21世纪高等学校规划教材

XIAN XING DAI SHU

线性代数

牛连杰　主　编
王利民　刘丽莉　副主编

中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS
http://jc.cepp.com.cn

21世纪高等学校规划教材

XIAN XING DAI SHU

线性代数

主　编　牛连杰
副主编　王利民　刘丽莉
编　写　张　新
主　审　邱启荣

中国电力出版社
http://jc.cepp.com.cn

内 容 提 要

本书为21世纪高等学校规划教材。本书根据高等教育本科“线性代数”课程的教学基本要求编写，系统地介绍了线性代数的基础知识。全书共分6章，主要内容包括行列式、矩阵、n维向量空间、线性方程组、相似矩阵与矩阵对角化、二次型等，每章后均附有基本和提高两组习题，并附有参考答案。书末附录介绍了用MATLAB解决线性代数中计算问题的主要方法。

本书可作为普通高等院校工科及非数学类理科专业的教材，也可作为相关工程技术人员的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/牛连杰主编．—北京：中国电力出版社，2009
21世纪高等学校规划教材
ISBN 978-7-5083-9001-7

Ⅰ．线… Ⅱ．牛… Ⅲ．线性代数—高等学校—教材
Ⅳ．O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2009）第118164号

中国电力出版社出版、发行
（北京三里河路6号 100044 http://jc.cepp.com.cn）
北京市同江印刷厂印刷
各地新华书店经售
*
2009年8月第一版 2009年8月北京第一次印刷
787毫米×1092毫米 16开本 7.75印张 185千字
定价**13.00**元

前　言

随着经济和信息技术的高速发展与应用，很多实际问题可通过线性代数知识解决，使线性代数成为当代科技的基础。同时，线性代数在训练人的逻辑思维和推理能力、分析问题和解决问题的能力方面也起着重要作用。线性代数已成为理工、经济、管理等专业的必修课。

本书针对使用对象的特点，结合作者多年的教学实践和教学改革经验，在编写过程中，注重了以下几方面的问题：

（1）适应我国在21世纪经济建设和发展的需要，着眼于培养“厚基础，宽口径，高素质”的应用型人才，注重加强基础课程教育。

（2）在注意保持数学学科本身结构的科学性、系统性、严谨性的同时，力求深入浅出，通俗易懂，突出有关理论、方法应用的介绍。

（3）注意兼顾各专业的教学需要，既能较好地掌握所学知识，又能满足后继课程及学生继续深造的需要。为此，将线性代数习题分为两部分，习题A为基本题，习题B为提高题。

（4）附录MATLAB与线性代数，介绍如何利用MATLAB解决线性代数中的计算问题。

本书由河北建筑工程学院数学教研室编写。牛连杰担任主编、刘丽莉和王利民担任副主编。刘丽莉编写第1、2章，王利民编写第3、4章及附录，牛连杰编写第5、6章。

本书在编写过程中，得到了河北建筑工程学院领导及老师们的精心指导和大力支持。华北电力大学邱启荣审阅了全书，提出许多宝贵意见，在此一并致谢。

限于学识与水平，本书不当之处，恳请专家和读者批评指正。

编　者

2009年6月

目　录

第1章 行 列 式

行列式是从二、三元线性方程组公式解中引出的，是线性代数中的重要工具，在求解线性方程组、求逆矩阵、判断向量组的线性相关性、求矩阵的特征值及判断二次型的正定等方面都要用到. 此外，在其他数学领域及工程技术中行列式也是一个重要工具. 本章在分析二、三阶行列式结构的基础上，把行列式的定义从二、三阶推广到 n 阶，然后讨论 n 阶行列式的性质和计算方法，最后给出求解 n 个元、n 个一次方程的联立方程组的克莱姆法则.

第1节 n 阶行列式的定义

在给出行列式定义之前，先简单介绍一些有关排列的基础知识.

一、排列

定义1 由 n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组 $(p_1,p_2,\cdots,p_n)$ 称为一个 n 级排列.

