国家示范性高等职业院校教材

（电气、电子类）

高等数学（上）

Advanced Mathematics

刘铁锁 编

西北工業大學出版社

国家示范性高等职业院校教材

高等数学

（电气、电子类）

上　册

刘铁锁　编
蒋大为　主审

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书是根据教育部制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》编写的.

本书分上、下两册.上册主要内容为函数、极限与连续,导数与微分,导数的应用,不定积分,定积分,定积分及其应用;下册主要内容为微分方程、空间解析几何、线性代数、级数等.每章后配有知识拓展内容,供学生课外阅读和自学,书末附有积分表和参考答案,便于教学.

本书既可作为高职高专电气、电子类各专业高等数学课程的通用教材,也可供工程技术人员和数学爱好者参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学:电气、电子类/刘铁锁编.—西安:西北工业大学出版社,2009.8
ISBN 978-7-5612-2633-9

Ⅰ.高… Ⅱ.刘… Ⅲ.高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 153658 号

出版发行:西北工业大学出版社
通信地址:西安市友谊西路 127 号　　邮编:710072
电　　话:(029)88493844　　88491757
网　　址:www.nwpup.com
印 刷 者:陕西向阳印务有限公司
开　　本:727 mm×960 mm　1/16
印　　张:26
字　　数:440 千字
版　　次:2009 年 8 月第 1 版　　2009 年 8 月第 1 次印刷
定　　价:44.00 元(本册:22.00 元)

前　言

本书是根据教育部制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，结合国家示范性高等职业院校教学实际情况编写的.为了体现高职教育特点，在注重数学自身的系统性、逻辑性的基础上，强化以应用为目的，以必需、够用为原则；在分析讲清必要的理论的基础上，不追求复杂的推理、论证和烦琐的计算；内容力求简明扼要，削枝强干，文字要求简明，在不影响数学知识体系的前提下，适当降低理论要求.在编写过程中，注意吸取了许多比较成熟的教改经验，力求新意.选例恰当、典型，习题难易程度适中，并紧密联系本专业实际问题、每章后配备了标准化复习题，便于学生课后习作、本书编有“拓展知识”部分内容，可供学生根据各自的实际情况以备自学.相信本书的出版，能对高职院校电气、电子类各专业的高等数学教学与学习有所裨益.

数学作为一门工具学科，应该更好地为高职院校各专业服务.基于这样的考虑，我们在下册中增加了相当量的与专业知识相关的例题、练习题，介绍了高等数学在一些电气、电子问题上的应用，以提高学生用数学知识来解决专业中的实际问题的能力.激发学生学习数学的兴趣，使本书在数学理论和实际应用相结合方面具有显著的特点，实践性和先进性都有较好的体现.

本书由西安航空职业技术学院基础部李金楼主任策划；由数学教研室谢歆鑫主任安排实施；由数学教研室刘铁锁负责全书内容的编写；由西北工业大学应用教学系蒋大为教授担任主审.

由于编者水平有限，书中不足之处难免，敬请读者批评指正，以便修订时改进.

编　者

2009 年 6 月

目　录

第1章　函数、极限与连续

函数是数学中的一个重要概念，也是微积分研究的主要对象，而极限则是微积分的理论基础和基本工具.本章将在分析初等函数结构的基础上，建立函数极限的概念并学习极限的运算，然后讨论函数的连续性.

1.1　初等函数

1.1.1　函数概念

1. 函数的定义

定义　设有两个变量 x 和 y，变量 x 的变化范围为集合 D. 如果对于每个数 $x \in D$，按照某种对应法则，变量 y 总有确定的值与之对应，则称变量 y 是 x 的函数，记为

$$y = f(x)$$

其中，x 叫自变量，y 叫因变量，x 的变化范围 D 叫做函数的定义域. 当 x 取遍 D 中所有数值时，与之对应的函数值的集合 M 叫做函数的值域.

