中央人民政府高等教育部推薦

高等學校教材試用本

矢算概論

И. А. ГОЛЬДФАЙН 著

卜 元 震 譯

商 務 印 書 館

中央人民政府高等教育部推薦
高等學校教材試用本

矢算概論

И. А. 高里德凡著
卜元震譯

商務印書館

本書係根據蘇聯國營技術理論書籍出版社（Гостехиздат）出版的高里德凡（И. А. Гольдфайн）所著"矢算概論"（Элементы векторного исчисления）1948年第二版譯出的。原書經蘇聯高等教育部審定爲高等工業學校教學參考用書。

矢　算　概　論

卜 元 震 譯

商　務　印　書　館出版
上海河南中路二一一號

中國圖書發行公司總經售

商務印書館上海廠印刷
（58841）

1953年5月初版　1953年7月2版
版面字數118,000　(10月第3次印)7,501—9,000
定價¥9,000

上海市書刊出版業營業許可證出〇二五號

序　　言

作者過去幾年在全蘇函授工業學院動力系教學，本書是將當時的講義經修改而成，內容有矢量代數，矢量分析以及動力學院的學生所要求的基本概念，但是在任何專業的技術大學中，當學習解析幾何和分析的適當的各章時，也是有用的。

在這教材中，所敍述的內容是相當廣的，所有的定理都經詳細證明，而且強調矢量固有的特徵。在敍述場論的初步時，特別注意說明它的物理意義。基本定理的證明是幾何的形式而強調它們的物理意義。

本書第一次是由全蘇函授工業學院出版。在本版，除去無關重要的文字修改外，有下面幾點的更改。在“矢量代數”部份增加矢量形式的比屋薩伐定律，在場論部份中，按照新的方式敍述矢量的旋度，並且增加調和函數和曲線座標兩章，對於這些增補部份，我們並不想敍述得很完善，而主要的目的是引起讀者從實用的觀點來注意這些重要的數學部份，要進一步認識這幾章的內容，介紹讀者去讀書末所列的書籍。

И. 高里德凡。

目　　錄

矢算概論

第一篇 矢量代數

第一章 矢量的加法與減法

1. 數量 某些物理量基本上由其對應度量系統所測得的數值決定,例如物體的體積由其所含單位立方數決定,温度由度數決定,電量由庫倫來測定等等。

基本上由數值決定的量稱爲數量。

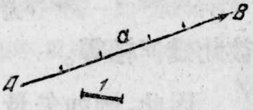

圖 1

數量可爲正量或負量,例如温度高於零度是正,而低於零度是負,電量同樣有正有負。但是有些數量(體積、質量)則恆爲正。數量是代數量,並且對它們可施行任何代數運算:加減乘除等。

2. 矢量 某些物理量的確定,除了知道它們的數值外,還必須指出它們的方向。例如祇說有 5 kg 的力是不充分的,還須要指出力的作用方向,對於速度、加速度等等,也是同樣情形。

除了數值,還具有方向的量稱爲矢量,簡稱矢。

在幾何上,我們用具有箭頭的線段表示矢量(圖 1)。箭頭指出矢量的方向,而且在選定的比例尺下,線段的長度是表示矢量的數值。

一般用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$(開始的三個拉丁字母,用闊版鉛字印刷),或者用 $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$(上面帶有短劃的拉丁字母,用普通鉛字印刷)表示矢量,或者也可以用 $\overline{AB}$ 表示矢量,其中 A 是始點,B 是終點。

以後主要採用第一種方法表示矢量。

矢量的數值，而取正號的，叫做矢量的長或模，它的絕對值，用$|\boldsymbol{a}|$或a（普通鉛字）或$|\bar{a}|$來表示它；矢量的模是正數量。

註：我們應用記號時，對於表示量的字母必須極端注意，用闊版鉛字印刷的字母是表示矢量，用普通鉛字印刷的字母是表示數量；其中矢量與它的模，用同一字母表示，所不同的是用對應的闊版與普通鉛字印刷。

