……………………(349)
第三节　系数在给定数集内能否分解因式的
判定……………………………………………………(352)

第四节　二次三项式的各种因式分解法…………（359）
第五节　二次三项式因式分解的应用……………（368）
第五章　二次函数研究……………………………………（377）
第一节　二次函数图象的作法……………………（381）
第二节　含有字母系数的二次函数………………（399）
第六章　二次函数的最值…………………………………（431）
第一节　二次函数最值的求法……………………（432）
第二节　条件最值的讨论…………………………（447）
第三节　带有附加条件的最值问题………………（454）
第四节　二次函数的综合运用……………………（463）
参考文献………………………………………………（477）

第一章　函　数

第一节　映射与函数

一、映射

先看两个集合A、B的元素之间的一些对应关系的例子（图1—1）．为简单起见，这里的A，B都是有限集．

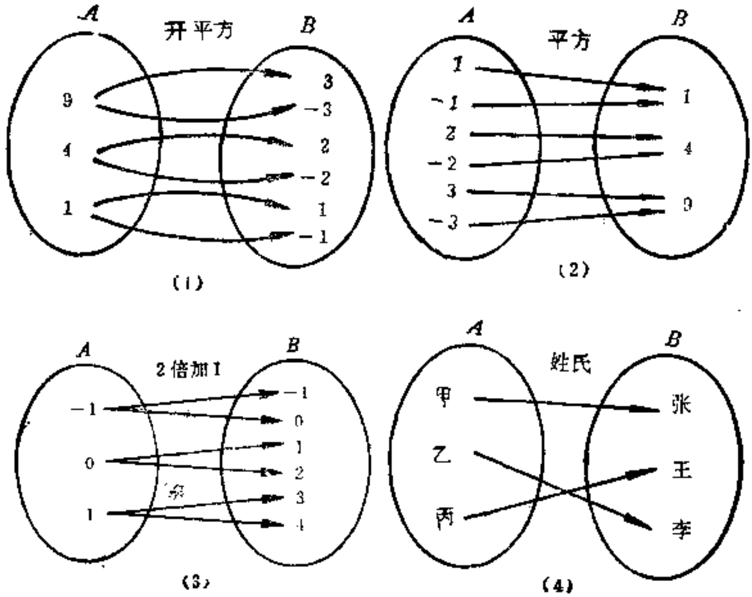


图1—1

在图1—1(1)中，对应法则是“开平方”，即对于集A中的每一个正数x(如$x=9$)，集合B中有两个平方根$\pm\sqrt{x}$(即±3)和它对应；在(2)中，对应法则是“平方”，即对于集合A中的每两个非零整数$\pm m$(如2与-2)，集合B中有一个平方数m^2(即4)和它们对应；在(3)中，对应法则是“2倍加1”，即对于集A中的每一个元素x(如1)，集合B中有一个$2x+1$(即3)与它对应；在(4)中，对应法则是“姓氏”，即对于集合A中的每一个人(如甲)，集合B中有一个姓(即张)，与他对应.

(2)、(3)与(4)这三个对应都有这样的特点：对于第一个集合(即A)中的任何一个元素，第二个集合(即B)中都有唯一的元素和它对应.

定义 设A与B是两个非空集合，如果存在一个对应法则f，使得对于A中的任一元素x，按照对应法则f，在B中有唯一的元素y与x对应，记作

$$f: A \longrightarrow B$$
$$x \longrightarrow y$$

那么称f是从A到B的映射. 元素y称为元素x的象，记作$y=f(x)$。对于任一元素$y\in B$，一切适合$y=f(x)$的x的全体称为y的原象，记作$f^{-1}(y)$，即$f^{-1}(y)=\{x|y=f(x),x\in A\}$.集合$A$称为映射的定义域，记作$D(f)$，$A$中的所有$x$的象所成的集合称为映射$f$的值域，记作$f(A)$或$z(f)$.

例1 每一个三角形都有它的面积. 设T是所有三角形的集合，那么，对T中的任何一个元素t(它是三角形)，通过“求面积”，在R中必有唯一的一个实数x和它对应(即$x=t$的面积). 把“求面积”用f表示，就得到一个映射：

$$f: T \longrightarrow R$$
$$t \longrightarrow x = f(t) = t\text{的面积}.$$

其中f的定义域为$T=\{$所有的三角形$\}$，值域$f(T)=(0, +\infty)$.

例2 设X是所有三角形的集合，Y是所有圆的集合，映射ϕ是

$$\phi: X \longrightarrow Y$$
$$x \longrightarrow X\text{的内切圆}$$

这表示，映射ϕ把每一个三角形映射成它的内切圆．它的定义域$D(\phi)=X$，值域$f(X)=Y$.