在函数的定义中，如果对于定义域 D 中的每一个 x，有唯一确定的 y 值与之对应，那么这种函数称为单值函数，否则称为多值函数.

例如，圆心在原点，半径为 r 的圆的方程为

$$x^2 + y^2 = r^2$$

方程在闭区间 $[-r, r]$ 上确定一个以 x 为自变量，y 为因变量的函数. 当 $x = r$ 或 $x = -r$ 时，y 所对应的函数值只有一个. 但当 x 取开区间 $(-r, r)$ 内任一数值时，对应的 y 值有两个，所以该函数为多值函数.

以后，凡是没有特别说明，函数都是指单值函数.

从函数的定义可知，函数的定义域和对应法则确定了，函数也就随之确定，因此定义域和对应法则是确定函数的两大要素. 只要定义域和对应法则相同，不管自变量与因变量用什么字母表示，都认为是相同的函数. 例如 $S = \pi r^2$，$u = \pi a^2$ 与 $y = \pi x^2$ 都是相同的函数.

函数的对应法则，只强调了由 x 到 y 的对应，并没有要求 y 是否随 x 的变

化而变化.

例如，$y=C$（C 为常数）是满足函数定义的，它表示 x 取任何值时，y 都有确定的值 C 和它对应.

2. 函数的表示法

表示函数的方法，常用的有公式法、表格法和图形法三种. 本书所讨论的函数大多数用公式法表示.

值得注意的是有些函数在整个定义域内不能用一个公式来表示，而是在各个小区间上分别用不同的公式来表示，这种函数叫分段函数.

例 1 函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

叫做符号函数.

该函数就是一个分段函数，它的定义域是$(-\infty,+\infty)$，值域是$\{-1,0,1\}$，它的图形如图 1.1 所示。

应该注意，分段函数不论分多少段，它总表示一个函数.

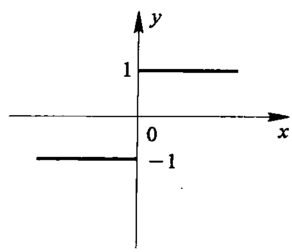


图 1.1

3. 函数与函数值的记号

当 y 是 x 的函数时，记为 $y=f(x)$，f 表示 y 和 x 的对应法则. 如果在同一问题中涉及几个函数，就需要用几个不同的函数记号来表示，例如，$y=F(x)$，$y=g(x)$，$y=\varphi(x)$ 等.

当自变量 x 在其定义域内取某一定值 x_0 时，对应的函数值记为

$$f(x_0) \quad 或 \quad y\big|_{x=x_0}$$

例 2 设 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$，求 $f(1)$，$f(0)$，$f(-x)$，$f(x^2)$，$f^2(x-1)$.

解

$$f(1)=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2},\quad f(0)=\frac{1}{1+0}=1$$

$$f(-x)=\frac{1}{1+(-x)}=\frac{1}{1-x},\quad f(x^2)=\frac{1}{1+x^2}$$

$$f^2(x-1)=\left[\frac{1}{1+(x-1)}\right]^2=\left(\frac{1}{x}\right)^2=\frac{1}{x^2}$$

例 3　设函数

$$f(x)=\begin{cases}x, & -4\leqslant x<0\\ 2, & 0\leqslant x<2\\ 4-x, & 2\leqslant x\leqslant 4\end{cases}$$

作出这个函数图形，并求 $f(-2),f(0),f(1),f(3.5)$.

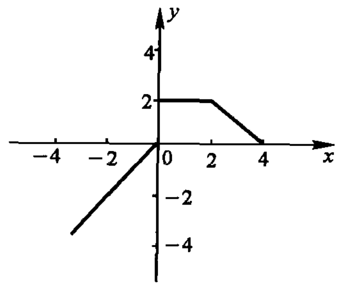


图　1.2

解　函数 $f(x)$ 的图形如图 1.2 所示. 因为 $-4<-2<0$，所以由公式 $f(x)=x$ 得

$$f(-2)=-2$$

同理 $0\leqslant 0<2,\quad 0<1<2,\quad 2<3.5<4$，所以由公式 $f(x)=2$ 可得 $f(0)=2$，由公式 $f(x)=2$ 可得 $f(1)=2$，由公式 $f(x)=4-x$ 可得 $f(3.5)=0.5$.