置有矢量的直線稱為**矢量荷載者**。

在講到矢量運算之前，我們先介紹下列的定義：

定義 1　如果矢量的長（模）等於零，那麽這矢量就等於零。

這樣的矢量也稱為零矢，零矢的始點與它的終點相重合，而矢量本身變為一點。

定義 2　如果兩個矢量有等模、平行而且同向，那麽這兩個矢量是彼此幾何相等。

因此，例如矢量$\boldsymbol{a}$與$\boldsymbol{b}$（圖 2）就是幾何相等：

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$$

矢量$\boldsymbol{a}$與$\boldsymbol{c}$（圖 2）卻不幾何相等，因為雖然它們的模相等，但是它們的

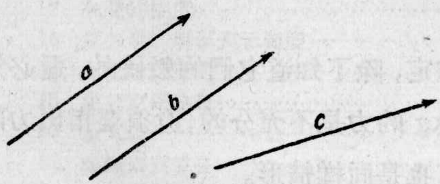

圖 2

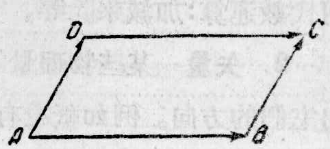

圖 2 a

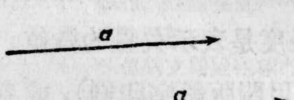

圖 2 b

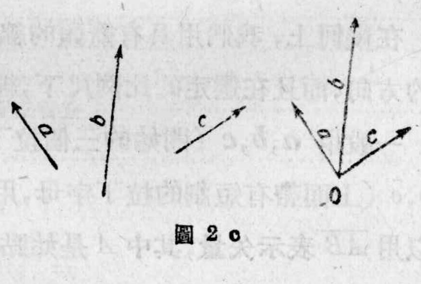

圖 2 c

方向不同。因此從兩個矢量模的相等還不能得出矢量本身的幾何相等。

平行四邊形的對邊是幾何相等的矢量(圖 2 a):

$$\overline{AB}=\overline{DC} \quad 及 \quad \overline{AD}=\overline{BC}$$

以後我們對幾何相等的矢量不加區別，並且用同一符號來表示它們(圖 2 b)。

由此推得，矢量可以平行移動到任意一點，因而當研究幾個矢量時，我們總可以將它們的始點移到一點 O (圖 2 c)。而把這一點看作它們的公共始點，這種情形，我們以後將常常用到。

我們必須注意，當我們採納這些定義時，不能將力與矢量同樣看待，因爲力的作用點祇能沿着力的作用線移動，而不能移向任意點。

註: 兩矢量的幾何相等就意味着它們具有同一數值，平行而且同指向。因此幾何相等，按照它的性質來說，是與一般代數相等是截然不同的。雖然如此，幾何相等一如代數相等亦用符號＝表示。它們的區別如下: 所給等式是幾何相等或是代數相等，就視乎等式兩邊是矢量還是數量。

同樣，我們指出，大小的概念祇能應用於數量，因此祇有矢量的模才能適用不等式。

3. 矢量加法　假設我們有幾個矢量，例如四個矢量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 和 $\boldsymbol{d}$ (圖 3)。

這些矢量的幾何和可瞭解爲矢量 $\boldsymbol{e}$，它的作法如下:

取任意點 O，作與矢量 $\boldsymbol{a}$ 幾何相等的矢量 $\overline{OA}$; 再以得到的 A 點做始點，作與矢量 $\boldsymbol{b}$ 幾何相等的矢量 $\overline{AB}$，餘類推(圖 3)。這樣的作圖法直至取盡所有的矢量爲止，在已知的情況就是取盡矢量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$。結果就得到折線 $OABCD$。這折線的封閉線 OD 就是所求的幾何和。

$$\overline{OD}=\overline{OA}+\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD} \text{ (多邊形規則)}$$

或

$$\boldsymbol{e}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}。$$

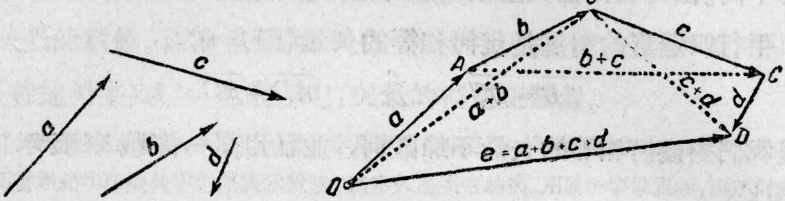

圖 3

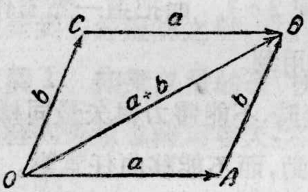

圖 3　a

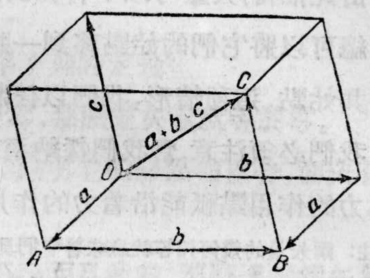

圖 3　b

其中,兩個矢量的幾何和(圖 3 a),就是由這兩個矢量所構成的平行四邊形的對角線(平行四邊形規則);不在一個平面上的三個矢量的幾何和,就是由它們所組成的平行六面體的對角線(圖 3 b)。

