机械工程师进修大学　辅导材料之六

《机械振动》习题解答

天　津　大　学　　向豪英
北京工业大学一分校　　褚　楷
合肥工业大学　　王善庆

1985・北京

機械工程师進修大学

辅导教材

机械工业部　中国机械工程学会联合创办

中国机械工程学会机械加工学会　主办　《机械工程师进修大学刊授教材》编辑部
机床杂志社　机床杂志社出
（北京安内方家胡同19号）

北京刊—49

目　录

习 题 一

Q.1-1［解］

1）图Q.1-1a）中弹簧k_1与k_2为串联，其等效刚度K_1由式（1.3—16）得出为

$$K_1=\frac{1}{\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}}=\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}$$

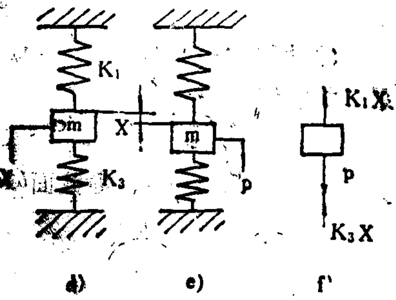


图 Q.1-1

因此系统可简化成图Q.1-1d)的形式。这种形式的质量弹簧系统，其质量块两侧弹性元件的组合刚度可按下述方法分析。假设弹簧K_1和k_3均无变形，在质量块m上沿弹簧轴线x方向施加力p（p中包含了重力mg），使质量块位移x后处于平衡位置，如图e）所示，则此时质量块受力如图f）

$$p=K_1x+k_3x \qquad (1)$$

由于作用力等于系统质量块的位移与系统等效刚度的乘积（式1.3-1），若设K_1与k_3的组合刚度为K，则有

$$p=Kx \qquad (2)$$

把式（2）代入式（1），即有，

$$Kx=(K_1+k_3)x \qquad (3)$$

故系统的等效刚度由式（3）为：

$$K=K_1+k_3=\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}+k_3$$

$$=\frac{k_1(k_2+k_3)+k_2k_3}{k_1+k_2}$$

事实上，若质量块两侧均有弹性元件（如图d）形式），则无论平衡状态时弹簧是否已有变形（受压、受拉或不受力），其组合刚度均等于并联刚度。例如，系统受压平衡，K_1受压变形为L_1，k_3受压变形为L_3，如图g）所示。此时有

$$K_1L_1=k_3L_3$$

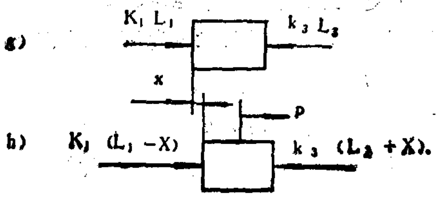


图 Q.1-1

若在质量块上加力p使质量块位移x，则质量块受力如图h），此时有

$$K_1(L_1-x)+p=k_3(L_3+x)$$

仍设系统等效刚度为K，则$p=Kx$，由上式可得

$$p=Kx=K_1x+k_3x$$

即系统等效刚度为两弹簧的并联刚度

$$K=K_1+k_3$$

对于系统中质量块两侧弹簧均受拉伸而平衡的情况，亦不难证明其系统等效刚度仍为并联

刚度。读者不妨试证。

2）图Q.1-1b）系统弹簧k_1、k_2为并联，其等效刚度K_1按式（1.3-11）为

$$K_1 = k_1 + k_2 = 2k$$

因此，图b）系统可简化成图Q.1-1i）形式。图中弹簧k_3与k_1为串联关系，故系统弹性元件等效刚度K为

$$K = \frac{1}{\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_3}} = \frac{1}{\frac{1}{2k}+\frac{1}{k}} = \frac{2}{3}k$$

i）

图　Q.1-1

3）图Q.1-1c）与图Q.1-1a）类似，但质量块下方二弹簧也是并联关系，故系统的等效刚度为

$$K = k_1 + 2k_2$$

Q.1-2［解］长l、等截面$b\times h$的悬臂梁，其自由端的刚度按式（1.3-6）为

$$k_1 = \frac{3EJ}{l^3}$$

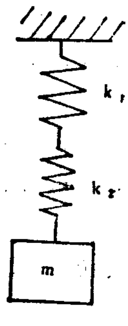
式中

$$J = \frac{1}{12}bh^3$$

$$k_1 = \frac{3\times 2.1\times 10^6\times 6\times 1^3}{12\times 30^3}$$

$$= 116.7\ \text{kgf/cm}$$

系统可简化为图Q.1-2a）的形式。其总刚度相当于刚度为k_1、k_2的弹性元件的串联刚度，可按式（1.3-16）求得

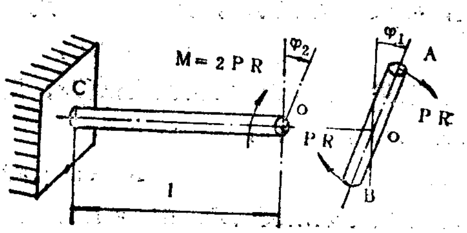


a）

图　Q.1-2

$$K = \frac{1}{\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}} = \frac{1}{\frac{1}{116.7}+\frac{1}{20}} = 17.07\ \text{kgf/cm}$$