由例 3 看出，求分段函数值时，必须把自变量的值代入相应的公式中去计算.

4. 函数的定义域

在实际问题中，函数的定义域是根据所考虑的实际问题是否有意义来确定的. 对于用数学公式表示的一般函数，它的定义域就是使这个数学式有意义的自变量取值的全体.

例 4　求下列函数定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{x}\lg(x+1)$；　　(2) $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}+\sqrt{x-2}$；

(3) $y=\sqrt{\tan x}+\lg(3-x^2)$.

解　(1) 因为 $x\neq 0$ 且 $x+1>0$，所以 $x\neq 0$ 且 $x>-1$. 则函数的定义域为 $(-1,0)\cup(0,+\infty)$.

(2) 因为 $\left|\dfrac{x-1}{2}\right|\leqslant 1$ 且 $x-2\geqslant 0$，所以 $-1\leqslant x\leqslant 3$ 且 $x\geqslant 2$，即 $2\leqslant x\leqslant 3$，则函数定义域为 $[2,3]$.

(3) 因为 $\tan x\geqslant 0$ 且 $3-x^2>0$，所以

$$k\pi\leqslant x<k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})\quad 且\quad -\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$$

即 $-\sqrt{3}<x<-\dfrac{\pi}{2}$ 或 $0\leqslant x<\dfrac{\pi}{2}$，因此函数定义域为 $\left(-\sqrt{3},-\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

例 5　在一个边长为 a 的正方形铁板的四角上各去掉一个边长为 x 的小

正方形(见图 1.3),然后把四边折起就可以做一个无盖的水箱,试把水箱容积表示成 x 的函数,并求函数定义域.

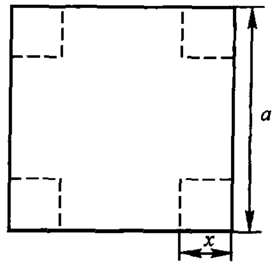


图 1.3

解 设水箱的容积为 y,由题意知水箱的底边为 $a-2x$,高为 x,则容积为

$$y=x(a-2x)^2$$

这就是水箱容积 y 与去掉小正方形边长 x 之间的函数关系式.

其函数定义域为$\left(0,\dfrac{a}{2}\right)$.

1.1.2 基本初等函数

基本初等函数包括以下 6 类函数:

(1) 常函数 $y=C$ (C 为常数)

(2) 幂函数 $y=x^{\alpha}$ (α 为任意实数)

(3) 指数函数 $y=a^x$ (a 为常数,且 $a>0,a\neq 1$)

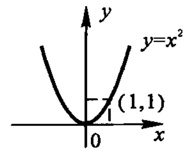
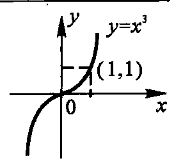
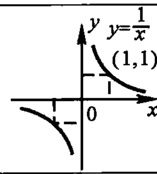
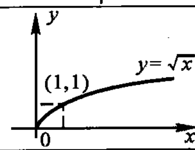
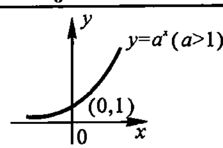
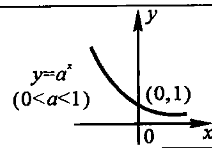
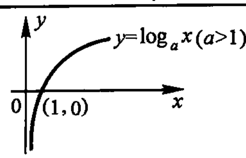
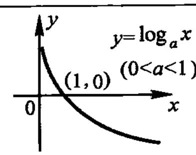
(4) 对数函数 $y=\log_a x$ (a 为常数,且 $a>0,a\neq 1$)

(5) 三角函数(6 个) 包括正弦函数 $y=\sin x$,余弦函数 $y=\cos x$,正切函数 $\tan x$,余切函数 $y=\cot x$,正割函数 $y=\sec x$,余割函数 $y=\csc x$.