例如，$(1,2,3,4)$ 是一个4级排列，$(4,2,3,1)$ 也是一个4级排列. $(2,5,3,1,4)$ 是一个5级排列. 显然，n 级排列的总数为 $n!$ 个.

由1,2,3三个数可以排出 $3!=6$ 个3级排列，它们分别为 $(1,2,3)$，$(2,3,1)$，$(3,1,2)$，$(1,3,2)$，$(2,1,3)$，$(3,2,1)$.

定义2 在一个 n 级排列中，如果某个较小的数排在了某个较大的数后面，就称这两个数构成了该排列的一个逆序. 一个排列中所有逆序的总数叫做该排列的逆序数. 逆序数一般记为 $t(p_1,p_2,\cdots,p_n)$，简记为 t. 逆序数为偶数的排列称为偶排列，逆序数为奇数的排列称为奇排列.

n 级排列 $(p_1,p_2,\cdots,p_n)$ 的逆序数的一般算法为

$$t(p_1,p_2,\cdots,p_i,\cdots,p_n)=\sum_{i=1}^{n-1}\tau_i$$

其中，$\tau_i(i=1,2,\cdots,n-1)$ 为排在 p_i 后，且比 p_i 小的数的个数.

例如，$t(3,1,4,2)=2+0+1=3$，故 $(3,1,4,2)$ 为奇排列. $t(2,1,4,3)=1+0+1=2$，故 $(2,1,4,3)$ 为偶排列.

所有的3级排列有 $t(1,2,3)=0$，$t(2,3,1)=2$，$t(3,1,2)=2$，$t(1,3,2)=1$，$t(2,1,3)=1$，$t(3,2,1)=3$. 3个奇排列，3个偶排列.

定义3 将一个排列中某两个元素的位置对调，而其余的数不动，就得到一个新排列，这样一个变换称为一次对换.

如果将一个排列中相邻的两个数做一次对换，则对换后排列必改变其奇偶性. 进一步可以证明得到：

定理1 一个排列中的任意两个数对换，排列改变奇偶性.

即，经过一次对换，奇排列变成偶排列，偶排列变成奇排列.

例如，将排列 $(2,4,6,3,1,5)$ 中的 4 与 1 对换，得到的新排列为 $(2,1,6,3,4,5)$，则 $t(2,4,6,3,1,5)=7$，$t(2,1,6,3,4,5)=4$．即奇排列 $(2,4,6,3,1,5)$ 经过一次对换，变成偶排列 $(2,1,6,3,4,5)$．

推论 1 在全部 n（$n\geqslant 2$）级排列中，奇排列、偶排列的个数相等，各为 $\frac{n!}{2}$．

设 n 个数的奇排列共有 p 个，而偶排列共有 q 个，对这 p 个奇排列施行同一对换 (i,j)，由定理 1，可得 p 个偶排列．由于对这 p 个偶排列施行对换 (i,j)，又可以得到原来的 p 个奇排列，这 p 个偶排列各不相等，但一共有 q 个偶排列，所以 $p\leqslant q$．同样可得 $q\leqslant p$，因此，$q=p$．

二、二阶与三阶行列式的定义

行列式是一种特定的算式，它是根据求解方程个数和未知量个数相同的一次方程组的需要而定义的．例如，在初等数学中，解二元一次方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2\end{cases}$$

用消元法，得

$$\begin{cases}(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-a_{21}b_1\\(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=a_{22}b_1-a_{12}b_2\end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，求得此方程组有惟一的解，即

$$x_1=\frac{a_{22}b_1-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\ x_2=\frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

上式中的分子、分母都是 4 个数分两对先相乘再相减而得，为便于使用与记忆，将 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 称为二阶行列式，用符号表示为

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

$a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$ 称为行列式 $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}$ 的元素，元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标，表明该元素位于第 i 行，第二个下标 j 称为列标，表明该元素位于第 j 列．二阶行列式含有两行两列（横排称行、竖排称列），其值为两项的代数和，每项为位于不同行不同列的两个元素的乘积并冠以正负号．