Q.1-3［解］系统包含竖杆与水平杆两个弹性元件，其组合刚度应分析竖杆上、下端A、B处的横向（垂直轴线AB的）刚度。在扭矩$M=2PR$作用下，由于竖杆AB与水平杆OC上所受外力偶矩相等，均为$M=2PR$，如图Q.1-3a）所示，系统微变形时，轴AB绕O变形角位移φ_1，水平轴扭转变形角位移φ_2，系统总变形为二者线性叠加$\varphi=\varphi_1+\varphi_2$，故系统组合等效刚度为二弹性元件的串联刚度。可通过计算φ_1、φ_2导出相应的刚度$K_{\varphi 1}$、$K_{\varphi 2}$。



a）

图　Q.1-3

固定水平轴，单独计算力P作用下竖直杆端点的变形，A、B两点变形相同，均为

$$x_a = \frac{PR^3}{3EJ}$$

式中

$$J = \frac{\pi d^4}{64}$$

……微变形时，可视为$x_s = R\varphi_1$，即

$$\varphi_1 = \frac{x_s}{R} = \frac{PR^2}{3EJ} = \frac{PR}{\frac{3EJ}{R}}$$

由此可得竖直杆相对水平轴线OC的等效刚度为

$$K_{\varphi_1} = \frac{3EJ}{R}$$

水平轴受扭矩$M = 2PR$作用时，其扭转角位移由式（1.3-7）为：

$$\varphi_2 = \frac{Ml}{GJ_p} = \frac{M}{\frac{GJ_p}{l}}$$

式中
$$J_p = \frac{\pi d^4}{32}$$

由此可得水平轴的等效扭转刚度为：

$$K_{\varphi_2} = \frac{GJ_p}{l}$$

系统的等效刚度$K\varphi$为K_{φ_1}、K_{φ_2}的串联刚度

$$K_\varphi = \frac{1}{\frac{1}{K_{\varphi_1}} + \frac{1}{K_{\varphi_2}}} = \frac{1}{\frac{R}{3EJ} + \frac{l}{GJ_p}}$$

$$= \frac{1}{\frac{3EJl + RGJ_p}{3EJGJ_p}}$$

$$= \frac{3EG\pi d^4}{64RG + 96El} \quad (\mathrm{kgf \cdot cm/rad})$$

习　题　二

Q.2-1〔解〕　设此简谐振动为

$$x = A\sin\ (\omega t + \psi)$$

对时间t求一阶和二阶导数，得到速度和加速度的表示式，即

$$\dot{x} = A\omega\mathrm{con}\ (\omega t + \psi)$$

$$\ddot{x} = -A\omega^2\sin\ (\omega t + \psi)$$

由此可见，简谐振动的振幅A、最大速度$\dot{x}_{max}$和最大加速度$\ddot{x}_{max}$之间有如下关系

$$\dot{x}_{max} = A\omega \qquad (a)$$

$$\ddot{x}_{max} = -A\omega^2 \qquad (b)$$

现已知频率$f = 25Hz$，由角频率ω与频率的关系式$\omega = 2\pi f$，可求得

$$\omega = 50\pi\ \mathrm{rad/sec}$$

已知最大速度$\dot{x}_{max} = 31.19$ cm/sec，由（a）式可求得

$$A = 0.1986\ \text{cm}$$

由（b）式可得

$$\ddot{x}_{max} = -4899\ \text{cm/sec}^2$$

Q.2-2［解］　将上述表达式改写为

$$x = 0.4\sin\omega t + 0.3\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

可知弹簧振子的振动规律是由两个具有相同频率、相位差为$\pi/2$的简谐振动的合成，其合成结果是一个与原来频率相同的简谐振动。可用图解法求得，即把它们分别用旋转矢量表示，求合矢量$\vec{A}$在OX轴上的投影。

