志鸿优化系列丛书

丛书主编 任志鸿

YING ZAI KE TANG

赢在课堂

高中同步大纲版

◎让每一节课堂时间都成为真正的黄金时间！

◎让每一节课堂的学习目标完美实现！

◎让每一位学子都在课堂中得到发展！

数学(A)

高二下册

西苑出版社

编读飞鸿
EDITOR AND READER

贴心服务热线

质量监督热线：0533-3590076（如果您发现本书有差错，快告诉我们吧！）
图书邮购热线：0533-3590033（如果您还想购买本系列其他丛书，拨打电话吧！）
编读交流热线：0533-3590129（如果您对本书内容有疑问，请和我们交流吧！）
编读交流邮箱：（您在复习中有任何疑问，发送e-mail，专家为您一一解惑！）

学科	电子信箱	学科	电子信箱	学科	电子信箱
语文	daoxueyw@163.com	物理	daoxuewl@163.com	历史	daoxuels@163.com
数学	daoxuesx@163.com	化学	daoxuehx@163.com	地理	daoxuedl@163.com
英语	daoxueyy@163.com	生物	daoxuesw@163.com	政治	daoxuezz@163.com

您也可以通过飞鸽传书与我们交流，请寄至：北京市朝阳区裕民路12号中国国际科技会展中心A座15层　策划部　100029
欢迎登陆**志鸿优化网(www.zhyh.org)**，课程资源更丰富，网上购书更便捷！

特聘兼职编者、信息员的通知

为了充实"志鸿优化"的编者队伍，及时了解各地教考动态，现特聘优秀的图书编者和信息联络员。
招聘对象：1.各省、市、地、县各科教研员；
2.各省、市、地、县重点高中骨干教师，特、高级教师优先；
3.各省、市、地、县重点初中骨干教师，特、高级教师优先。
工作内容：图书编写；提供当地考试信息、教研信息、高考模拟试卷（九科含答案）、高考试卷等。
一经录用，将支付相应的报酬！

"志鸿优化"评奖活动 ——朋友们，参与以下任何一项活动，您就有机会得大奖，快快行动吧！

1、有奖征题活动

★如果您在平时练习中发现了眼前一亮的新题、好题；★如果您有了更好的创意，改编或原创一道新题；写上您的理由，马上推荐给我们吧！请您写明：(1)完整的试题、解析和答案，(2)试题来源；(3)推荐的理由。
活动奖项：本活动所收到的试题，一经采用，即支付每道题20～80元报酬，或请您在志鸿优化系列图书一本（任选）。
活动时间不限，长期有效。

2、互动评奖活动

我们期待成为您的朋友，我们期待与您更多地沟通与交流，我们期待给您提供更多的帮助!拿起你手中的笔，完整填写本卡，邮寄给我们吧！

姓名________学校________________班级________电话________
您是：□老师 □学生　您正在使用志鸿优化哪本书：书名________科目______年级______版本______
1. 您认为本书有哪些优点？您最喜欢本书中的哪个栏目？
____
2. 您认为本书还有哪些不足？
____
3. 您对本书有什么好的建议？
____

本活动设4个奖项：一等奖10名，奖金1000元/名；二等奖50名，奖金500元/名；三等奖200名，奖金200元/名；鼓励奖1000名，奖励志鸿优化系列图书一本（任选）。
活动时间：截止到2009年6月30日(以当地邮戳为准)，获奖名单将在10月份公布于志鸿优化网(www.zhyh.org)，敬请关注！
您可以采用邮寄或者发邮件的方式联系我们。我们将及时评选出各奖项，并公布获奖名单。
以上信息的邮寄地址：北京市朝阳区裕民路12号中国国际科技会展中心A座15层　策划部 100029
邮箱：zhyhpj2008@163.com