例如，行列式

$$\begin{vmatrix}b_1&a_{12}\\b_2&a_{22}\end{vmatrix}=a_{22}b_1-a_{12}b_2,\ \begin{vmatrix}a_{11}&b_1\\a_{21}&b_2\end{vmatrix}=a_{11}b_2-b_1a_{21}$$

可记为

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix},\ D_1=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}\\b_2&a_{22}\end{vmatrix},\ D_2=\begin{vmatrix}a_{11}&b_1\\a_{21}&b_2\end{vmatrix}$$

则二元一次方程组 $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2\end{cases}$ 的解可用二阶行列式叙述为：当二阶行列式 $D\neq 0$ 时，方程组有惟一解，即

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

其中分母中的行列式 D 是由方程组中 x_1, x_2 的系数按原来次序排列成的，称为方程组的系数行列式. 而 x_1 的分子行列式 D_1 是将系数行列式中 x_1 的系数 a_{11} 、a_{21} 换成常数项 b_1 、b_2 而形成的行列式，x_2 的分子 D_2 是将系数行列式中 x_2 的系数 a_{21} 、a_{22} 换成常数项 b_1 、b_2 而形成的行列式.

同样，由解三元一次方程组可引入三阶行列式.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

称上式为三阶行列式. 三阶行列式含有三行三列，其值是 3! 即 6 项的代数和，而每项均为不同行不同列的三个元素的乘积并冠以正负号.

对于系数行列式不等于零的三元一次方程组的解，可以如二元一次方程组一样，用行列式表示.

二阶及三阶行列式可借助对角线法则来记忆，如图 1 - 1、图 1 - 2 所示.

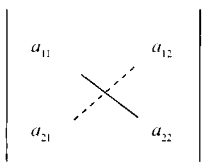

图 1 - 1

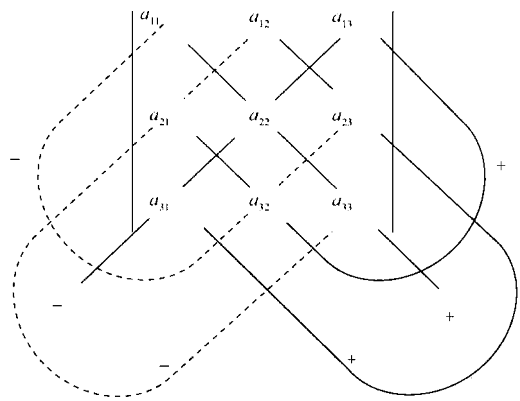

图 1 - 2

二阶行列式是主对角线上（ $a_{11} \sim a_{22}$ 的实连线）的两元素之积减去副对角线上（ $a_{12} \sim a_{21}$ 的虚连线）两元素之积所得的差；而三阶行列式中所含六项的规律遵循图 1 - 2 所示的对角线法则：图中的三条实线看作是平行于主对角线的连线，三条虚线看作是平行于副对角线的连线，实线上三元素的乘积冠正号，虚线上三元素的乘积冠负号.

【例 1】 求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x-y+10=0 \\ x+2y-5=0 \end{cases}$$

解 原方程组为

$$\begin{cases} 2x-y=-10 \\ x+2y=5 \end{cases}$$

由于

$$D=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=2\times 2-1\times(-1)=5\neq 0$$

$$D_x=\begin{vmatrix}-10 & -1\\ 5 & 2\end{vmatrix}=-15,\quad D_y=\begin{vmatrix}2 & -10\\ 1 & 5\end{vmatrix}=20$$

所以原方程组的解为

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{-15}{5}=-3,\quad y=\frac{D_y}{D}=\frac{20}{5}=4$$

【例 2】 计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}2 & 0 & 1\\ 3 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 3\end{vmatrix}$$

解 按对角线法则，有

$$D=2\times2\times3+3\times2\times1+0\times0\times1-0\times2\times1-3\times0\times3-2\times2\times1=14$$

以上介绍了二、三阶行列式在求解二、三元一次线性方程组时所起的作用，对于具有 n 个未知量 n 个方程的线性方程组，需将行列式的概念推广到一般的 n 阶行列式.

三、n 阶行列式的定义

首先分析三阶行列式的结构.

三阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

从此定义可看出：

(1) 上式右端的每一项都是三个元素的乘积，这三个元素不同行也不同列，且所有位于不同行也不同列的元素的乘积（共有 3! =6 个）都在行列式中出现，三阶行列式恰是这六个乘积的代数和.

(2) 上式右端每一项的元素都有两个下标，第一个下标表示元素所在的行，第二个下标表示元素所在的列，且第一个下标是标准次序 123，而第二个下标排成 (p_1,p_2,p_3)，(p_1,p_2,p_3) 是某个 3 级排列. 3 级排列共有 6 种（又恰好为项数），故上式右端一般项除正负号外可写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$.

(3) 观察各项的正负号，带正号的三项列标排列是 (1，2，3)，(2，3，1)，(3，1，2)；带负号的三项列标排列是 (1，3，2)，(2，1，3)，(3，2，1). 前三个排列为偶排列，后三个排列为奇排列，因此各项所带正负号可表示为 $(-1)^t$ ，其中 t 为列标排列的逆序数.

综合上述分析，三阶行列式可写为

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\sum_{(p_1,p_2,p_3)}(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$$

其中 t 为排列 (p_1,p_2,p_3) 的逆序数，$\sum$表示对所有 3 级排列 (p_1,p_2,p_3) 求和.

分析一下二阶行列式也会发现类似的规律，这样我们得出了二阶和三阶行列式含有怎样的项及每一项取怎样的符号的规律，根据这一规律来定义 n 阶行列式.

定义 4 将 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排成 n 行 n 列的数表. 记号为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

D 是通过下式确定的一个数

$$D=\sum_{(p_1,p_2,\cdots,p_n)}(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

其中 a_{ip_i} 为 D 的第 i 行第 p_i 列的元素，$\sum\limits_{(p_1,p_2,\cdots,p_n)}$ 是对所有 n 级排列 $(p_1,p_2,\cdots,p_n)$ 求和，t 是排列 $(p_1,p_2,\cdots,p_n)$ 的逆序数. 通常称 D 为 n 阶行列式. n 阶行列式 D 简记为 $\det(a_{ij})$，即 $D=\det(a_{ij})$.

分析定义知，由于 $(p_1,p_2,\cdots,p_n)$ 为一个 n 级排列，而这样的排列共有 $n!$ 个，因此 n 阶行列式 D 是 $n!$ 项的代数和；和式中的每一项是取自 D 中位于不同行不同列的 n 个元素的乘积；当排列 $(p_1,p_2,\cdots,p_n)$ 为偶排列时该项带正号，奇排列时带负号.

显然，当 $n=2,3$ 时，D 为二、三阶行列式，与第 1 节中用对角线法则定义的二、三阶行列式完全一致. 当 $n=1$ 时 D 是一阶行列式 $D=|a_{11}|=a_{11}$，注意不要与绝对值记号混淆.

【例 3】 写出 4 阶行列式含因子 $a_{31}a_{42}$ 的项

解 4 阶行列式含因子 $a_{31}a_{42}$ 的项为 $(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{31}a_{42}$，$t$ 为排列 $(p_1,p_2,1,2)$ 的逆序数，(p_1,p_2) 为 3、4 两个数的所有排列，共两项. 所以 4 阶行列式含因子 $a_{31}a_{42}$ 的项为

$$a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}\ ,-a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$$

【例 4】 计算 4 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & e & f & 0 \\ g & 0 & 0 & h \end{vmatrix}$$

解 据定义，D 是一个 $4!$ 项的代数和，然而在此行列式中，除 $acfh,adeh,bdeg,bcfg$ 这四项外，其余的项都至少含有一个零因子，因此等于 0. 与上面四项对应的列标排列依次是 $(1,2,3,4)$，$(1,3,2,4)$，$(4,3,2,1)$，$(4,2,3,1)$，其中第一个和第三个是偶排列，第二个和第四个是奇排列，因此

$$D=acfh-adeh+dbeg-bcfg$$

【例 5】 证明 n 阶行列式（未写出的元素均为零）

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

此行列式的特点是主对角线（即从左上角到右下角的直线）以上的元素全为零，即 $i<j$ 时，$a_{ij}=0$，这种行列式称为下三角形行列式.