由图Q.2-2可知

$$x = A\sin(\omega t + \psi) \tag{a}$$

上式$A = \sqrt{(0.4)^2 + (0.3)^2} = 0.5\text{cm}$；　$\psi = \tan^{-1}\dfrac{0.3}{0.4}$，$\psi = 36°52'$

由（a）式x对时间t求一阶和二阶导数，可以得到速度和加速度，即

$$\dot{x} = A\omega\cos(\omega t + \psi)$$

$$= A\omega\sin\left(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2}\right) \tag{b}$$

$$\ddot{x} = -A\omega^2\sin(\omega t + \psi)$$

$$= A\omega^2\sin(\omega t + \psi + \pi) \tag{c}$$

由（b）、（c）两式分别得

$$\dot{x}_{max} = A\omega = 12.57\ \text{cm/sec}$$

$$\ddot{x}_{max} = A\omega^2 = 315.83\ \text{cm/sec}^2$$

再把A、$\dot{x}_{max}$、$\ddot{x}_{max}$之间的关系表示在图Q·2-2。

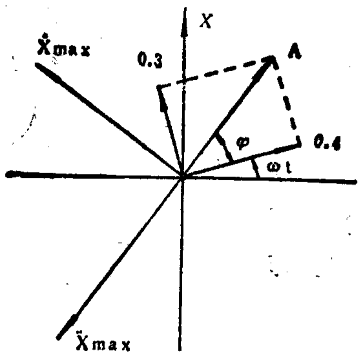
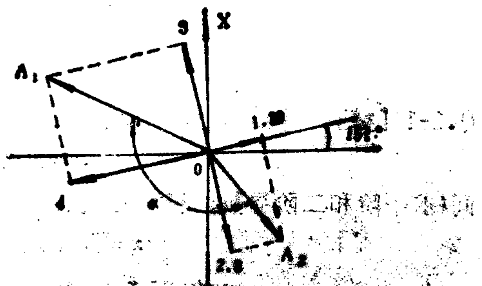


图 Q.2-2



[illegible]

Q.2-3［解］　将第一点的运动方程改写为

$$x_1 = 3\sin\left(15t + \frac{\pi}{2}\right) + [illegible]$$

可知其振动规律是由两个具有相同频率、相位差为$\pi/2$的简谐振动合成的，其合成结果是一个与原频率相同的简谐振动。其振幅可用[illegible]如图

Q.2-3可知，振幅

$$A_1=\sqrt{3^2+4^2}=5\ \text{cm}$$

初相位

$$\psi_1=\frac{\pi}{2}+\tan^{-1}\frac{4}{3},\qquad \psi_1=143°8'$$

同样，将第二点的运动方程改写为

$$x_2=1.6(\sin15t\cos\pi/6-\cos15t\sin\pi/6)-2\cos15t$$

$$=1.39\sin15t-2.8\cos15t$$

$$=1.39\sin15t+2.8\sin(15t+\frac{3\pi}{2})$$

可知其振动规律是由两个具有相同频率、相位差为$3\pi/2$的简谐振动的合成，其合成结果是与原频率相同的简谐振动。用图解法求其振幅，由图Q.2-3可知，振幅

$$A_2=\sqrt{(1.39)^2+(2.8)^2}=3.13\ \text{cm}$$

初相位

$$\psi_2=\frac{3\pi}{2}+\tan^{-1}\frac{1.39}{2.8},\qquad \psi_2=296°24'$$

由以上分析计算可知，该系统两点的振动规律，是两个相同频率的简谐振动，其相位差 $\alpha=\psi_2-\psi_1=153°16'$

Q.2-4［解］令$Z=1+\sqrt{3}i$，则复数Z的模$A=|Z|=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$。由图Q.2-4可知$\tan^{-1}\psi=\sqrt{3}$，所以$\psi=\pi/3$，得到