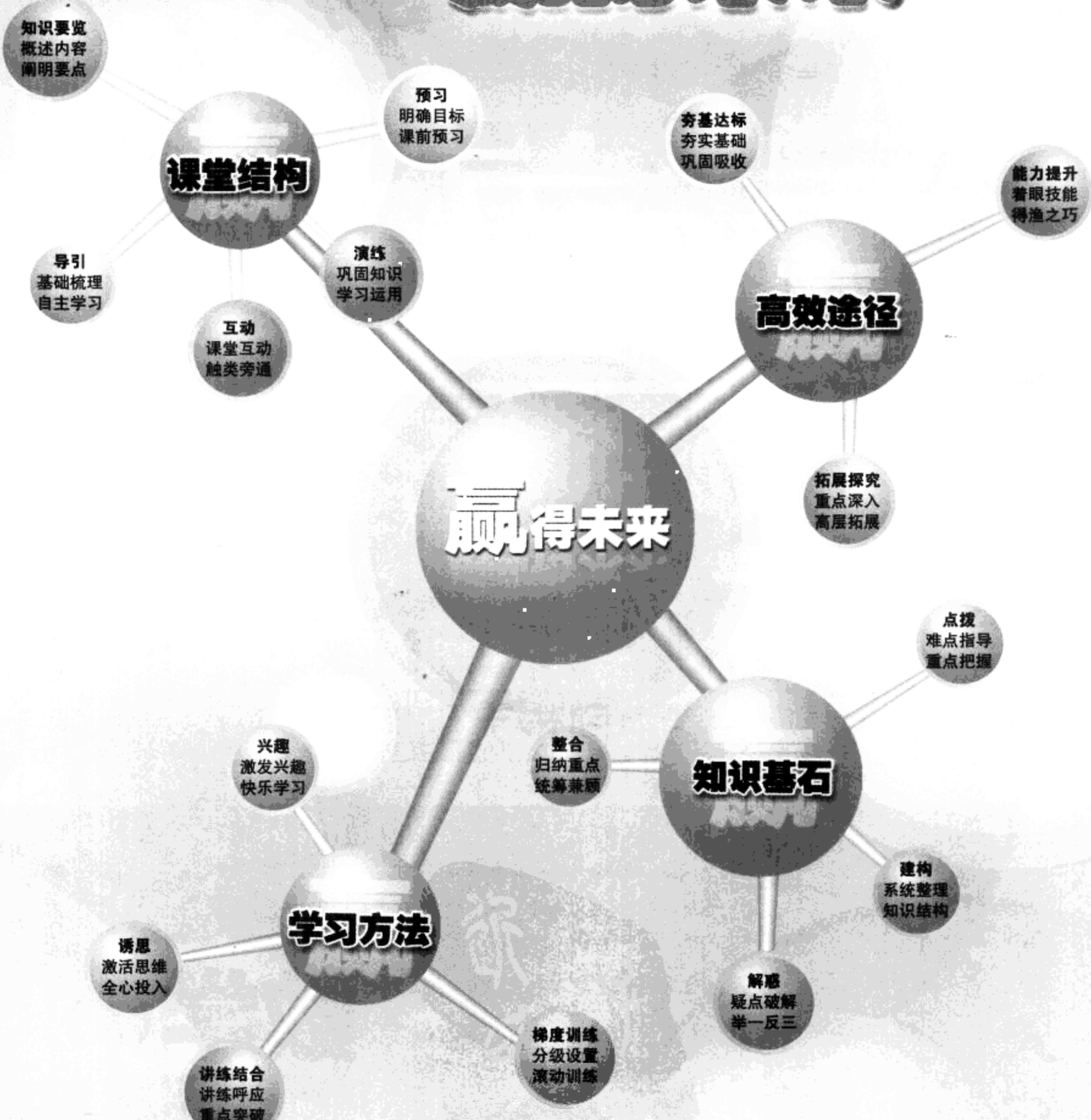
赢在课堂

栏目结构

这不是简单的物理变化，*而是深刻的化学聚变。*

赢的课堂结构+赢的学习方法+赢的知识基石+赢的高效途径

赢得未来



相信每一个人都向往着能够在一个明媚的夏日化蛹成蝶，把十年漫长的蜕变结束在一片灿烂中。我也不例外。也许我是幸运者，能够顺利地破茧而出。在走进燕园之前，我如实记下这破茧的方法——

破茧而出

（代前言）

韦薇，女，1988年出生，山东省淄博市实验中学毕业。2006年高考中以679的高分成为山东省状元，现就读于北京大学。

在谈及真正的学习方法之前，我想借用米卢的一句话：态度决定一切。尽管中国队的世界杯之旅依然令人不堪回首，但绿茵场内的汗水和绿茵场外的泪水第一次诠释了足球的含义，这是它让人神魂颠倒群情振奋的原因。同样，寒窗下的生活是暗无天日苦不堪言，还是妙趣横生引人入胜，决定者是自己的态度。我一直相信，学习中不缺少乐趣，而是缺少发现。我也一直相信，兴趣是最好的老师，所以我不断地发现学习中点滴的乐趣，并刻意地去强化这种乐趣，这使我对每一学科都抱着极大的热情。比如，我很喜欢数学测验时的充实和紧张，喜欢完成一个较难题目后通身舒畅的惬意感觉，就因此喜欢数学课；我还喜欢化学的所有内容。这也可能与一个人的世界观人生观有关，就像看到一枝玫瑰，有人赞叹花的美丽，有人却只注重花下的尖刺。每个人都应把自己培养成前者。

除了兴趣之外，方法更是重中之重。然而学习方法不能用一句话概括，也不能一天养成，各学科的方法也不尽相同。我认为悟透每一学科的“灵魂”非常重要。比如语文要求的是一个人的文学素养，这就需要大量的积累。在我下定决心高考作文写议论文之后，我看书时就很注意搜集论据，而不是走马观花敷衍了事；翻过一遍《现代汉语词典》，成语也就掌握了大概。有目的就有成功。至于数学，培养数学思想比较关键，比如：转化函数，数形结合等等。这一般是在平时做题目之后多思考总结，多与同学交流积累起来的。现在有一句话很流行：“你有一个苹果，我有一个苹果，我们相互交换，每人还是一个苹果；你有一种思想，我有一种思想，我们相互交换，每一个人都有了两种思想。”可见同学间相互交流讨论的好处。英语方面我一直注意加大词汇量，平时出现频率较高的词汇就主动掌握下来，高考时做阅读理解就游刃有余了，毕竟读懂是理解的前提。最后是理综中的三科：理、化、生，理解就显得更重要了，物理定律情景、化学反应实质、生物原理都要求理解而不只是记住。遇到不懂的问题，要及时地钻研解决，实在不行的话，再问问老师，不能因一时的懒惰而束之高阁；另外，这方面做题也要适量，重点是总结题型，掌握方法，不要深陷题海。

古人有句话流传至今："书山有路勤为径，学海无涯苦作舟。"对此，我只能同意前半句。但我所理解的"书"不是教科书的代名词，它还包括文学书、科普书等等；"勤"也不是指焚膏继晷闻鸡起舞，而是在应该学习的时候绝不懒惰。就是说上课的时候尽量控制自己的思想，及时对知识进行整理；课后，结合使用"志鸿优化"深入思考；自习前做一个简单的计划，保证一节课紧张有序，不至于忙得焦头烂额或是无所事事。再就是勤复习，我只是一个普通的人，没有过目不忘的本领，所以我也只能用最普通的记忆方法，多看文、理综教辅书，隔一定的时间再重新温习。只要在学校中做到"勤"，回家后又何必三更睡五更起啊？

