法兰西数学
精品译丛

微分学

H. 嘉当 著
余家荣 译

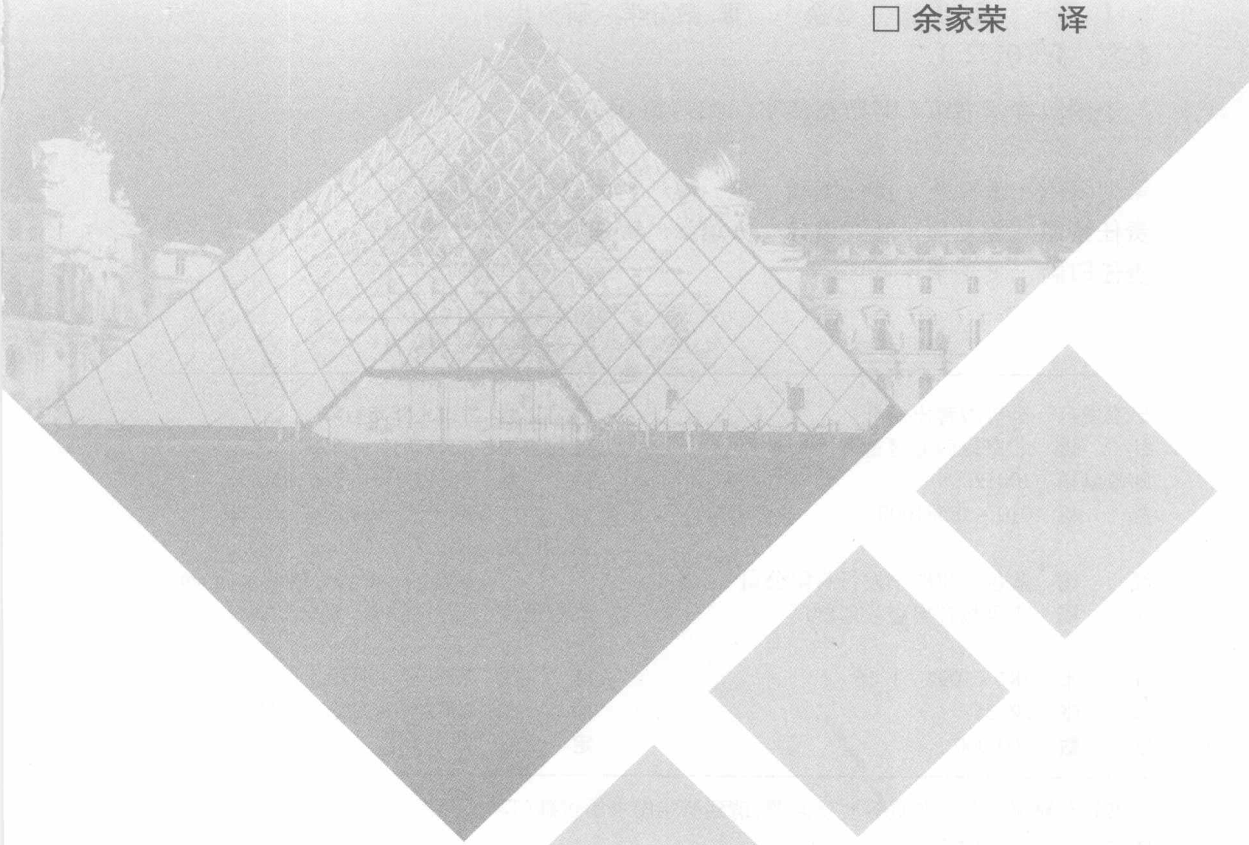
高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

法兰西数学
精品译丛

数学天元基金资助项目

微分学

□ H. 嘉当 著
□ 余家荣 译



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

图字: 01-2008-2673 号

Henri Cartan
Cours de Calcul Différentiel
Nouveau triage 2007

图书在版编目（CIP）数据

微分学／（法）嘉当（Cartan，H.）著；余家荣译. —北京：高等教育出版社，2009.4
（法兰西数学精品译丛）
ISBN 978－7－04－025156－2

Ⅰ.微… Ⅱ.①嘉… ②余… Ⅲ.微分学－研究生－教材 Ⅳ.O172.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 013175 号

策划编辑 王丽萍 **责任编辑** 李 鹏 **封面设计** 王凌波
责任绘图 吴文信 **版式设计** 陆瑞红 **责任校对** 刘 莉
责任印制 宋克学

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010－58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800－810－0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010－58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	高等教育出版社印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×1092　1/16	版　　次	2009 年 4 月第 1 版
印　　张	22.25	印　　次	2009 年 4 月第 1 次印刷
字　　数	460 000	定　　价	48.00 元