证明 按定义，$D=\sum\limits_{(p_1,p_2,\cdots,p_n)}(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$，该定义式中共有$n!$项. 由于当$i<j$时，$a_{ij}=0$，故$D$中可能不为0的元素$a_{ip_i}$其下标应有$p_i\leqslant i$，即$p_1\leqslant 1$，$p_2\leqslant 2,\cdots,p_n\leqslant n$. 在所有排列$(p_1,p_2,\cdots,p_n)$中，能满足上述关系的排列只有一个自然排列$(1,2,\cdots,n)$，所以$D$中可能不为0的项只有一项

$$(-1)^t a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

此项的符号$(-1)^t=(-1)^0=1$，所以

$$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

同理可以证明

(1) 上三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(2) 对角行列式（其中对角线上的元素是λ_i，未写出的元素都是0）

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

(3) 副对角行列式

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

在行列式的定义中，为了决定每一项的正负号，将该项每个元素的行标按自然顺序排列，该项正负号由列标排列的奇偶性决定. 由于行标与列标的地位是对称的，因此，也可将该项每个元素的列标按自然顺序排列，该项正负号由行标排列的奇偶性决定. 于是n阶行列式的定义又可以写为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{(p_1,p_2,\cdots,p_n)}(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}$$

其中t为行标排列$(p_1,p_2,\cdots,p_n)$的逆序数.

第2节 行 列 式 的 性 质

利用行列式的定义直接计算行列式很烦琐，因此有必要对行列式作进一步的研究. 本节介绍行列式的一些性质，这些性质对简化行列式的运算十分有用.

性质1 行列互换，行列式的值不变.

即设
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
记为
$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

D^{T} 为 D 的转置行列式，转置行列式也可记为 D'，有 $D=D^{\mathrm{T}}$.

证明 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$ 其中 $b_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$

据定义有
$$D^{\mathrm{T}}=\sum(-1)^t b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n}=\sum(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}=D$$

性质 1 表明，行列式与其转置行列式是相等的，即 $D=D^{\mathrm{T}}$. 在行列式中行与列的地位是对称的，因此，凡行列式对行成立的性质对列也成立，反之亦然. 故后面的性质主要对行进行论证.

性质 2 互换行列式的任意两行（列），行列式变号.

证明 设给定行列式 $D=\det(a_{ij})$，互换 i,j 两行，得
$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
按行列式的定义，对于行列式 D 及 D_1 分别有
$$D=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n}$$
$$D_1=\sum(-1)^{t_1} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}$$
其中 $t=t(p_1,p_2,\cdots,p_i,\cdots,p_j,\cdots,p_n)$，$t_1=t(p_1,p_2,\cdots,p_j,\cdots,p_i,\cdots,p_n)$.

观察 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}$ 与 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n}$，由于排列 $(p_1,p_2,\cdots,p_j,\cdots,p_i,\cdots,p_n)$ 是排列 $(p_1,p_2,\cdots,p_i,\cdots,p_j,\cdots,p_n)$ 经过 p_i 与 p_j 的一次对换得到的，故根据对换的性质，t_1 与 t 的奇偶性相反，于是
$$\begin{aligned} D_1&=\sum(-1)^{t_1} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n} \\ &=-\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n}=-D \end{aligned}$$

推论 若行列式有两行（列）完全相同，则此行列式的值等于零.

性质 3 行列式的某一行（列）所有元素的公因子可以提到行列式号的外面，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论 用同一个数 k 乘行列式某行（或列）的所有元素，等于用数 k 乘此行列式.

性质 4 行列式如果有两行（列）元素对应成比例，则此行列式的值等于零.

性质 5 若行列式的某一行（列）的元素都为两数之和，则此行列式可拆为两个行列式之和. 即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

上式右端两个行列式的区别在第 i 行，除第 i 行外，两个行列式的其他各行元素都与左端原来行列式的对应行相同.