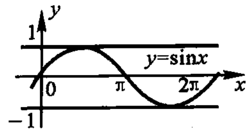
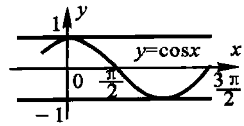
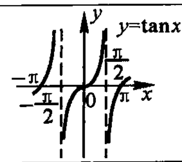
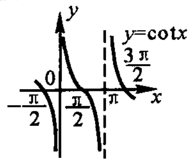
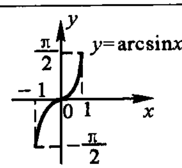
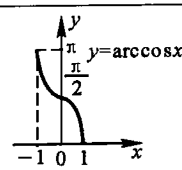
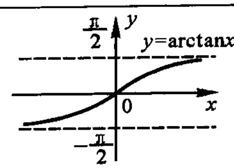
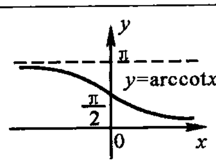
(6) 反三角函数(4 个) 包括反正弦函数 $y=\arcsin x$,反余弦函数 $y=\arccos x$,反正切函数 $y=\arctan x$,反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$.

现将基本初等函数的定义域、值域、图形、性质列入表 1.1 中,以便于读者复习和查阅.

表 1.1　基本初等函数表

函　数		定义域	值　域	简单性质	图　形
幂函数 $y=x^{a}$	$y=x^2$	**R**	$y\geqslant 0$	偶函数 $x>0$,递增 $x<0$,递减	
	$y=x^3$	**R**	**R**	奇函数 单调递增	
	$y=\dfrac{1}{x}$	$x\neq 0$	$y\neq 0$	奇函数在区间 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 分别单调递减	
	$y=\sqrt{x}$	$x\geqslant 0$	$y\geqslant 0$	非奇非偶 单调递增	
指数函数 $y=a^x$ $(a>0,a\neq 1)$	$a>1$	**R**	$\mathbf{R}^+$	单调递增过(0,1)	
	$0<a<1$	**R**	$\mathbf{R}^+$	单调递减过(0,1)	
对数函数 $y=\log_a x$ $(a>0,a\neq 1)$	$a>1$	$\mathbf{R}^+$	**R**	单调递增过(1,0)	
	$0<a<1$	$\mathbf{R}^+$	**R**	单调递减过(1,0)	

续表

<table>
<tr><th colspan="2">函　数</th><th>定义域</th><th>值　域</th><th>简单性质</th><th>图　形</th></tr>
<tr><td rowspan="4">三角函数</td><td>$y=\sin x$</td><td>$\mathbf{R}$</td><td>$[-1,1]$</td><td>奇函数有界
周期 2π</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$y=\cos x$</td><td>$\mathbf{R}$</td><td>$[-1,1]$</td><td>偶函数有界
周期 2π</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$y=\tan x$</td><td>$x\in\mathbf{R}$ 且
$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$
$(k\in\mathbf{Z})$</td><td>$\mathbf{R}$</td><td>奇函数
周期 π</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$y=\cot x$</td><td>$x\in\mathbf{R}$ 且
$x\neq k\pi$
$(k\in\mathbf{Z})$</td><td>$\mathbf{R}$</td><td>奇函数
周期 π</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="4">反三角
函数</td><td>$y=\arcsin x$</td><td>$[-1,1]$</td><td>$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$</td><td>奇函数
单调递增有界</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$y=\arccos x$</td><td>$[-1,1]$</td><td>$[0,\pi]$</td><td>单调递减有界</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$y=\arctan x$</td><td>$\mathbf{R}$</td><td>$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$</td><td>奇函数
单调递增有界</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$y=\operatorname{arccot} x$</td><td>$\mathbf{R}$</td><td>$(0,\pi)$</td><td>单调递减有界</td><td>
</td></tr>
</table>