$$Z=Ae^{i\theta}=2e^{i\pi/3}$$

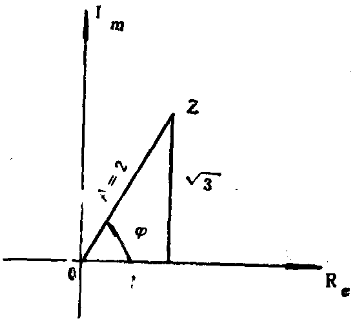


图 Q.2-4

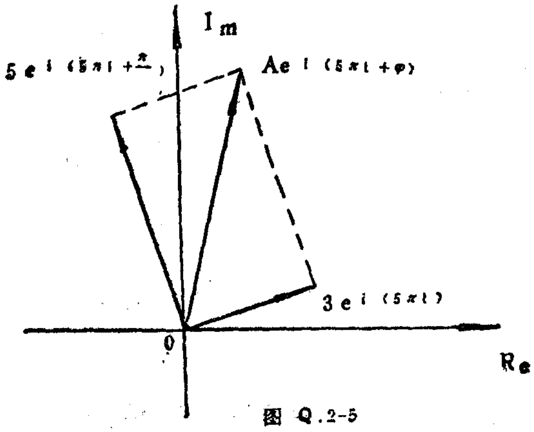


图 Q.2-5

Q.2-5［解］ 依题意

$$x=3e^{i(5\pi t)}+5e^{i(5\pi t+\pi/2)}$$

根据复数加法，由图Q.2-5得

$$x=\sqrt{3^2+5^2}\ e^{i(5\pi t+\varphi)}=5.83e^{i(5\pi t+\varphi)}$$

$$\psi=\tan^{-1}\frac{5}{3},\qquad \psi=1.03\ \mathrm{rad}$$

$$R_e(x)=5.83\cos(5\pi t+1.03)$$

$$I_m(x)=5.83\sin(5\pi t+1.03)$$

Q.2-6［解］ 由图可知，激振力是周期为$T=\frac{2\pi}{\omega}$的周期函数，在一个周期内的函数表达式为

$$f(t)=\begin{cases}\frac{\omega p}{\pi}t & 0\leq t\leq\frac{\pi}{\omega}\\ -\frac{\omega p}{\pi}\left(\frac{2\pi}{\omega}-t\right) & \frac{\pi}{w}\leq t<\frac{2\pi}{\omega}\end{cases}$$

并且 $f(t+nT)=f(t)$ $(n=1,2,\cdots)$

$f(t)$为奇函数(奇函数的图形对称于原点)。

将$f(t)$按(2.5-2)式展成富氏级数，并用(2.5-5)式、(2.5-6)式和(2.5-7)式求各项常数。

由于$f(t)$是奇函数，所以系数$a_n=0$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega t dt$$

$$=\frac{\omega}{\pi}\left[\int_0^{\pi/\omega}\frac{\omega p}{\pi}t\sin n\omega t d-\right.$$

$$\left.-\int_{\pi/\omega}^{2\pi/\omega}\frac{\omega p}{\pi}\left(\frac{2\pi}{\omega}-t\right)\sin n\omega t dt\right]$$

$$=\frac{2p}{n\pi}(-1)^{n+1}\qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

$$a_0=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt$$

$$=\frac{\omega}{\pi}\left[\int_0^{\pi/\omega}\frac{\omega p}{\pi}tdt-\right.$$

$$\left.-\int_{\pi/\omega}^{2\pi/\omega}\frac{\omega p}{\pi}\left(\frac{2\pi}{\omega}-t\right)dt\right]$$

$$=0$$

所以

$$f(t)=\frac{2p}{\pi}\left(\sin\omega t-\frac{1}{2}\sin 2\omega t+\frac{1}{3}\sin 3\omega t-\cdots\right)$$

Q.2-7［解］ 由图Q.2-7可知，激振力$f(t)$是周期为$T=\frac{2\pi}{\omega}$的周期函数，在 个周期内的函数表达式为

$$f(t)=\frac{\omega p}{2\pi}t\qquad 0\leq t\leq\frac{2\pi}{\omega}$$

并且 $(t+nT)=f(t)$

将$f(t)$按(2.5-2)式展成富氏级数，并且用(2.5-5)式、(2.5-6)式和(2.5-7)式求各项常数。

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,dt$$

$$= \frac{\omega}{\pi}\int_0^{2\pi/\omega} \frac{\omega p}{2\pi} t\,dt = p$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega t\,dt$$

$$= \frac{\omega}{\pi}\int_0^{2\pi/\omega} \frac{\omega p}{2\pi} t\cos n\omega t\,dt$$

$$= \frac{\omega^2}{2\pi^2} p\left[\frac{t}{n\omega}\sin n\omega t + \left(\frac{1}{n\omega}\right)^2 \cos n\omega t\right]\Bigg|_0^{2\pi/\omega}$$

$$= 0$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega t\,dt$$

$$= \frac{\omega}{\pi}\int_0^{2\pi/\omega} \frac{\omega p}{2\pi} t\sin n\omega t\,dt$$

$$= \frac{\omega^2 p}{2\pi^2}\left[-\frac{t}{n\omega}\cos n\omega t + \left(\frac{1}{n\omega}\right)^2 \sin n\omega t\right]\Bigg|_0^{2\pi/\omega}$$

$$= \frac{\omega^2}{2\pi^2} p\left(-\frac{2\pi}{n\omega^2}\cos 2n\pi\right)$$

$$= -\frac{p}{\pi n}$$

所以

$$f(t) = \frac{p}{2} - \frac{p}{\pi}\left(\sin\omega t + \frac{1}{2}\sin 2\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \cdots\right.$$