物料号　25156－00

《法兰西数学精品译丛》编委会

《法兰西数学精品译丛》序

随着解析几何及微积分的发明而兴起的现代数学, 在其发展过程中, 一批卓越的法国数学家发挥了杰出的作用, 作出了奠基性的贡献. 他们像灿烂的星斗发射着耀眼的光辉, 在现代数学史上占据着不可替代的地位, 在大学教科书、各种专著及种种数学史著作中都频繁地出现着他们的英名. 在他们当中, 包括笛卡儿、费马、帕斯卡、达朗贝尔、拉格朗日、蒙日、拉普拉斯、勒让德、傅里叶、泊松、柯西、刘维尔、伽罗华、庞加莱、嘉当、勒贝格、魏伊、勒雷、施瓦兹及利翁斯等等这些耳熟能详的名字, 也包括一些现今仍然健在并继续作出重要贡献的著名数学家. 由于他们的出色成就和深远影响, 法国的数学不仅具有深厚的根基和领先的水平, 而且具有优秀的传统和独特的风格, 一直在国际数学界享有盛誉.

我国的现代数学, 在 20 世纪初通过学习西方及日本才开始起步, 并在艰难曲折中发展与成长, 终能在 2002 年成功地在北京举办了国际数学家大会, 在一个世纪的时间中基本上跟上了西方历经四个多世纪的现代数学发展的步伐, 实现了跨越式的发展. 这一巨大的成功, 根源于好几代数学家持续不断的艰苦奋斗, 根源于我们国家综合国力不断提高所提供的有力支撑, 根源于改革开放国策所带来的强大推动, 也根源于很多国际数学界同仁的长期鼓励、支持与帮助. 在这当中, 法兰西数学精品长期以来对我国数学界所起的积极影响, 法兰西数学的深厚根基、无比活力和优秀传统对我国数学家所起的不可低估的潜移默化作用, 无疑也是一个不容忽视的因素. 足以证明这一点的是: 在我国的数学家中, 有不少就曾经留学法国, 直接受到法国数学家的栽培和法兰西数学传统和风格的薰陶与感召, 而更多的人也或多或少地通过汲取法国数学精品的营养而逐步走向了自己的成熟与辉煌.

由于语言方面的障碍, 用法文出版的优秀数学著作在我国的传播受到了较大的限制. 根据一些数学工作者的建议, 并取得了部分法国著名数学家的热情支持, 高等

教育出版社决定出版《法兰西数学精品译丛》, 将法国的一些享有盛誉并有着重要作用与影响的数学经典以及颇具特色的大学与研究生数学教材及教学参考书, 有选择地从法文原文分批翻译出版. 这一工作得到了国家自然科学基金委员会数学天元基金的支持和赞助, 对帮助并推动我国读者更好地学习和了解法国的优秀数学传统和杰出数学成就, 进一步提升我国数学 (包括纯粹数学与应用数学) 的教学与研究工作的水平, 将是意义重大并影响深远的, 特为之序.

李大潜

2008 年 5 月

序

泛函分析是数学的一个分支, 特别是分析中研究函数空间的一个分支. 它在历史上的根源在变换的研究中, 例如在傅里叶变换的研究中, 并且也在微分方程的研究中.

“泛函” 这一名词起源于变分学的研究中, 它是用来表示自变量是函数的函数的. 意大利数学家兼物理学家维多 · 沃尔泰拉把泛函的应用推广到新的领域. 波兰数学家斯提凡 · 巴拿赫常被认为近代泛函分析的奠基人.

本书目的是引进巴拿赫空间中微分学及微分方程的基础, 同时使读者熟习微分形式、变分学原理以及活动标架法对曲线与曲面的应用等概念. 本书首先回顾讲述以下各章中概念所必需的一些预备知识: 巴拿赫空间, 可微映射, 有限增量, 隐映射, 阶的定理, 高阶微分, 可微凸映射, 直纹映射, 泰勒公式, 相对极值, 微分方程, 微分形式, 活动标架等.

巴拿赫空间是巴拿赫为了解含无穷个变量的方程组, 约在 1930 年提出的. 为了解未知变量的个数没有确定的问题, 例如函数的向量空间, 巴拿赫空间是一个相当自然的框架.

巴拿赫空间被定义为完备的赋范向量空间. 换句话说, 巴拿赫空间是实或复数域上的一种向量空间 V, 它带有满足一定条件的一个范数 $\|\cdot\|: V$ 中 (关于度量 $d(x,y)=\|x-y\|$ 的) 任何柯西序列在 V 中有一极限. 由于范数导出了向量空间上的一种拓扑, 巴拿赫空间是拓扑向量空间的一种实例.

本书也论述了微分形式, 并且应用它们研究曲面微分几何的整体及局部的某些性质. 几何计算及微分形式以格拉斯曼代数作为它们共同的起源; 但是它们的历史发展不同, 必须要经历时间才能使数学家们懂得它们两者属于同一数学体系.

嘉当的外微分形式理论的重要性在于下列事实: 在关于 C^1 类可微映射的映射代换和 “拉回” (SF-PB) 情况下, 一个 M 维初始流形变到终态成为一个 N 维流形,

这时微分形式是完全确定的. 映射不必有逆映射 (或可逆的雅可比, 既然初始流形与终态流形的维数不同).