例3 $A=(-\infty, +\infty)$，$B=[0, +\infty)$.

$$f: A \longrightarrow B$$
$$x \longrightarrow f(x)=x^2$$

取$y=1\in B$，则y的原象$f^{-1}(y)=f^{-1}(1)=\{-1, 1\}$是两个元素$-1$，$1$所成的集合.

例4 在例1中，设$x=5$，则x的原象$f^{-1}(x)=f^{-1}(5)=\{$面积为5的所有三角形$\}$.

由例3与例4可知，一个元素的原象应视为原象集.

还应注意到，映射

$$f: A \longrightarrow B$$
$$x \longrightarrow y=f(x)$$

的值域$f(A)$不一定等于B，而是B的子集，如图1－1(3)，值域$f(A)$不是$B=\{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$，而是B的子集$\{-1, 1, 3\}$.

映射有如下几种情况：

(1) 单射

设有映射f：$A \longrightarrow B$，如果x_1，$x_2 \in A$，且$x_1 \neq x_2$，则$f(x_1) \neq f(x_2)$，称f为单射（图1—2）．

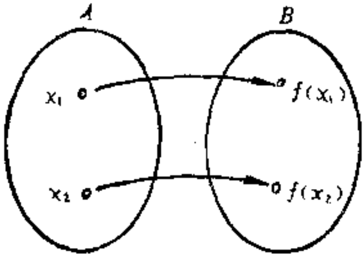


图1—2

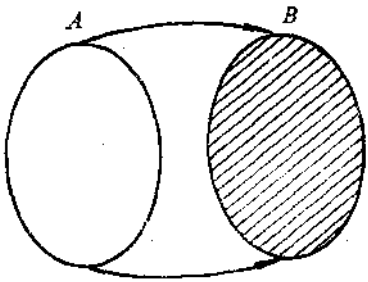


图1—3

（2） 满射

设有映射f：$A \longrightarrow B$，如果$f(A)=B$，则称f为满射（图1—3）．

（3） 双射（一一映射）

如果f既是单射又是满射时，则称f为双射．

例如图1—1中，映射(2)是满射，不是单射，当然不是双射；映射(3)是单射，不是满射，因此不是双射；映射(4)既是单射又是满射，因而是双射．

例5 映射 f：$A \longrightarrow A$

$$x \longrightarrow x$$

这个映射把A中的任何一个x，自己和自己对应起来，我们称这个映射是恒等映射．它显然是A到A上的双射．

例6 $A=\{a, b, c\}$，$B=\{x, y\}$，f：$A \longrightarrow B$定义为$f(a)=x$，$f(b)=x$，$f(c)=y$，则f是满射，但不是单射，因为a、b两点映射到同一点x，因此，f也不是双射．

定义 设f：$A\longrightarrow B$是双射，则称

$$f^{-1}: B\longrightarrow A$$
$$y\longrightarrow x$$

为f的逆映射．其中y与x满足$y=f(x)$。

例如，$A=\{a, b, c\}$，$B=\{x, y, z\}$．映射

$$f: A\longrightarrow B$$

定义为$f(a)=x$，$f(b)=y$，$f(c)=z$，则f是双射

于是，f^{-1}：$B\longrightarrow A$为f的逆映射．$f^{-1}(x)=a$，$f^{-1}(y)=b$，$f^{-1}(z)=c$。

二、函数

（一） 函数的概念

函数这个概念，也象其他数学概念一样，随着数学的发展而不断被精练、深化、丰富．自1718年在约翰·贝努利发表的文章里第一次出现函数定义，至今经过了二百多年的锤炼、变革，形成了函数的现代定义．

什么是函数？粗略地说，“两个量（或两个数）之间的对应规律”就是数学中所说的“函数”．下面给出几个实例：

例1 若物体以速度v作匀速直线运动，设经过时间t，物体通过的距离为s，则时间t与距离s对应着，即对任意时间$t\in[0, +\infty)$都对应着唯一一个距离s，则t与s的对应规律（又叫对应法则）可表为

$$t\longrightarrow s=vt$$

其中v为速度是常数．

例2 设圆的半径为r，圆的面积为A，则半径r与面积A对应着，即对于任意$r\in[0, +\infty)$都对应唯一一个圆的

面积A。r与A的对应规律可表为

$$r \longrightarrow A=\pi r^2$$

其中π为圆周率是常数。

例3 某水库的存水量Q与水深h（指最深处的水深）如下表：

水深h（米）	0	5	10	15	20	25	30	35
存水量Q(万方)	0	20	40	90	160	275	437.5	650

从表可以看到，每一深度h都对应唯一一个存水量Q. 这个表就给出了h与Q的对应规律.