Q.2-8 [解] 由图可知，此函数是一个周期函数，满足狄里赫利条件，它的富氏级数就是它的富氏展开式。

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} p_0\,d(\omega t)$$

$$= p_0 \tag{a}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega t\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} p_0 \cos n\omega t\,d(\omega t)$$

$$= 0 \tag{b}$$

$$\begin{aligned}b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega t dt\\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi p_0\sin n\omega t d(\omega t)\\ &= \frac{p_0}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\cos n\omega t\right)\Big|_0^\pi\end{aligned} \qquad (c)$$

由(c)式可知，当n为偶数时，$b_n = 0$；当n为奇数时$b_n = 2p_0/n\pi$。所以

$$f(t) = \frac{p_0}{2} + \frac{2p_0}{\pi}\left(\sin\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t + \cdots\cdots\right)$$

Q.2-9［解］ 由题设条件可知，此函数$f(t)$为周期$T = \frac{2\pi}{\omega}$的周期函数。

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt\\ &= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2}\frac{2\omega t}{\pi}d(\omega t) + \right.\\ &+ \int_{\pi/2}^{3\pi/2}\left(2 - \frac{2\omega t}{\pi}\right)d(\omega t) +\\ &\left.+ \int_{3\pi/2}^{2\pi}\left(-4 + \frac{2\omega t}{\pi}\right)d(\omega t)\right] = 0\end{aligned} \qquad (a)$$

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega t dt\\ &= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2}\frac{2\omega t}{\pi}\cos n\omega t d(\omega t) + \right.\\ &+ \int_{\pi/2}^{3\pi/2}\left(2 - \frac{2\omega t}{\pi}\right)\cos n\omega t d(\omega t) +\\ &\left.+ \int_{3\pi/2}^{2\pi}\left(-4 + \frac{2\omega t}{\pi}\right)\cos n\omega t d(\omega t)\right]\\ &= 0\end{aligned} \qquad (b)$$

$$\begin{aligned}b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega t dt\\ &= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2}\frac{2\omega t}{\pi}\sin n\omega t d(\omega t) + \right.\\ &+ \int_{\pi/2}^{3\pi/2}\left(2 - \frac{2\omega t}{\pi}\right)\sin n\omega t d(\omega t) +\\ &\left.+ \int_{3\pi/2}^{2\pi}\left(-4 + \frac{2\omega t}{\pi}\right)\sin n\omega t d(\omega t)\right]\\ &= \frac{4}{n^2\pi^2}\left(\sin\frac{n\pi}{2} - \sin\frac{3n\pi}{2}\right)\end{aligned} \qquad (c)$$

由(c)式可知，当n为偶数时，$b_n = 0$；当n为奇数时，

$$n = 1 + 4m \qquad b_n = \frac{8}{n^2\pi^2} \qquad (m = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$$

$$n = 3 + 4m \qquad b_n = -\frac{8}{n^2\pi^2} \qquad (m = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$$

所以

$$f(t) = \frac{8}{\pi^2}\left(\sin\omega t - \frac{1}{3^2}\sin 3\omega t + \frac{1}{5^2}\sin 5\omega t - \cdots\cdots\right)$$

Q.2-10 [解]

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} p_0 \sin\frac{1}{2}\omega t\, d(\omega t)$$

$$= \frac{4p_0}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega t\, dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} p_0 \sin\frac{1}{2}\omega t \cos n\omega t\, d(\omega t)$$

$$= -\frac{4}{4n^2 - 1}\cdot\frac{p_0}{\pi}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega t\, dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} p_0 \sin\frac{1}{2}\omega t \sin n\omega t\, d(\omega t)$$

$$= 0$$

所以

$$f(t) = \frac{4p_0}{\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\cos\omega t - \frac{1}{15}\cos 2\omega t - \frac{1}{35}\cos 3\omega t - \frac{1}{63}\cos 4\omega t\cdots\cdots\right)$$