与张量分析理论大不相同的是: 在张量分析中, 必须加上种种条件, 因为映射与逆映射以及可微映射与可微逆映射在张量分析中都是必要的.

这些映射称为微分同胚, 而当物理学家应用它们时则称为坐标变换. 一个在终态为零的张量, 在初始态也是零; 对于张量, 初始态与终态必须由微分同胚联系着. 微分形式超越了张量演算, 而且包含后者作为特别情形.

注意微分形式统一并简化了多变量的变分学. 对这个课题有兴趣的学生们从本书中, 会比用通常方式, 能更好地理解有关概念.

最后, 在本书末章, 为了研究浸入在 R^3 中曲面的局部微分几何以及曲面的内蕴几何, 作者发挥了 E. 嘉当的活动标架法.

在数学中, 活动标架是向量空间内有序基概念的一种推广; 这种基往往用来研究浸入在齐性空间中连续流形的内蕴微分几何. 活动标架首先是由 G. 达布在十九世纪引进, 是用来研究浸入在欧氏空间中曲线的弗雷内 — 塞雷特标架的. 后来, E. 嘉当以及其他数学家使活动标架法成熟了, 用它来研究更一般的齐性空间 (例如射影空间) 中的子流形①.

E. 嘉当的活动标架法建立在这种观念上: 考虑一种适应于所研究特别问题的活动标架. 例如已给空间一曲线, 曲线所导出的前三个向量一般可在曲线上一点提供一个标架. 更一般地, 活动标架可看作一些开集 U 上主要纤维的截口. 嘉当用他的一般方法, 结合他的联络概念, 探讨了这种抽象问题.

最常遇到的活动标架情形是流形的切标架的纤维情形. 在这种情形, 流形 M 上的活动切标架是由一组向量 $X_1, \cdots, X_n$ 的场构成的; 这些向量在开集 $U \subset M$ 中每点形成切空间的一个基.

总可在局部即在 M 中任何点 p 的邻域内确定一活动标架. 但是要在 M 上有整体活动标架, 必须加上拓扑的条件. 例如当 M 是圆, 或更一般地是环面时, 可以确定这种类型的标架. 相反地, 当 M 是二维球面时, 这就不可能了. 有整体活动标架的流形叫做可平行化的.

本书内容正好包含了数学的一些纯粹分支和应用分支. 特别对于准备教师考试的学生, 对于准备获得硕士阶段微分学学分的学生②, 以及对于教师, 书中把内容逐步展开的方式都是有用的. 对于学工程的学生以及理论物理学者, 本书也很有用. 书中正文由许多例子阐明, 并且每一部分都包含一些程度不同的习题.

本书可用作参考书和优秀的数学习题集.

J. 库奈埃 (Joseph Kouneiher)

①F. 埃兰 (Frédéric Hélein) 证明了: 为了证明在无对称情形下正规性的结果, 库伦 (Coulomb) 的活动标架的新概念可以起着关键性的作用.

②法国大学通过四年学习可得硕士学位.

目录

上编　微　分　学

下编 微 分 形 式

上编　微　分　学

第一章　巴拿赫空间中的微分学

1.　关于巴拿赫空间及连续线性映射概念的回顾

在下面, 基础域 $\mathbb{K}$ 是实数域 $\mathbb{R}$ 或复数域 $\mathbb{C}$. 假定关于向量空间的定义和它们的初等性质是已知的. 我们记得: 如果 E 是复向量空间 (即在域 $\mathbb{C}$ 上的向量空间), 那么 E 具有隐含的实向量空间的结构: 现限于考虑向量 $x(\in E)$ 及数量 $\lambda(\in \mathbb{R})$ 的乘积 λx.

1.1.　向量空间 E 上的范数

范数是满足下列条件的映射 $\rho : E \to \mathbb{R}^+$($\mathbb{R}^+$ 表示大于或等于零的实数集):

(i) $\rho(0) = 0$;

(i′) $(\rho(x) = 0) \Rightarrow (x = 0)$;

(ii) $\rho(x + y) \leqslant \rho(x) + \rho(y), \forall x, y \in E$

(iii) $\rho(\lambda x) = |\lambda| \cdot \rho(x), \forall x \in E, \lambda \in \mathbb{K}$

带有已给范数的向量空间 (简记作 e.v. 即法文 espace vectoriel 的编写) 称为赋范向量空间 (赋范 e.v.). 当范数 ρ 这样给定时, 往往把向量 x 的范数值 $\rho(x)$ 记作 $\|x\|$. 采用这种记号, 条件 (i) 至 (iii) 写成:

(i) $\|0\| = 0$;

(i′) $(\|x\| = 0) \Rightarrow (x = 0)$;

(ii) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$;

(iii) $\|\lambda x\| \leqslant |\lambda| \cdot \|x\|$.

设 E 是一赋范 e.v.; 用下列公式定义 E 中两点 x, y 的距离:

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$