例4 设时间为t时，气温为T(℃).现用横坐标表示时间t，用纵坐标表示气温T(℃). 若某地某日从0点到24点的气温曲线如图1—4。则对0点到24点中间任意时间t，过t作t轴的垂线与气温曲线交于点(t, T)，于是得到时间t对应唯一一个温度T. 这条气温曲线就给出了t与T的对应规律。

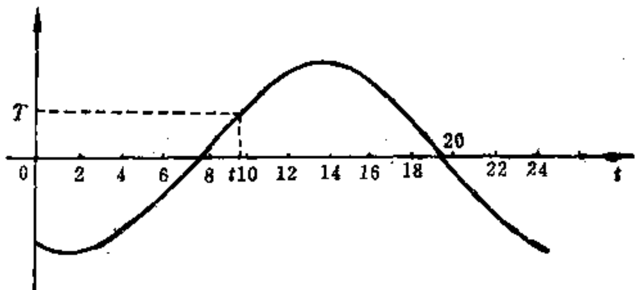


图1—4

例5 对任意$x\in[-1, 1]$，都对应唯一一个数$\sqrt{1-x^2}$，设$y=\sqrt{1-x^2}$，则x与y的对应规律可表为

$$x\longrightarrow y=\sqrt{1-x^2}.$$

例6 对任意自然数n，都对唯一一个数$(-1)^n$，设$a_n=(-1)^n$，则n与a_n的对应规律可表为

$$n\longrightarrow a_n=(-1)^n.$$

上面六个实例，它们的实际意义和对应规律完全不同，对应规律的表示法也有显著的差异．但是，从数学角度看，它们却有一个共同的属性：有两个非空数集和一个对应规律。对于其中一个数集的任意一个数，按照对应规律都对应着另一个数集中的唯一一个数．

定义 设A、B是两个非空的数集，如果按照某种对应法则f，对于A中的任一个元素x，在B中都有唯一的元素y和它对应，则称对应法则f是集合A到集合B的函数．记为

$$f:\ A\longrightarrow B\ (x\longrightarrow y=f(x))$$

x叫自变量，数集A称为函数f的定义域，记为$D(f)$，即$D(f)=A$。数x对应的数y称为x的函数值，记为$y=f(x)$。函数值的集合称为函数f的值域，记为$Z(f)$或$f(A)$．即

$$Z(f)=f(A)=\{y\,|\,y=f(x),\ x\in A\}\subseteq B.$$

根据函数的定义不难看出：①上面所列举的六个例子都是函数；②函数就是集合A到集合B的映射，其中A、B为非空数集。

定义 当集合A和B都是非空的数集时，映射f：$A\longrightarrow B$就叫做从集合A到集合B的函数．

符号“f：$A\longrightarrow B$”表示f是定义在数集A上并在数集B中取值的函数，即对于任意$x\in A$，有$f(x)\in B$，意义明确．这是现代数学表示函数的一般符号．一方面，由于我们要研究大量具体的函数，即对应法则不是抽象的而是具体的，使用这个一般的函数符号有些不方便；另一方面，为了和

中学课本中的函数符号一致．本书约定，将函数符号“f：$A \longrightarrow B$”改写为“$y=f(x)$，$x\in A$”．当不需要明确指出函数f的定义域或定义域很明显时，又可简写为“$y=f(x)$”．有时也笼统地说“$f(x)$是x的函数”．显然，把函数值$f(x)$称做函数，这个说法与函数的定义不一致，混淆了函数f与函数值$f(x)$二者之间的含义，因此应该注意到这只是为了方便，习惯上所作的约定．

如果只给出函数关系式$y=f(x)$而未指明定义域时，那么这个函数的定义域就是指能使这个式子有意义的实数x的集合．

例如，函数$f(x)=\dfrac{1}{x+3}$的定义域为$x+3\neq 0$，即$x\neq -3$的一切实数或$D(f)=(-\infty,-3)\cup(-3,+\infty)$；函数$f(x)=\sqrt{x+3}$的定义域为$x+3\geqslant 0$即$x\geqslant -3$的一切实数或$D(f)=[-3,+\infty)$．

在具有实际意义的函数中，函数的定义域还要受实际意义的约束．例如半径为r的圆的面积$A=\pi r^2$．从抽象的数学公式来说，r可以取任意实数，但从它的实际意义来说，圆的半径r不能取负值，即$r\geqslant 0$，所以定义域为$[0,+\infty)$．