习 题 三

Q.3-1 ［解］根据$\omega_n=2\pi f_n$可知，比较两个系统的固有频率f_n，应首先分析系统的固有角频率ω_n，而由固有角频率公式(3.2—10)

$$\omega_{n1}=\sqrt{\frac{K_1 g}{W_1}}$$

$$\omega_{n2}=\sqrt{\frac{K_2 g}{W_2}}$$

可知，固有角频率的大小取决于系统的等效刚度和等效质量。

1)由题设$K_1=K_2$，$W_1<W_2$可知$\omega_{n1}>\omega_{n2}$，即图a)系统比图b)系统的固有频率高。

2)按材料力学(或式1.3-5)可知图a)、b)系统的等效刚度分别为

$$K_1=\frac{48EJ_1}{(2l_1)^3}$$

$$K_2=\frac{48EJ_2}{(2l_2)^3}$$

式中 $J_1=\frac{\pi}{64}d_1^4$, $J_2=\frac{\pi}{64}d_2^4$

题设$d_1=d_2$，故$J_1=J_2$。固为$l_1>l_2$可得$K_1<K_2$，又由于$W_1=W_2$，因此

$$\sqrt{\frac{K_1 g}{W_1}}<\sqrt{\frac{K_2 g}{W_2}}$$

即 $\omega_{n1}<\omega_{n2}$

图b)系统比图a)系统的固有频率高。

3) 图a)系统的弹性元件的组合等效刚度K_1为串联刚度，按式(1.3-16)有

$$K_1=\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}$$

图b)系统的等效刚度K_2为并联刚度

$$K_2=k_1+k_2$$

比较K_1和K_2，可知 $K_2>K_1$

由于 $W_1=W_2=W$

故有

$$\sqrt{\frac{K_2 g}{W}}>\sqrt{\frac{K_1 g}{W}}$$

$$\omega_{n2}>\omega_{n1}$$

即图b)系统比图a)系统固有频率高。

4)当不计轴的质量时，按材料力学，系统a)、b)的等效刚度分别为

$$K_1=\frac{3EJ_1}{l_1^3} \qquad K_2=\frac{3EJ_2}{l_2^3}$$

由于 $l_1=l_2$, $J_2>J_1$

故　　$K_2 > K_1$

题设　　$W_2 = W_1 = W$

故有　　$$\sqrt{\frac{K_1 g}{W}} < \sqrt{\frac{K_2 g}{W}}$$

$$\omega_{n1} < \omega_{n2}$$

所以系统b)比系统a)的固有频率高。

由此可见，系统的固有频率随系统刚度的增加而提高、随系统质量的降低而提高；反之，若刚度降低而质量增加则系统固有频率随之降低。

Q.3-2［解］

1)求系统的固有频率只需按式(3.2-10)求出固有角频率ω_n，则可进而求出固有频率$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi}$。

题设重物W落到梁上不再分开，即与梁一起振动，若不计梁重而只考虑梁中部受W力作用，则可按简支梁公式求梁中点的静变形，从而找到系统静平衡点位置O。

由手册可查得每根槽钢的抗弯截面惯性矩为$J_0 = 26\text{cm}^4$，两根槽钢组合梁的截面惯性矩为$J = 2J_0 = 52\text{cm}^4$。重物W在梁中点引起的静挠度为

$$x_s = \frac{WL^3}{48EJ}$$

$$= \frac{50\times 300^3}{48\times 2.1\times 10^6\times 52} = 0.258\text{cm}$$

系统的静平衡位置O即在重物使梁静变形x_s处。系统的固有角频率可按式(3.2-10)求得

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{x_s}} = \sqrt{\frac{980}{0.258}} = 61.63\ \text{rad/sec}$$

所求自由振动频率即为系统固有频率

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = 9.8\ Hz$$

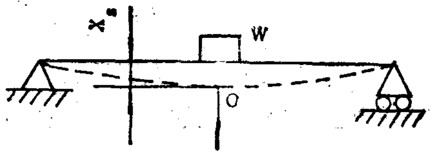
2)本系统当重物与梁结合后的振动为单自由度系统的无阻尼自由振动，由式(3.2-9)可知，其自由振动的振幅A取决于ω_n，x_0和$\dot{x}_0$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right)^2} \qquad (3.2\text{-}9)$$

式中　ω_n—系统固有角频率，已经求出。

x_0—系统或质量块的初位移。

$\dot{x}_0$—系统或质量块的初速度。



a)

图　Q.3-2

当重物W落到与梁接触时开始振动，如图Q.3-2a)所示。应当注意的是初位移是指质量块开始振动时相对于系统平衡位置的位移。在解1）中已经求出系统静平衡位置O在梁的水平位置下方x_s处，取座标x正向为垂直向下，则可知初位移应是