因爲折線的封閉線小於或等於折線的周界,所以幾何和的模小於或等於各項矢量的模的算術和:

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}|\leq|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{c}|+|\boldsymbol{d}|。$$

如果在作圖時,各項矢量構成封閉多邊形,那麼幾何和就等於零。這可以從定義 1 直接得出。因此,如果三個矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的幾何和等於零,那麼它們就可以構成三角形(圖 4)。

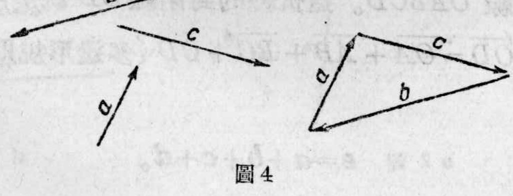

圖 4

問題 1. 設四邊形的對角線互相平分，證明它是平行四邊形(圖 5)。

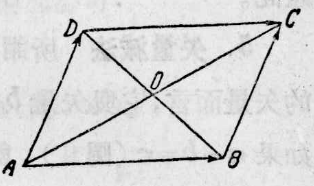

圖 5

解　按照已知條件可得矢量等式：$\overline{AO}=\overline{OC}$，$\overline{BO}=\overline{OD}$，由此可知 $\overline{AO}+\overline{OD}=\overline{BO}+\overline{OC}$，或 $\overline{AD}=\overline{BC}$。

這就是說，AD 與 BC 相等而且平行，亦即四邊形 $ABCD$ 是平行四邊形。

註：各項矢量可以不在一平面上。這樣我們的敘述仍舊正確，不必作任何改變，在這樣情況，所得折線不過是空間折線而已；圖 3b 就是這種情形。

4. 幾何和的性質　1° 幾何和與各項的次序無關。

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\text{（交換律）}$$

其實從圖 3 a 可以得到：

$$\overline{OB}=\overline{OA}+\overline{AB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\quad\text{及}\quad\overline{OB}=\overline{OC}+\overline{CB}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$$

即是

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$$

2° 在矢量幾何相加時，各項矢量可以結合成個別的組合。例如，

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})+\boldsymbol{d}$$

（結合律）

實際上，從圖 3 可得：

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overline{OB}\quad\text{及}\quad\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}=\overline{BD}$$

由此，

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})=\overline{OB}+\overline{BD}=\overline{OD}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}。$$

同樣，

$$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\overline{AC},$$

因此

$$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})+\boldsymbol{d}=\overline{OA}+\overline{AC}+\overline{CD}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d},$$

證訖。

5. 矢量減法 所謂兩個矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的幾何差是指這樣的一個新的矢量而言，它與矢量 $\boldsymbol{b}$（減數）的和等於矢量 $\boldsymbol{a}$（被減數），也就是說，如果 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$（圖 6），即得：

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}。$$

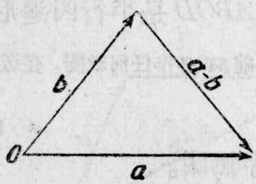

圖 6

由此可得矢量差 $\boldsymbol{c}$ 的如下的作圖法：

將 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 兩個矢量取共同始點 O，從矢量 $\boldsymbol{b}$ 的終點到矢量 $\boldsymbol{a}$ 的終點引一矢量，即得所求矢量差 $\boldsymbol{c}$（圖 6）。

幾何差的模大於或等於模的差：

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}| \geq |\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|。$$

因為任意三角形的一邊大於其他兩邊的差。

在平形四邊形中，有一個對角線是平行四邊形兩邊的幾何和；而另一對角線就是幾何差（圖 6 a）。所以兩個矢量的幾何差的模可以大

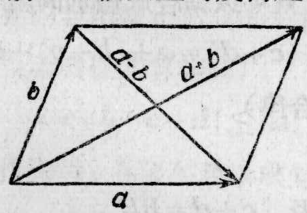

圖 6 a

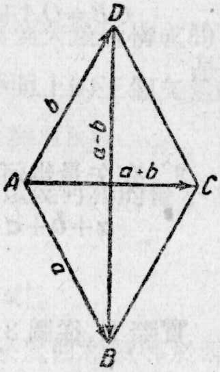

圖 6 b

於它們幾何和的模（圖 6 b）。

定義 與矢量 $\boldsymbol{a}$ 相逆的矢量稱為矢量 $(-\boldsymbol{a})$，它平行於矢量 $\boldsymbol{a}$，而且同模，但是指向相反（圖 7）。