至于考试，我认为心态是关键，对平时的小测验，要有气度，有道是"宠辱不惊，看庭前花开花落，去留无意，望天上云卷云舒"。考试的目的绝不是看得了多少分，排在第几名，而是为了找出学习中的不足之处。每一次拿到试卷，我所关心的是我哪道题错了，错误的原因是什么，用什么方法来补救；整理错题时也绝不仅仅是写上正确答案，而是点明做题时的障碍，并考虑其他特殊的解法。对于高考，我想说的是："宜未雨而绸缪，勿临渴而掘井。"考试之前的挑灯夜战是徒劳无益的，知识的积累、能力的培养应当贯穿在整个学习生涯中。高考之前要做的，只是树立信心，减轻压力，这样可从降低目标来实现。在平时的学习中，我把目标定在清华、北大，但在考试前，我把它修改为浙大。我对自己说无论如何，就算发挥得再差，浙大也是没有问题的，因此置身于同考场众多的严肃面孔中，我相信我的表情一定轻松而随意，这可能是我在同水平的竞争者中胜出的原因吧。

最后我想谈一谈课外书的问题。有时我发现身边不少同学随便找本书看得津津有味，甚至抛下作业不做，自习课变成阅读课。我不反对大量涉猎课外知识，但我有一个原则，先保证必须的功课。我一般是在做完一整套题后感觉累了，才看课外书，或者在晚上回家后看。书的选择也有标准，我觉得有三种书值得我们去看：一种是有思想的，像余秋雨的散文，浓郁的历史厚重感充溢其中；一种是有美感的，像《大明宫词》，无论场景还是语言都美不胜收；再一种是有知识的，像一些历史性的、科技性的书。其实这些对一个人的文风甚至于心态都是有影响的。正如古语所说："与善人居，如入芝兰之室，久而不闻其香；与恶人居，如入鲍鱼之肆，久而不闻其臭。"如果说人影响的是生活环境，书影响的则是思想环境，同样重要。

最后送大家一句话："春风得意，天下谁人不识君？任重道远，未来舍我其谁！"祝愿每个人都对自己充满信心，等待破茧而出的一刻！

YING ZAI KE TANG 赢在课堂

目录 CONTENTS

CONTENTS

活页测试卷·参考答案

第九章　直线、平面、简单几何体

本章概要

内容提要

本章是在平面几何的基础上，学习空间中点、线、面、体的位置关系和相应数量关系. 我们知道点动成线、线动成面、面动成体. 本章我们主要学习直线(或线段)、平面(或一部分)及简单几何体.

首先学习空间中的两条直线主要是异面直线的判定、所成的角和距离，然后学习直线与平面、平面与平面的位置关系，它们主要包括平行、垂直、夹角、距离问题，最后综合应用这些知识解决简单几何体——棱柱、棱锥、球中的距离问题、夹角问题、平行垂直问题. 其中直线与平面的问题是重点，也是研究和处理简单几何体的基础. 求空间两异面直线的夹角和距离是本章的难点，近几年的高考题对此的考查降低了难度.

学法建议

在学习时要注意：

(1)通过实际模型来感受和深刻领会空间中点、线、面的位置关系. 为此，可以随手拿取一些文具，如钢笔、铅笔做直线，书皮、桌面做平面，随时演示它们来培养自己的空间想象能力.

(2)平面几何是立体几何的基础，在学习立体几何时，要首先复习相关的平面几何知识，很多结论在空间中和在平面中是不一样的，要通过模型演示和空间想象进行比较和区别.

(3)空间中的问题常常通过构造三角形、平行四边形等方法转化成平面几何问题，解题时要注意多画出一些直观性强的图形，帮助你探究出解题思路.

(4)空间形式是多样的、复杂的，要利用转化的思想把其转化成简单的平面问题，或利用分类讨论的思想把问题转化为几个简单的情形逐一解决，这都是解决立体几何问题的策略.

(5)立体几何又是培养逻辑思维能力的很好的知识载体. 立体几何中的公理、定理和结论不仅要有熟练的文字语言表述，还要有严谨的符号语言的表达、直观的图形语言的展示，学习时要有意识地把这三种语言互相转化，熟练应用.

一　空间直线和平面

9.1　平面

9.1.1　平面(一)

预习导引

激趣诱思

工程测量中的平板仪在使用过程中要求稳定性较高，它的最大特点是有三根腿作支架. 凡是要求稳定性较高的桌面、照相机以及其他一些测量仪器一般都是三根腿做支架，这是为什么呢?

这就是不共线的三点确定一个平面，三根腿的支架，能使桌面固定在三点确定的平面上，从而保持稳定.

在生活中，四根腿的桌子在使用时，经常出现瘸腿现象，这就是四点不一定在同一平面上. 本节的公理体系就是平面的基本性质. 由此我们知道怎样能确定平面.

本节内容就是对平面的概念和性质的初步研究.

新知预习

1. 平面的概念及画法：①平面是只描述不定义的原始概念，具有__________；②表示方法；③画法；④能正确使用集合符号∈、∉、⊂、⊄、∩等表示点、线、面之间的关系.

2. 符号语言与数学语言的关系：

数学符号表示	数学语言表达
$A\in a$	________
______	点 A 不在直线 a 上
______	点 A 在平面 α 内
$A\notin\alpha$	________

续表

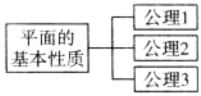
数学符号表示	数学语言表达
$a\subset\alpha$ 或 $a\subsetneqq\alpha$	______
$a\not\subset\alpha$ 或 $a\nsubseteq\alpha$	______
$a\cap b=A$	______
______	平面 α、β 相交于直线 a

3. 公理 1　如果一条直线上的______在一个平面内，那么这条直线上______都在这个平面内.

4. 公理 2　如果两个平面有______公共点，那么它们还有其他公共点，且所有这些公共点的集合是一条______.

5. 公理 3　经过______上的三点，______一个平面. 也称不共线的三点确定一个平面.