1.1.3　复合函数　初等函数

先看一个例子，设 $y=\sin u$，即 y 是 u 的函数；$u=2x$，即 u 又是 x 的函数．把 $u=2x$ 代入 $y=\sin u$ 中，得 $y=\sin 2x$，这时 y 就变为 x 的函数，把这个函数叫做由 $y=\sin u$ 与 $u=2x$ 复合而成的复合函数．

定义 1　如果 y 是 u 的函数，即 $y=f(u)$；而 u 又是 x 的函数，即 $u=\varphi(x)$，当 x 在 $\varphi(x)$ 的定义域内取值时，$\varphi(x)$ 的函数值的全部或部分在 $f(u)$ 的定义域内，则 y 通过 u 的联系也是 x 的函数．记为

$$y=f[\varphi(x)]$$

这个函数叫做由函数 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 复合而成的函数，称为复合函数，它的定义域是使 $u=\varphi(x)$ 的函数值落在 $y=f(u)$ 的定义域之内所对应的 x 取值的全体，其中 u 称做中间变量．

今后所遇到的函数大多数为复合函数，因此必须熟练掌握分析复合函数复合过程的方法．

例 6　指出下列函数的复合过程：

(1) $y=(1+x^3)$；　　(2) $y=a^{\tan x}$；　　(3) $y=\sqrt{\ln\sin^2 x}$.

解　(1) 函数 $y=(1+x)^3$ 是由 $y=u^3$ 和 $u=1+x$ 复合而成的．

(2) 函数 $y=a^{\tan x}$ 是由 $y=a^u$ 和 $u=\tan x$ 复合而成的．

(3) 函数 $y=\sqrt{\ln\sin^2 x}$ 是由 $y=\sqrt{u}$，$u=\ln v$，$v=w^2$ 和 $w=\sin x$ 复合而成的．

分析复合过程时，每一步对应的函数必须是基本初等函数或者是基本初等函数与常数的四则运算．

另外，需要说明的是，复合函数不仅可以由两个函数，也可以由更多的函数复合而成．

注意，并不是所有的两个函数都能复合，当 $u=\varphi(x)$ 的值域不能落在 $y=f(u)$ 的定义域之内时，$y=f[\varphi(x)]$ 就没有意义，这时 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 就不能复合，例如，$y=\sqrt{u}$ 与 $u=\sin^2 x-2$ 就不能复合．

定义 2　由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合过程构成并能用一个解析式表示的函数叫做初等函数．

我们以前学过的函数，除了不能用一个解析式表示的分段函数以外全是初等函数．

例如，$y=\sqrt{1-x^2}$，$y=\ln(x+\sin x)$ 等都是初等函数，而函数 $f(x)=$

$\begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ x^2, & x < 0 \end{cases}$ 就不是初等函数.

习题 1.1

1. 求下列函数定义域：

(1) $y=\sqrt{9-x^2}$；　(2) $y=\sqrt{x^2-3}+\arcsin\dfrac{1}{x}$；

(3) $y=\dfrac{1}{\lg(3-x)}$；　(4) $y=\dfrac{\sqrt{x}}{\sin\pi x}$.

2. 作函数图形

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & |x|\leqslant 1 \\ 2-x, & |x|>1 \end{cases}$$

并求 $f(-1)$，$f(0)$，$f(2)$.

3. 指出下列函数的复合过程：

(1) $y=(1+x+x^2)^3$；　(2) $y=a^{\sin 2x}$；

(3) $y=\arctan\sqrt{1+x^2}$；　(4) $y=\sqrt{\ln\tan\dfrac{2}{x}}$；

(5) $y=\mathrm{e}^{\cos(\ln x^2)}$；　(6) $y=\operatorname{arccot}\dfrac{x+1}{3}$.