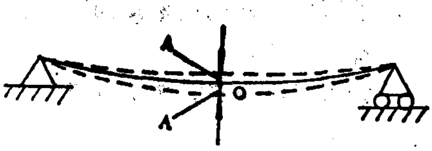
$$x_0 = -x_s$$

当重物由距梁水平位置高h处自由落到梁上时，在接触梁表面的刹那间(即$t=0$时）的速度即为振动开始时的初速度$\dot{x}_0$。根据自由落体规律可知

$$\dot{x}_0=\sqrt{2gh}$$

因此，按式(3.2-9)可得系统振幅为

$$\begin{aligned}A&=\sqrt{\dot{x}_0+\left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right)^2}\\&=\sqrt{x_0^2+2hx_s}\\&=\sqrt{0.253^2+2\times2\times0.258}\\&=1.05\text{cm}\end{aligned}$$



b)

图 Q.3-

即梁中点将以平衡点O为中心，以A为振幅，以固有角频率ω_n作上下简谐振动，如图Q.3-2b)所示。

Q.3-3［解］ 由材料力学可知点C处之挠度为

$$x_s=\frac{Wl_2^2}{3EJ}(l_1+l_2)=\frac{200\times100^2\times(200+100)}{3\times5.2\times10^8}=0.385\text{ cm}$$

由式(3.2-10)可得系统固有角频率

$$\omega_n=\sqrt{\frac{g}{x_s}}=\sqrt{\frac{980}{0.385}}=50.45\ \text{rad/sec}$$

系统自振频率

$$f_n=\frac{\omega_n}{2\pi}=8.03\ Hz$$

Q.3-4［解］ 设$AB=l$，$AC=l_1$，$BC=l_2$并设梁AB为简支，如图Q.3-4a)所示。由材料力学挠度公式可得梁AB受W力作用时，点C处挠度x_{s1}为

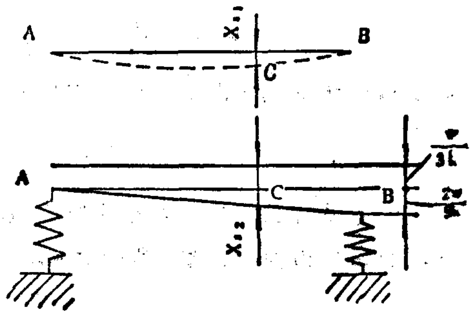


图 Q.3-4

$$x_{s1}=\frac{Wl_1l_2(l^2-l_1^2-l_2^2)}{6EJl}$$

由此可得梁本身之刚度为

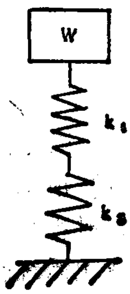
$$k_1=\frac{6EJl}{l_1l_2(l^2-l_1^2-l_2^2)}=1890\ \text{kgf/cm}$$

由于AB两点支在弹性元件上，故W引起A、B两点弹性元件变形，在点C处产生的附加静变位x_{s2}(如图b))为

$$x_{s2}=\frac{W}{3k}+\frac{2}{3}\left(\frac{2W}{3k}-\frac{W}{3k}\right)=\frac{5W}{9k}$$

由此得刚度

$$k_2=\frac{9}{5}k=90\ \text{kgf/cm}$$



c)

图 Q.3-

系统等效刚度K为两个刚度为k_1，k_2之弹簧的串联刚度，如图Q.3-4 c)，为

$$K=\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}$$

系统的固有角频率为

$$\omega_n=\sqrt{\frac{Kg}{W}}=16.75\ \text{rad/sec}$$

系统的自振频率为

$$f_n=\frac{1}{2\pi}\omega_n=2.67\,\text{Hz}$$

本题亦可用公式 $\omega_n=\sqrt{\dfrac{g}{x_{s1}+x_{s2}}}$求解，且更简捷，留待读者自行验证。

Q.3-5［解］ 系统的等效刚度为盘两侧当量轴的并联刚度。

1)将盘两侧的阶梯轴化为直径d_1、长l_0的当量轴，由式(3.3-15)可得

$$l_0=l_1+l_2\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4$$

2)一侧当量轴的极惯性矩为$J_p=\dfrac{\pi d_1^4}{32}$。系统的等效扭转刚度由式(3.3-2)可得

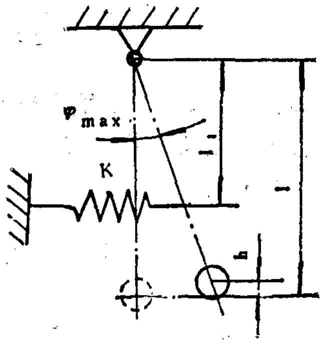
$$K_\varphi=2\left(\frac{GJ_p}{l_0}\right)=\frac{2G\pi d_1^4}{32l_0}=\frac{G\pi d_1^4}{16l_0}$$