性质 5 表明，当某一行（列）的元素都为两数之和，则此行列式关于行（列）可分解成两个行列式. 若 n 阶行列式的每个元素都是两数之和，则它可分解为 2^n 个行列式，如 2 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b+y \\ c & d+w \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & b+y \\ z & d+w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & y \\ c & w \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & b \\ z & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix}.$$

性质 6 把行列式的某一行（列）的各元素乘以同一个非零常数，然后加到另一行（列）对应的元素上去，行列式的值不变.

如以常数 k 乘第 j 列加到第 i 列上

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i}+ka_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i}+ka_{2j} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni}+ka_{nj} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 3、4、5、6 请读者自己证明.

利用行列式的性质可简化行列式的计算，特别是利用性质 6，可以将行列式简化为容易计算的上（下）三角形行列式，这是计算行列式的重要方法.

为了指明在行列式计算中利用了行列式的哪些性质，计算中常采用如下记号：

以 r_i 表示第 i 行（row），以 c_j 表示第 j 列（column）；

$r_i \leftrightarrow r_j$ 表示互换第 i 行与第 j 行；$c_i \leftrightarrow c_j$ 表示互换第 i 列与第 j 列；

kr_i 表示第 i 行乘以 k；kc_i 表示第 i 列乘以 k；

$r_i + kr_j$ 表示第 j 行的 k 倍加到第 i 行；$c_i + kc_j$ 表示第 j 列的 k 倍加到第 i 列.

【例 1】 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}2&-5&3&1\\1&3&-1&3\\0&1&1&-5\\-1&-4&2&-3\end{vmatrix}$$

解

$$D=\begin{vmatrix}2&-5&3&1\\1&3&-1&3\\0&1&1&-5\\-1&-4&2&-3\end{vmatrix}\xlongequal{r_1\leftrightarrow r_2}-\begin{vmatrix}1&3&-1&3\\2&-5&3&1\\0&1&1&-5\\-1&-4&2&-3\end{vmatrix}\xlongequal[r_2+r_1]{r_2-2r_1}-\begin{vmatrix}1&3&-1&3\\0&-11&5&-5\\0&1&1&-5\\0&-1&-1&0\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{vmatrix}1&3&-1&3\\0&1&1&-5\\0&-11&5&-5\\0&-1&-1&0\end{vmatrix}\xlongequal[r_4+r_2]{r_3-r_2}\begin{vmatrix}1&3&-1&3\\0&1&1&-5\\0&0&16&-60\\0&0&2&-5\end{vmatrix}\xlongequal{r_3\leftrightarrow r_4}-\begin{vmatrix}1&3&-1&3\\0&1&1&-5\\0&0&2&-5\\0&0&16&-60\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-8r_3}-\begin{vmatrix}1&3&-1&3\\0&1&1&-5\\0&0&2&-5\\0&0&0&-20\end{vmatrix}=40$$

上述解法中，先用了运算 $r_1\leftrightarrow r_2$，其目的是将 a_{11} 换成1，从而利用运算 $r_i-a_{i1}r_1$，即可把 $a_{i1}(i=2,3,4)$ 变为0. 如果不先作 $r_1\leftrightarrow r_2$，则由于原式中 $a_{11}=2$，需用运算 $r_i-\frac{a_{i1}}{2}r_1$ 将 a_{i1} 变为0. 这样计算时就比较麻烦. 第二步将 r_2-2r_1 和 r_4+r_1 写在一起，这是两次运算，并把第一次运算结果的书写省略了.

【例2】 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}$$

解 此行列式的特点是各列4个元素之和都等于10，于是将第2，3，4行同时加到第一行上，再将公因子提出，可得

$$D\xlongequal{r_1+r_2+r_3+r_4}\begin{vmatrix}10&10&10&10\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}\xlongequal{r_1\div 10}10\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}\xlongequal[\substack{r_3-2r_1\\r_4-4r_1}]{r_2-r_1}10\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&-1\\0&1&-2&-1\\0&-3&-2&-1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4+3r_2]{r_3-r_2}10\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&-1\\0&0&-4&-2\\0&0&-8&2\end{vmatrix}\xlongequal{r_4-2r_3}10\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&-1\\0&0&-4&-2\\0&0&0&6\end{vmatrix}=240$$