4. 旗杆高 2 m，旗杆距路灯杆的水平距离为 x，路灯距地面距离 8 m，试把旗杆的影长 s 表示成 x 的函数.

1.2　极限的概念

1.2.1　数列的极限

例 1　考察下列几个数列：

(1) $\{x_n\}=\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$，即数列 $1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\cdots,\dfrac{1}{n},\cdots$

(2) $\{x_n\}=\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$，即数列 $\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3},\cdots,\dfrac{n}{n+1},\cdots$

(3) $\{x_n\}=\{(-1)^{n-1}\}$，即数列 $1,(-1),\cdots,(-1)^{n-1},\cdots$

(4) $\{x_n\}=\{n^2+3\}$，即数列 $4,7,\cdots,n^2+3,\cdots$

从以上数列可以发现，随着 n 的无限增大，各数列的通项 x_n 的变化趋势

可以分为两种情况:第一种情况,当 n 无限增大时,通项 $\{x_n\}$ 无限地接近于某一个常数,例如,在(1) 中,随着 n 的无限增大,通项 $x_n=\frac{1}{n}$ 无限趋近于零,在(2) 中,随着 n 的无限增大,通项 $x_n=\frac{n}{n+1}$ 无限趋近于 1;另一种情况是,当 n 无限增大时,通项 x_n 不趋近于任意常数,例如在(3) 中,通项 $x_n=(-1)^{n-1}$ 总在(−1) 和 1 之间振动,在(4) 中,随着 n 的增大,其通项 $x_n=n^2+3$ 无限增大,它们都不趋近于任意常数.

为了从数学上描述上述(1) 和(2) 两个数列所具有的共同性质,现在给出数列极限的概念.

定义 1　给定数列 $\{x_n\}$,如果当 n 无限增大时,其通项 x_n 无限地趋近于某一个常数 A,则称数列 $\{x_n\}$ 以 A 为极限,记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A$$

或

$$x_n\to A\quad(n\to\infty)$$

当数列 $\{x_n\}$ 以 A 为极限时,称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A,此时称数列 $\{x_n\}$ 为收敛数列. 如果数列不趋近于任意常数,也就是没有极限,则称数列 $\{x_n\}$ 是发散的.

由此可见,并不是所有数列都有极限,求数列极限时,对于一些简单情况,可以通过观察得出数列极限,如例 1 中的(1),(2);有些稍为复杂的情况,可对数列的通项进行恒等变形加以简化,然后再观察它的极限.

例 2　设有数列 $x_n=1+q+q^2+\cdots+q^n$(其中,q 为常数,满足 $|q|<1$),求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解　已知 $x_n=1+q+q^2+\cdots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$,由于 $|q|<1$,根据指数函数性质可知,当 n 无限增加时,q^{n+1} 无限趋近于零,所以 $\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ 无限趋近于 $\frac{1}{1-q}$,因此,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{1-q}$.

1.2.2　函数极限

对于函数极限,根据自变量的变化过程,分两种情况讨论.

1. 当 $x\to\infty$ 时,函数 $f(x)$ 的极限

对于函数来说,$x\to\infty$ 可包含以下两种情况:

(1)x 取正值无限增大,记为 $x\to+\infty$;

(2)x 取负值无限增大，记为 $x \to -\infty$.

反过来，如果 $x \to +\infty$ 和 $x \to -\infty$ 两种情况都存在，则可以合并写为 $x \to \infty$.

讨论函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 当 $x \to \infty$ 时的变化趋势（见图1.4），由图可知，当 $x \to +\infty$ 和 $x \to -\infty$（即 x 的绝对值无限增加）时，$y=\dfrac{1}{x}$ 的图形越来越和 x 轴靠近，即 $\dfrac{1}{x}$ 的值越来越趋近于零.