※知识结构



互动·课堂

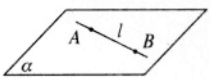
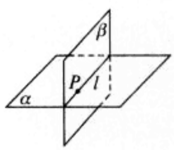
重难点拨

一、三种语言的熟练转换

数学语言是数学表述和数学思维不可缺少的重要工具，必须认真学好三种语言：文字语言、符号语言、图形语言，并能熟练地将三种语言互相转化，这对学好本章内容是十分重要的.

【例 1】分别用图形语言和符号语言表述公理 1 和公理 2，并剖析这两个公理.

解：

剖析	图形语言	符号语言
公理 1		$\left.\begin{array}{l}A\in l\\B\in l\\A\in\alpha\\B\in\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow l\subsetneqq\alpha$
公理 2		$P\in\alpha\cap\beta\Rightarrow$ $\alpha\cap\beta=l$ 且 $P\in l$

公理 1 的剖析：

公理 1 的内容反映了直线与平面的位置关系. 公理 1 的条件是"直线上两点在平面内"，结论是"直线上所有点都在平面内". 从集合的角度看，这个公理就是说，如果一条直线(点集)中有两个元素(点)属于一个平面(点集)，那么这条直线就是这个平面的真子集. 这个结论阐述两个观点，一是整条直线在平面内，二是直线上所有点在平面内，即 $l\subsetneqq\alpha$ 且 $C\in l$，则 $C\in\alpha$.

公理 1 的作用：判定直线是否在平面内.

公理 2 的剖析：

公理 2 的内容反映了平面与平面的位置关系. 公理 2 的条件简言之是"两面共一点"，结论是"两面共一线，且过这一点，线唯一". 对于本公理应强调对于不重合的两个平面，只要它们有公共点，它们就是相交的位置关系，交集是一条直线.

公理 2 的作用：判定两个平面是否相交及确定交线位置的依据.

触类旁通

1-1 用图形语言和符号语言表述公理 3，并剖析之.

1-2 用符号表示下列语句，并画出图形.

(1)三个平面 α、β、γ 相交于一点 P，且平面 α 与平面 β 交于 PA，平面 α 与平面 γ 交于 PB，平面 β 与平面 γ 交于 PC；

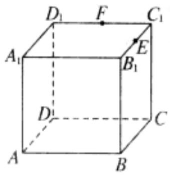
(2)平面 ABD 与平面 BDC 相交于 BD，平面 ABC 与平面 ADC 交于 AC.

点拨提示：三个公理的符号表示都是集合在立体几何中的运用，学习时应紧紧抓住集合这个工具，有意识地用集合观点解释公理．这点做得好，符号表示的问题也就迎刃而解了．

二、用公理作出几何体的截面

公理3是确定平面的条件．公理1，2是确定两平面交线和交点的条件，用此可以作出几何体与平面的截面，这为解决截面问题作出了图形的准备．

【例2】如图，正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中，E、F 分别是棱 B_1C_1、C_1D_1 的中点．分别过以下三点作出截面并指出截面的形状．



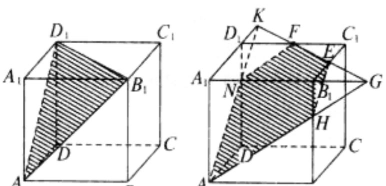
(1)过三点 A、B_1、D_1；

(2)过三点 A、E、F．

思路分析：作截面就是作出平面与各面的交线．用两点确定一条直线，易作．

解：(1)A、B_1、D_1 三点不共线，可确定一个平面，A、B_1 都在平面 ABB_1A_1 上，这两点确定一直线就是平面与正方体的交线 AB_1．同理，B_1D_1、D_1A 也都是交线．故截面形状是正三角形 AB_1D_1．

(2)延长 FE 与 A_1B_1 的延长线交于点 G，这点 G 既在正方体的上底面，又在面 ABB_1A_1 上，连结 GA 交 BB_1 于点 H，则 GA 在这个正方形内的部分 HA 就是交线，是截面的一条边，EH 是另一条边．延长 EF 交 A_1D_1 的延长线于 K，同理，直线 AK 与棱 DD_1 的交点 N，AN、FN 都是截面的边．



(1)　　(2)

这个截面是五边形 $AHEFN$．

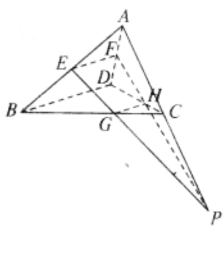
点拨提示：画几何体的截面问题，要在一个面内找出平面与几何体的两个交点，然后连结这两点，其交线就在这条直线上，从而得出截面的一条边．把截面的各边全部画出就得截面多边形．

三、平面的三个公理

【例3】已知空间四边形 $ABCD$ 中，E、F 分别是 AB、AD 的中点，G、H 分别是 BC、CD 上的点，且 $BG:GC=DH:HC=2:1$．求证：直线 EG、FH、AC 交于同一点 P．

注：四个顶点不共面的四边形叫做空间四边形．

思路分析：如右图，欲证 EG、FH、AC 三线共点，可先由 $EF\parallel GH$，$EF>GH$ 得 EG、FH 必交于一点 P．然后再由 P 是平面 ABC 和平面 ACD 的公共点，可知点必在它们的交线 AC 上，从而得三线共点．



证明：∵E、F 分别是 AB、AD 的中点，

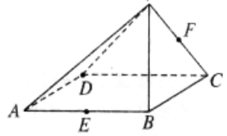
∴$EF \perp\!\!\!\!= \frac{1}{2}BD$．

又∵$\frac{BG}{GC}=\frac{DH}{HC}=2$，∴$GH \perp\!\!\!\!= \frac{1}{3}BD$．

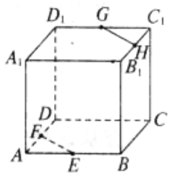
∴$EF\parallel GH$ 且 $EF>GH$．

∴四边形 $EFHG$ 是梯形，其两腰必相交．设两腰 EG、FH 相交于

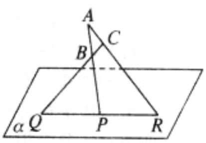
2-1 如右图，V 是四边形 $ABCD$ 所在平面外一点，E、F 分别是棱 AB、VC 的中点，过三点 D、E、F 作一截面．



2-2 已知正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中，E、F、G、H 分别是 AB、AD、D_1C_1、C_1B_1 的中点，过这四个点 E、F、G、H 能确定一个平面，作正方体被这个平面所截出的截面．



3-1 已知 $\triangle ABC$ 在平面 α 外，它的三条边所在直线分别与 α 交于 P、Q、R 三点，求证：P、Q、R 三点在同一条直线上．



一点 P.