在函数定义中，对应法则f是抽象的，只有在给定的具体函数中，对应法则f才是具体的．如前面的例子：

例 1 的对应法则f：$t\longrightarrow s=vt$，$t\in[0,+\infty)$．

例 5 的对应法则f：$x\longrightarrow y=\sqrt{1-x^2}$，$x\in[-1,1]$．

例 4 的对应法则f：一条曲线，$t\in[0,24]$，对于任意t，过t作t轴的垂线与曲线交于一点$P(t,T)$．于是，对于任意$t\in[0,24]$，按照这条曲线，对应一个T．

例 3 的对应法则f：一个表格$h \longrightarrow Q$.

由此可见，只要对数集A中的任意x都能明确指出它所对应的唯一一个数y，就具体地表现出了一个对应法则f，即给定了定义域为A的函数f（或定义在A上的函数）．至于这个对应法则用什么方法给出，是无关紧要的．

为了对对应法则（函数）f有个直观形象的认识，可将f比喻为一部“数值变换器”．对于任意$x \in A$，将x输入到数值变换器之中，通过f的“变换”作用，输出来就是$y \in B$．不同的函数就是不同的数值变换器．如图 1—5．

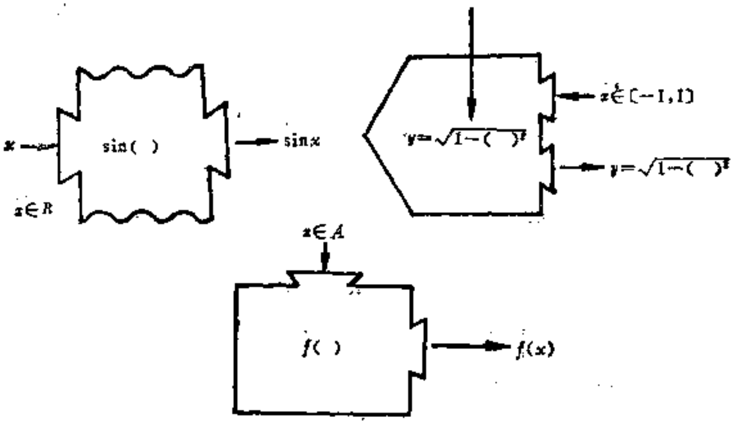


图 1 — 5

由于函数值是实数，所以函数值域是一些实数组成的集合．它可以是实数集R，也可以是R的真子集．例如，

函数$y=x^3+1$的定义域是R，它的值域也是R，即

$$\{y \mid y=x^3+1,\ x \in R\}=R.$$

函数$y=\sqrt{1-x^2}$的定义域是闭区间$[-1,\ 1]$，它的值

域是闭区间[0，1]，是R的真子集．即

$$\{y \mid y=\sqrt{1-x^2},\ x\in[-1,\ 1]\}=[0,\ 1]\subset R.$$

函数定义指出：对于任意$x\in A$，都对应唯一一个$y=f(x)\in B$．反之，一个$y\in f(A)$就不一定只有唯一一个$x\in A$，使$f(x)=y$．

例如，函数$y=x^2$的定义域是R，值域是$[0,+\infty)$。对于任意$x\in R$，对应唯一一个$y=x^2\in[0,\ +\infty)$．反之，对于任$y=a\in[0,\ +\infty)$，却有两个$x=\pm\sqrt{a}$使$(\pm\sqrt{a})^2=a$.

再如，常数函数$y=f(x)=c$(c是常数)的定义域是R，值域是单点集$\{c\}$，即对任意$x\in R$对应唯一一个$y=c$．反之，对于$y=c$，R中所有x都使$y=f(x)=c$．

由函数的定义可以知道，如果有两个函数，它们的定义域相同，对应法则也完全一致，(从而它们的值域也相同)，那么这两个函数是同一个函数．

例如，函数$f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3}$与函数$g(x)=x-3$，不是同一个函数，这是因为函数$f(x)$的定义域为$x\neq-3$的一切实数，而函数$g(x)$的定义域为一切实数；但是函数

$f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3}$与函数$g(x)=x-3\ (x\neq-3)$视同一个函数，其因是定义域相同，对应法则一致．

又如，函数$f(x)=x+1$与函数$g(t)=t+1$，因为它们的定义域都是一切实数，并且对应法则一致，所以它们虽然用不同字母表示，仍为同一个函数．

函数的定义域、对应法则和值域称为函数的三要素．

（二） 函数的表示法