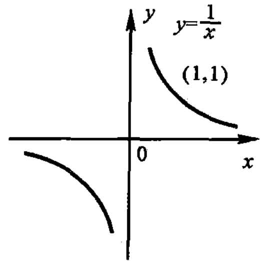


图 1.4

与数列极限类似，现在给出函数 $f(x)$ 当 $x \to \infty$ 时的极限定义.

定义 2　如果当 $|x|$ 无限增大时（$x \to \infty$），函数 $f(x)$ 无限地趋近于某一个确定的常数 A，那么常数 A 就叫做当 $x \to \infty$ 时 $f(x)$ 的极限. 记做

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A$$

或

$$f(x) \to A \quad (x \to \infty)$$

按照此极限定义，上例可表示为

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}=0$$

类似地，如果当 $x \to +\infty$（或 $x \to -\infty$）时，函数 $f(x)$ 无限地趋近于一个常数 A，那么常数 A 就叫做当 $x \to +\infty$（或 $x \to -\infty$）时函数 $f(x)$ 的极限，记为

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A \quad (\text{或} \lim_{x\to-\infty} f(x)=A)$$

定理 1　$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 的充要条件是

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=A$$

例 3　作出函数 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 和 $y=2^x$ 的图形，并判断下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$；　　(2) $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^x$.

解　分别作出函数 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 和 $y=2^x$ 的图形（见图1.5）.

由图形可以看出：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=0$；　　(2) $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^x=0$.

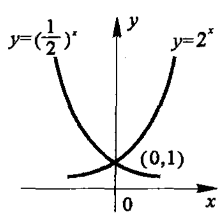


图 1.5

例 4　作出函数 $y=\arctan x$ 的图形，并求极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x$，

且判断极限$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 是否存在.

解　$y=\arctan x$ 的图形如图 1.6 所示.

由图 1.6 可看出 $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$，而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$，所以，$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在.

2. 当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

考察函数 $f(x)=2x+1$ 和函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$（见图 1.7）当 $x\to 1$ 时的函数值的变化情况.

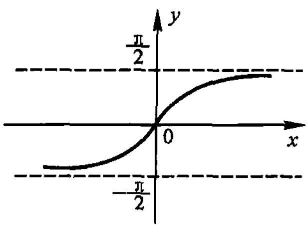


图　1.6

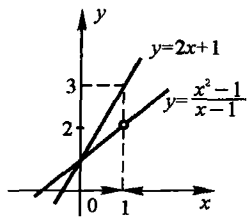


图　1.7

由图可以看出，当 x 从 1 的左、右两侧同时趋近于 1 时，函数 $f(x)=2x+1$ 的值越来越趋近于 3. 对函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 来说，尽管它在 $x=1$ 处没定义，但当 x 从 1 的左、右两侧趋近于 1 时，它的值越来越趋近于 2，对于函数的这种变化趋势，有下面定义：

定义 3　设函数 $f(x)$ 在 x_0 的左、右近旁有定义（x_0 可除外）. 如果当 x 无限趋近于 x_0 时（但 $x\neq x_0$），函数 $f(x)$ 值无限接近于某一个确定的常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A \quad (当\ x\to x_0\ 时)$$

上面的极限分别记为

$$\lim_{x\to 1}(2x+1)=3 \quad 和 \quad \lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=2$$

由上述极限定义和函数图形，可得出下面结论：

$$\lim_{x\to x_0}C=C \quad (C\ 为常数) \quad \lim_{x\to x_0}x=x_0$$

有时，当 x 从 x_0 的左、右两侧趋近于 x_0 时，函数 $f(x)$ 的变化趋势完全不同或 $f(x)$ 仅在 x_0 的一侧有定义，这时需要考察 x 从左、右两侧趋近于 x_0 时 $f(x)$ 的变化趋势，这就产生了左极限和右极限的概念.