$\because EG\subset$ 平面 ABC，$FH\subset$ 平面 ACD，

$\therefore P\in$ 平面 ABC，$P\in$ 平面 ACD.

又平面 $ABC\cap$ 平面 $ACD=AC$，

$\therefore P\in AC$.

因此直线 EG、FH、AC 相交于同一点 P.

点拨提示：证明诸线共点时，要首先证两直线确定一个交点，再证其他直线也过这个点．为此可以重点证一条直线过这点，其余同理，证明诸点共线同样可先由两点确定一直线，再证其余点在这直线上.

3-2 已知不在同一平面内的两个三角形，$\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$. 如果 $AB\cap DE=P$，$BC\cap EF=Q$，$AC\cap DF=R$，

求证：P、Q、R 三点共线.

思悟升华

1. 文字语言、符号语言、图形语言是学习立体几何的基础，要熟练地转化这三种语言，才能对问题理解的深透. 因为图形语言直观，符号语言抽象.

2. 利用三个公理可以画出平面截几何体的截面，当几何体的某个面上只一个交点时，要延长几何体的棱所在线段找出另外的点.

3. 证明诸线共点和诸点共线都是先从两个元素开始(两线一交点，或两点确定一直线)，再证明其余元素也满足.

演练 · 提升

夯基达标

1. 如果点 B 在直线 a 上，而直线 a 又在平面 β 内，则可记为 …………（　　）

A. $B\subsetneqq a\in\beta$

B. $B\in a\subsetneqq\beta$

C. $B\subsetneqq a\subsetneqq\beta$

D. $B\in a\in\beta$

2. 下列说法正确的是 …………（　　）

A. 线段 AB 在平面 α 内，直线 AB 不在 α 内

B. 平面 α 和 β 有时只有一个公共点

C. 三点确定一个平面

D. 两个平面如果有不共线的三个公共点，则两个平面就重合

3. 在空间中，下列命题不成立的是 …………（　　）

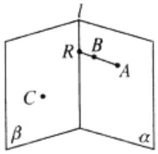
A. 两组对边都平行的四边形是平行四边形

B. 一组对边平行且相等的四边形是平行四边形

C. 两组对边分别相等的四边形是平行四边形

D. 对角线互相平分的四边形是平行四边形

4. 如图所示，平面 $\alpha\cap$ 平面 $\beta=l$，点 $A\in\alpha$，点 $B\in\alpha$，点 $C\in\beta$，点 $C\notin l$，$AB\cap l=R$. 设 A、B、C 三点确定的平面为 γ，则 $\beta\cap\gamma$ 是 …………（　　）



A. 直线 AC

B. 直线 BC

C. 直线 CR

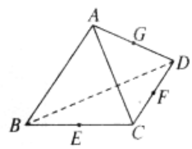
D. 以上均错

5. 一个平面将空间分成________部分，两个平面将空间分成________部分.

6. 如图，A 是 $\triangle BCD$ 所在平面外一点，E、F、G 分别是 BC、CD、DA 的中点，试作出如下的截面.

(1)过点 A、E、F；

(2)过点 E、F、G.



能力提升

7. 空间四边形 $ABCD$ 中，E、F、G、H 分别为 AB、BC、CD、DA 上的点. 已知 EF 和 HG 相交于 Q，则 EF、HG、AC 三条直线必定________.

8. 若空间三个平面相交，则交线条数为________.

9. 空间三个平面能把空间分成的部分为 …………（　　）

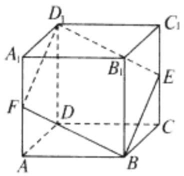
A. 4 或 6

B. 7 或 8

C. 5 或 6 或 7

D. 4 或 6 或 7 或 8

10. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E、F 分别为 CC_1 和 AA_1 的中点，画出平面 BED_1F 与平面 $ABCD$ 的交线.



11. 已知三个平面 α、β、γ 两两相交，$\alpha\cap\beta=a$，$\alpha\cap\gamma=A$. 又 $\alpha\cap\gamma=b$，$\beta\cap\gamma=c$，

求证：这三条交线 a、b、c 交于一点.

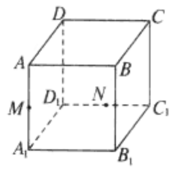
拓展探究

12. 如图，在棱长为 a 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M、N 分别是 AA_1、D_1C_1 的中点，过 D、M、N 三点的平面与正方体的下底面相交于直线 l.

(1)画出 l 的位置；

(2)设 $l\cap A_1B_1=P$，求 PB_1 的长；

(3)求 D_1 到 l 的距离.



9.1.2　平面(二)

预习 导引

激趣诱思

瓦工在房间内铺地面时，总是沿墙角拉两条相交的细绳，作为地面的基线. 从理论上讲，这就是两条相交直线确定一个平面，也就是平面的基本性质.

木工师傅在锯木头的时候，为了使锯出的截面平整，总是在方木的两个相对的面上各画出一条直线，使这两直线平行，然后用此作为"锯线". 你知道这是为什么吗？

因为两条平行线确定一个平面，锯出的面就一定是平面.

新知预习

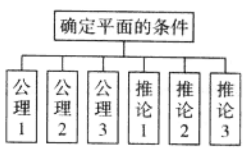
1. 推论 1　经过一条直线和__________的一点，有且只有一个平面.