3)系统扭转固有频率可用式(3.3-10)求得

$$f_n=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K_\varphi}{I}}=\frac{d_1^2d_2^2}{8\pi}\sqrt{\frac{\pi G}{I(l_2d_1^4+l_1d_2^4)}}\qquad \text{Hz}$$

Q.3-6［解］ 取φ为摆的角位移，最大摆幅为φ_{max}，在微幅振动中可以认为摆作简谐振动。当φ为φ_{max}时，弹簧伸长近似为$l_1\varphi_{max}$，摆锤由最低点上升h，如图Q.3-6a)

$$h=l(1-\cos\varphi_{max})\approx\frac{1}{2}l\varphi_{max}^2$$



a)

图 Q.3-6

在此极限位置，摆锤的速度为零（参见第二章图2.2-2），所以系统动能为零。而系统势能最大，为弹簧的变形能和重锤的重力势能之和

$$U_{max}=\frac{1}{2}Kl_1^2\varphi_{max}^2+\frac{1}{2}Wl\varphi_{max}^2$$

当重锤摆到平衡位置时，摆锤有最大角速度$\dot\varphi_{max}$因此系统有最大动能，而势能为零。系统的动能为

$$T_{max}=\frac{1}{2}I\dot\varphi_{max}^2=\frac{1}{2}\times\frac{W}{g}\times l^2\dot\varphi_{max}^2$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{W}{g}\times l^2\varphi_{max}^2\omega_n^2$$

式(3.4-3)$T_{max}=U_{max}$得

$$\frac{1}{2}\times\frac{W}{g}\times l^2\varphi_{max}^2\omega_n^2=\frac{1}{2}Kl_1^2\varphi_{max}^2+\frac{1}{2}Wl\varphi_{max}^2$$

因此，系统固有角频率为

$$\omega_n=\sqrt{\frac{g}{Wl^2}(Kl_1^2+Wl)}=\sqrt{\frac{g}{l}\left(\frac{Kl_1^2}{Wl}+1\right)}$$

Q.3-7［解］ 简支等直梁中点的刚度为

$$k_2=\frac{48EJ}{l^3}$$

简支梁与螺旋簧对梁中点处变位的作用如图Q.3-7a)所示，故系统的组合刚度为并联刚度，系统的等效刚度为

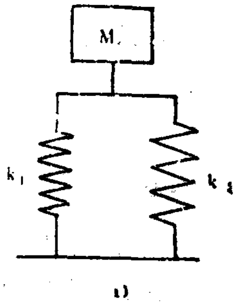


图 Q.3-7 a)

$$K=k_1+k_2=k_1+\frac{48EJ}{l^3}$$

设梁的总质量为m_{s1}，螺旋弹簧的总质量为m_{s2}，按瑞利法计算系统固有频率时，应附加梁的等效质量$\frac{17}{35}m_{s1}$及螺旋簧的等效质量$\frac{m_{s2}}{3}$，故系统的总等效质量为

$$M=\frac{W}{g}+\frac{17}{35}m_{s1}+\frac{1}{3}m_{s2}=\frac{1}{g}\left(W+\frac{17}{35}rl+\frac{1}{3}qh\right)$$

由此解得系统固有角频率及固有频率为

$$\omega_n=\sqrt{\frac{k_1+\frac{48EJ}{l^3}}{\frac{1}{g}\left(W+\frac{17}{35}rl+\frac{1}{3}qh\right)}}$$

$$f_n=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{(l^3k_1+48EJ)g}{l^3\left(W+\frac{17}{35}rl+\frac{1}{3}qh\right)}}$$

Q.3-8［解］ 设轴端扭转角振幅为φ_m，角速度为$\dot{\varphi}_m$，系统固有扭转角频率为ω_n。

1)用能量法求系统扭转固有角频率

系统的最大动能为

$$T_{max}=\frac{1}{2}I\dot{\varphi}_m^2=\frac{1}{2}I\omega_n^2\varphi_m^2$$

式中I为盘的转动惯量，$I=\frac{1}{2}mR^2$，盘的质量$m=\pi R^2h\times7.8\times10^{-3}\times g^{-1}$

$$I=\frac{1}{2}\pi\times\left(\frac{D}{2}\right)^4\times h\times\frac{7.8}{1000}\times\frac{1}{980}$$

$$=1.2209\quad \text{kgf·cm·sec}^2$$

系统最大扭转弹性势能为

$$U_{max}=\frac{1}{2}K_\varphi\varphi_m^2$$

式中扭转刚度K_φ为