【例3】 计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & b+a & c+b+a & d+c+b+a \\ a & b+2a & c+2b+3a & d+2c+3b+4a \\ a & b+3a & c+3b+6a & d+3c+6b+10a \end{vmatrix}$$

解　方法一：重复利用（行的）性质 6，将 D 化为上三角形行列式，得

$$D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b+a & d+c+b \\ 0 & 0 & a & b+2a \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}=a^4$$

方法二：利用性质 5，将 D 表示为

$$D=\begin{vmatrix} a & b+0 & c+0+0 & d+0+0+0 \\ a & b+a & c+b+a & d+c+b+a \\ a & b+2a & c+2b+3a & d+2c+3b+4a \\ a & b+3a & c+3b+6a & d+3c+6b+10a \end{vmatrix}$$

则 D 可分解为 $1\times2\times3\times4=24$ 四阶行列式之和，其中有 23 个行列式至少有两列成比例，它们的值全为零，只有下面的一个行列式各列不成比例，利用（列的）性质 6，可得

$$D=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ a & a & a & a \\ a & 2a & 3a & 4a \\ a & 3a & 6a & 10a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ a & a & 0 & 0 \\ a & 2a & a & 2a \\ a & 3a & 3a & 7a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ a & a & 0 & 0 \\ a & 2a & a & 0 \\ a & 3a & 3a & a \end{vmatrix}=a^4$$

【例 4】　设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & O & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$A=\det(a_{ij})=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix},\qquad B=\det(b_{ij})=\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

求证 $D=AB$.

证明　对 A 重复利用（行的）性质 6，将 A 化为下三角形行列式，设为

$$A=\begin{vmatrix} p_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} \end{vmatrix}=p_{11}\cdots p_{kk}$$

对 B 重复利用（列的）性质 6，将 B 化为下三角形行列式，设为

$$B=\begin{vmatrix} q_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix}=q_{11}\cdots q_{nn}$$

于是，对 D 的前 k 行作运算 $r_i + kr_j$，再对后 n 列作运算 $c_i + kc_j$，将 D 化为下三角形行列式

$$D = \begin{vmatrix} p_{11} & & & & & \\ \vdots & \ddots & & & & \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & q_{11} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & q_{n1} & & q_{nn} \end{vmatrix}$$

故 $$D = p_{11}\cdots p_{kk} q_{11}\cdots q_{nn} = AB .$$

上述结果可简单的记作

$$\begin{vmatrix} A & O \\ * & B \end{vmatrix} = |A||B| ,$$

利用它及行列式两行（列）互换的性质，可得

$$\begin{vmatrix} O & A \\ B & * \end{vmatrix} = (-1)^{m\times k} \begin{vmatrix} A & O \\ * & B \end{vmatrix} = (-1)^{m\times k}|A||B|$$

下面介绍一类重要的行列式.

定义 1 若行列式 D 中的元素满足 $a_{ij} = a_{ji}(i,j = 1,2,\cdots,n)$，则称 D 为对称行列式；若满足 $a_{ij} = -a_{ji}$，$(i,j = 1,2,\cdots,n)$，则称 D 为反对称行列式.

【例 5】 试证奇数阶反对称行列式等于 0.

证明 由 $a_{ij} = -a_{ji}$，显然 $a_{ii} = 0$.

设 $D = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$ 是一个反对称行列式，其中 n 为奇数. 对 D 转置，得

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n D$$

因为 n 为奇数，故 $D = -D$，即 $D = 0$.

第 3 节 行列式按行（列）展开

一般地说，行列式的阶数愈高，计算愈复杂. 若能将 n 阶行列式用 $n-1$ 阶，甚至更低阶的行列式来表示，就可以得到简化行列式计算的另一途径：即将 n 阶行列式的计算归结为 $n-1$ 阶，甚至更低阶的行列式的计算.

对于三阶行列式来说，容易验证，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

这样，三阶行列式的计算可归结为二阶行列式的计算.