它的符号表示是：________________________.

2. 推论 2　经过两条______直线，有且只有一个平面. 它的符号表示是：____________________.

3. 推论 3　经过两条______直线，有且只有一个平面，它的符号表示是：________________________.

※知识结构



互动课堂

重难点拨

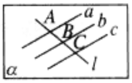
一、掌握诸线共面问题的证明方法

【例1】求证:两两平行的三条直线如果都与另一条直线相交,那么这四条直线共面.

已知:$a/\!/b/\!/c$,$l\cap a=A$,$l\cap b=B$,$l\cap c=C$.

求证:直线 a、b、c 和 l 共面.

证明:如右图.∵$a/\!/b$,



由推论3可知直线 a 与 b 确定一个平面,设为 α,

∵$l\cap a=A$,$l\cap b=B$,∴$A\in a$,$B\in b$,则 $A\in\alpha$,$B\in\alpha$.

而 $A\in l$,$B\in l$,∴由公理1可知 $l\subset\alpha$.

∵$b/\!/c$,由推论3可知直线 b 与 c 确定一个平面,设为 β,同理可知 $l\subset\beta$.

∵平面 α 和平面 β 都包含直线 b 与 l,且 $l\cap b=B$,

∴由推论2可知:经过两条相交直线,有且只有一个平面.∴平面 α 与平面 β 重合.∴直线 a、b、c 及 l 共面.

点拨提示:解决诸线共面问题的基本方法有:①先由两条直线确定出一个平面,然后再由公理1证明其余的线也在该平面内;②由一部分线确定一个平面,由另一部分线确定另一个平面,再证明这两个平面重合.

二、处理点、线、面位置关系时的逻辑分类

【例2】求证:两两相交且不共点的四条直线共面.

已知:a、b、c、d 是两两相交且不共点的四条直线,求证:a、b、c、d 共面.

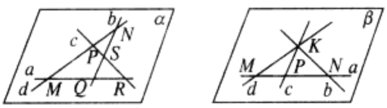
思路分析:首先应考虑两两相交且不共点的四条直线有几种情况.四线不共点分①没有三线共点,②有三条线共点两种情况.

证明:①无三线共点情况,如图甲,设 $a\cap d=M$,$b\cap d=N$,$c\cap d=P$,$a\cap b=Q$,$a\cap c=R$,$b\cap c=S$.

∵$a\cap d=M$,∴a、d 可确定一个平面 α.

∵$N\in d$,$Q\in a$,∴$N\in\alpha$,$Q\in\alpha$.∴$NQ\subset\alpha$,即 $b\subset\alpha$.

同理,$c\subset\alpha$.∴a、b、c、d 共面.



甲　　　　乙

②有三线共点的情况,如图乙,设 b、c、d 三线相交于点 K,与 a 分别交于 N、P、M 且 $K\notin a$,

∵$K\notin a$,∴K 和 a 确定一个平面,设为 β.

∵$N\in a$,$a\subset\beta$,∴$N\in\beta$.

∴$NK\subset\beta$,即 $b\subset\beta$.

同理,$c\subset\beta$,$d\subset\beta$,∴a、b、c、d 共面.

由①②可知 a、b、c、d 共面.

点拨提示:当证明的结论有几种情形时,必须对各种情形分别证明,这才是证明的严谨性.证明时对相同的根据可用同理简化.

触类旁通

1-1 求证:不过同一点且两两相交的三条直线必在同一平面内.

1-2 无三线共点的 n 条直线两两相交,求证:这 n 条直线共面.

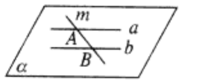
2-1 同时过空间四点可以作几个平面?

2-2 三个平面两两相交,有三条交线,求证:这三条交线交于一点或互相平行.

三、唯一性命题的证明

【例3】已知直线 m 与直线 a、直线 b 分别交于 A、B 且 $a\parallel b$.

求证：过 a、b、m 有且只有一个平面.



证明：存在性. 如右图，$\because a\parallel b$，由推论3得，

过 a、b 有一个平面 α.

又 $m\cap a=A$，$m\cap b=B$，

$\therefore A\in a$，$B\in b$. $\therefore A\in\alpha$，$B\in\alpha$.

又 $A\in m$，$B\in m$，$\therefore m\subset\alpha$，即过 a、b、m 有一个平面 α.

唯一性（反证法）.

假设过 a、b、m 还有一个平面 β 异于 α，

则 $a\subset\alpha$，$b\subset\alpha$，$a\subset\beta$，$b\subset\beta$.

这与 $a\parallel b$，过 a、b 有且只有一个平面相矛盾.

因此，过 a、b、m 有且只有一个平面.

唯一性的另一种证法（同一法）.

假设过 a、b、m 还有一个平面 β，则 $a\subset\beta$，$b\subset\beta$，而 $a\parallel b$. 根据推论3：过 a、b 有且仅有一个平面，$\therefore\alpha$ 与 β 重合.

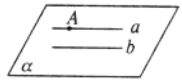
点拨提示：(1)证明过三线有且只有一个平面(即确定平面)与证明三线共面是有差异的，前者不仅需证明存在性，还需证明唯一性；而后者则只需证明平面存在即可.

(2)证明唯一性，常常使用反证法、同一法.

3-1 求证：过直线 l 外一点 A 有且只有一条直线与 l 平行.

3-2 证明推论3：

过两条平行线有且只有一个平面.



已知：$a\parallel b$.

求证：经过 a、b 有且只有一个平面 α.

思悟升华

1. 证明诸线共面要先用两条直线确定出平面，然后一一证明其余的直线都在平面内.
2. 结果分几种情形的要分类讨论，结合图形一一讨论，这样解题才严谨完整.
3. 唯一性的命题要用反证法或同一法，同一法可以变通写法成反证法.

演练·提升

夯基达标

1. 空间四点 A、B、C、D 唯一确定一个平面，那么这四点中……（　　）

A. 必定只有三点共线

B. 必有三点不共线

C. 至少有三点共线

D. 不可能有三点共线

2. 三条直线相交于一点，可以确定……（　　）

A. 1个平面

B. 3个平面

C. 6个平面

D. 1个或3个平面

3. (2008甘肃张掖高二期末)下列命题中正确的个数是……（　　）

①三角形是平面图形　②四边形是平面图形　③四边相等的四边形是平面图形　④矩形一定是平面图形

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

4. 四条线段顺次首尾相连，它们最多可确定平面的个数为……（　　）

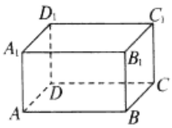
A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

5. 经过一条直线和一点有________个平面.

6. 一条直线和这条直线外的不在同一直线上的三点所确定的平面个数为多少？

能力提升

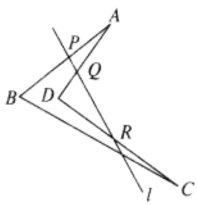
7. 长方体两个面的公共边叫棱，已知图中 AA_1 是长方体的一条棱，在这个长方体中与 AA_1 共面的棱共有__________条.



8. 四边形 $ABCD$ 中，$AB=BC=CD=DA=BD=1$，则成为空间四边形时，AC 的取值范围是________.

9. 求证：空间四边形各中点的连线共面.

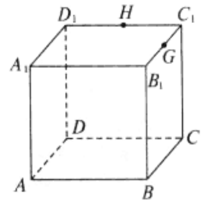
10. 如右图，已知直线 l 与四边形 $ABCD$ 的三边分别交于点 P、Q、R. 求证：$ABCD$ 为平面四边形.



11. 已知空间五个点 A、B、C、D、E，其中任意三点不共线，且 A、B、C、D 四点共面，B、C、D、E 四点共面. 求证：A、B、C、D、E 五点共面.

拓展探究

12. 在正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中，G、H 分别是 B_1C_1、C_1D_1 的中点. 画出平面 ACD_1 与平面 BDC_1 的交线，并说明理由.



9.2 空间直线

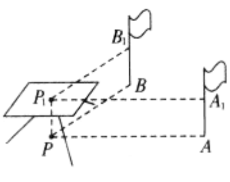
9.2.1 空间直线(一)

预习 · 导引

激趣诱思

在实际测量中，观察某点对另外两点的张角大小时，测量的仪器常常不需要放在这点上. 如用平板仪测量点 P 对 A、B 两旗杆的张角，如图所示，测出的 $\angle A_1P_1B_1=\angle APB$. 这就是本节在公理 4 的基础上推出的等角定理，该定理是空间中论证角相等的依据.

图中直线 P_1B_1 与 PA 既不平行又不相交，是空间中两直线的一种重要位置关系，叫异面直线，我们学习与生活的空间中有很多直线是异面直线的关系，你能找出几对吗？



新知预习

1. 平行于同一条直线的两条直线__________，此结论又叫做空间平行线的__________，即公理 4.

2. 如果一个角的两边和另一个角的两边____________并且____________，那么这两个角相等，此结论称作__________.

3. 如果一个角的两边与另一个角的两边分别平行，那么这两个角__________.

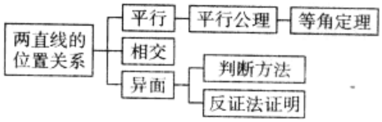
4. 空间两条直线的位置关系：(1)______；(2)______；(3)______.

其中不同在__________________的两条直线叫异面直线.

5. 异面直线的判定定理：连结________一点与________一点的直线，和这个平面内________的直线是异面直线.

6. 证明两条直线是异面直线，通常用________、________、________.

※知识结构



互动·课堂

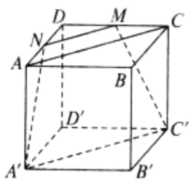
重难点拨

一、平行公理的应用

【例1】已知棱长为 a 的正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，M、N 分别为 CD、AD 的中点.

求证：四边形 $MNA'C'$ 是梯形.

思路分析：要证明梯形，需要证明它有一对边平行，且不相等（或另一对边不平行）. 由图已知 $A'N$ 与 $C'M$ 不可能平行，需证 $MN \parallel A'C'$，由中点联想到中位线，此题可证.



证明：如图，连结 AC.

∵M、N 分别为 CD、AD 的中点，

∴$MN \underline{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}AC$.

由正方体性质知 $AC \underline{\underline{\parallel}} A'C'$，

∴$MN \underline{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}A'C'$.

∴四边形 $MNA'C'$ 是梯形.

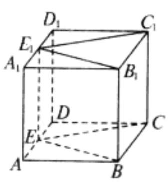
点拨提示：(1)要证梯形，可以证明有两边平行且不等. 平行的证明要联想平面几何知识及公理4. 这里公理4是证明空间两条直线平行的重要理论依据.

(2)解题时关键在于将空间问题平面化，要联系平面几何知识来解决空间问题.

二、等角定理的应用

【例2】如图，已知 E、E_1 是正方体 AC_1 的棱 AD、A_1D_1 的中点.

求证：$\angle C_1E_1B_1=\angle CEB$.



证明：连结 EE_1.

∵E_1、E 分别为 A_1D_1、AD 的中点，

∴$A_1E_1 \underline{\underline{\parallel}} AE$.

∴四边形 A_1E_1EA 为平行四边形. ∴$A_1A \underline{\underline{\parallel}} E_1E$.

又∵$A_1A \underline{\underline{\parallel}} B_1B$，∴$E_1E \underline{\underline{\parallel}} B_1B$.

∴四边形 E_1EBB_1 是平行四边形. ∴$E_1B_1 \parallel EB$.

同理，$E_1C_1 \parallel EC$.

又 $\angle C_1E_1B_1$ 与 $\angle CEB$ 对应边方向相同，

∴$\angle C_1E_1B_1=\angle CEB$.

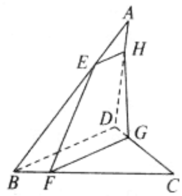
点拨提示：证明角的相等问题，等角定理及推论是较常用的方法. 另外通过证明三角形的相似或全等也可. 如该例可通过证 $\triangle B_1C_1E_1 \cong \triangle BCE$ 说明角的相等.

等角定理中对应边的方向相同很重要，如果方向一对相同，另一对不同，则角互补.

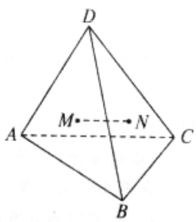
触类旁通

1-1 已知空间四边形 $ABCD$ 中，E、F、G、H 分别是 AB、BC、CD、DA 上的点，且满足 $\frac{AE}{EB}=\frac{AH}{HD}=\frac{1}{2}$，$\frac{CF}{FB}=\frac{CG}{GD}=2$.

求证：四边形 $EFGH$ 是梯形.

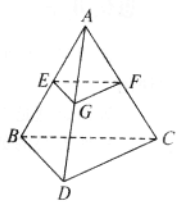


1-2 已知 AC 的长为定值，$D \notin$ 平面 ABC，点 M、N 分别是 $\triangle DAB$ 和 $\triangle DBC$ 的重心，问：若变换 B、D 的位置，线段 MN 的长是否为定值？若为定值，请给予证明；若不为定值，请说明理由.



2-1 如图，立体图形 $A-BCD$ 的四个面分别为 $\triangle ABC$、$\triangle ACD$、$\triangle ADB$ 和 $\triangle BCD$，E、F、G 分别是线段 AB、AC、AD 上的点，且满足 $AE:AB=AF:AC=AG:AD$.

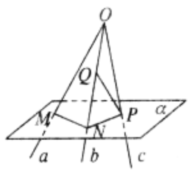
求证：$\triangle EFG \backsim \triangle BCD$.



2-2 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E、F、G 分别是棱 A_1B_1、B_1C_1、C_1C 的中点. 求证：$\angle EFG=120°$.

三、异面直线的证明与判定

【例3】如图，a、b、c 为不共面的三条直线，且相交于一点 O，点 M、N、P 分别在直线 a、b、c 上，点 Q 是 b 上异于 N 的点，判断 MN 与 PQ 的位置关系，并予以证明.



证法一：(反证法)

假设 MN 与 PQ 共面于 β，则点 M、N、P、$Q\in\beta$.

又点 $\left.\begin{array}{l}N、Q\in b\Rightarrow b\subset\beta\\ \quad O\in b\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}O\in\beta\\ P\in\beta\end{array}\right\}\Rightarrow c\subset\beta.$

同理，$a\subset\beta$.

$\therefore a$、b、c 共面，与已知 a、b、c 不共面矛盾，故 MN 与 PQ 为异面直线.

证法二：判定两直线为异面直线的方法是教材中的例3，用此法可证明如下：

如图，三点 M、N、Q 不共线，但共面于平面 MON，点 $Q\in$ 平面 MON.

又 a、b、c 三直线不共面且只有一个公共点 O，

$\therefore$ 点 $P\notin$ 平面 MON.

故平面 MON 内一点 Q 与平面外一点 P 的连线 PQ 与平面内不过 Q 点的直线 MN 是异面直线.

点拨提示：证明空间两直线的位置关系，反证法是常用的一种方法. 在用反证法解题时要注意"否定结论要彻底""制造的矛盾要鲜明"，教材中的例3可以作异面直线的判定使用.

3-1 若 a 和 b 是异面直线，b 和 c 是异面直线，则 ……………………………… (　　)

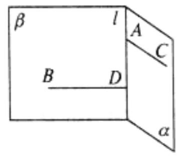
A. $a/\!/c$

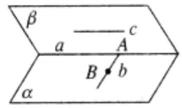
B. a 和 c 是异面直线

C. a 和 c 相交

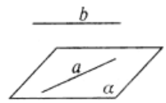
D. a 和 c 或平行或相交或异面

3-2 常常借助辅助平面画异面直线，下图是画异面直线的三种常用方法，请对第一种画法证明 BD 与 AC 是异面直线.





$c/\!/a,c\subset\beta$



b 与 α 无公共点，$a\subset\alpha$，$a\not\parallel b$

如图，已知平面 $\alpha\cap\beta=l$，$A\in l$，$D\in l$，$AC\subset\alpha$，$DB\subset\beta$，

求证：AC 和 BD 是异面直线.

思悟升华

1. 证明空间中的平行线可用公理4，就是说，平行线的传递性在空间也是成立的，证明四边形是梯形、平行四边形时经常使用.

2. 等角定理是由平行公理得出的，注意其推论的结果是相等与互补，用它可以证明三角形的相似、全等.

3. 异面直线的证明常用反证法，判定时可用一些结论，也可结合图形观察.

演练 提升

夯基达标

1. 下列命题中，结论正确的个数是 ………………… (　　)

①如果一个角的两边与另一个角的两边分别平行，那么这两个角相等　②如果两条相交直线和另两条相交直线分别平行，那么这两组直线所成的锐角或直角相等　③在平面内，如果一个角的两边和另一个角的两边分别垂直，那么这两个角相等或互补　④如果两条直线同平行于第三条直线，那么这两条直线互相平行

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

2. 若空间四边形的对角线相等，则以它的四条边的中点为顶点的四边形是 ……………………………… (　　)

A. 空间四边形　　B. 菱形

C. 正方形　　D. 梯形

3. 有两个三角形不在同一平面内，它们的边两两对应平行，那么这两个三角形 ……………………………… (　　)

A. 全等

B. 相似

C. 有一个角相等

D. 无法判断