從逆矢量的定義可以得到：

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=0。$$

定理　爲要減去矢量 $\boldsymbol{b}$，則與逆矢量 $(-\boldsymbol{b})$ 相加卽可：

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})。$$

證　設 $\overline{OB}=\boldsymbol{b}$　$\overline{AC}=(-\boldsymbol{b})$　$\overline{OA}=\boldsymbol{a}$（圖 7 a）。

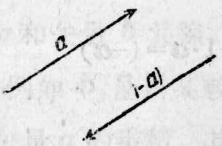

圖 7

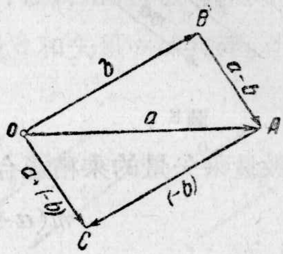

圖 7 a

當四邊形 $OBAC$ 的對邊 OB 與 AC 相等且平行時，也就是說我們的四邊形是平行四邊形。因此，

$$\overline{BA}=\overline{OC}，\text{但 } \overline{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}，\quad OC=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})，$$

卽是

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})，$$

故定理證訖。

從這個定理可以得到一個結論，就是矢量與代數中的數完全相當；特別是在幾何等式中，可以將個別項易號後，從等式一端移到另外一端。例如，如果

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{d} \quad \text{則} \quad \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{d}-\boldsymbol{c}$$

6. 用數量乘矢量的乘法　設有矢量 $\boldsymbol{a}$ 與數量 m。當以數量 m 乘矢量 $\boldsymbol{a}$ 時，矢量 $\boldsymbol{a}$ 的模改變 m 倍，而它的指向保持不變，或者變成反指向是決定於 m 的正負。在這樣的運算以後，可以得到新的矢量 $m\boldsymbol{a}$，稱爲數量 m 乘矢量 $\boldsymbol{a}$ 的乘積（圖 8）。我們可以得到：

$$|m\boldsymbol{a}|=|m|\ |\boldsymbol{a}|,$$

其中$|m|$是m的絕對值。圖 8 a 所表示的,是矢量 $3\boldsymbol{a}$ 與 $-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$, 它們是以數量 3 及 $-\frac{1}{2}$ 乘矢量 $\boldsymbol{a}$ 而得到的。

圖 8

用 -1 乘矢量 $\boldsymbol{a}$, 我們可以得到逆矢量$(-\boldsymbol{a})$:

$$-1\cdot\boldsymbol{a}=(-\boldsymbol{a})$$

用數量乘矢量的乘積適合分配律。

$$m(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=m\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}$$

亦卽,好像在普通代數中一樣,可以去括號。

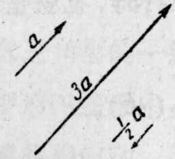

圖 8 a

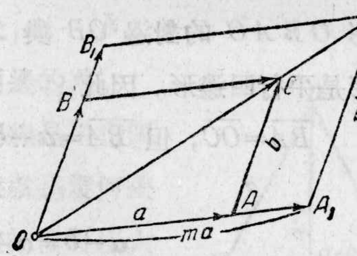

圖 8 b

實際上,我們有:

$$\overline{OA}=\boldsymbol{a},\qquad \overline{OA_1}=m\boldsymbol{a},$$

$$\overline{AC}=\boldsymbol{b},\qquad \overline{A_1C_1}=m\boldsymbol{b},$$

由此

$$OA_1=m\,OA\quad 及\quad A_1C_1=m\,AC_1,$$

亦卽三角形 $O\,A_1C_1$ 與 OAC 相似,因此可得:

$$OC_1=mOC,$$

因而我們可得矢量等式:

$$\overline{OC_1}=m\,\overline{OC}。$$

所以

$$m\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}=m(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})。$$

7. 共線矢量 位於平行線上的矢量稱爲共線矢量。

矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ (圖 9)彼此共線。它們可以同指向,也可以反指向。

根據數量乘矢量的乘積的定義,矢量$\boldsymbol{a}$和矢量 $m\boldsymbol{a}$ 共線。反之,如果矢量$\boldsymbol{a}$和矢量 $\boldsymbol{b}$ 共線, 那麽其中的一個,例如 $\boldsymbol{b}$,是用某數量m乘另外一個矢量 $\boldsymbol{a}$ 的乘積。其實, 先假設共線矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 同指向(圖 $9a$)。用 m 表示它們模的比例。

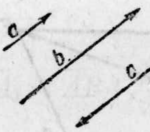

圖 9

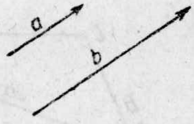

圖 9 a

$$m=\frac{b}{a}。$$

那麽矢量 $m\boldsymbol{a}$ 和矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 同方向;而且它的模等於:

$$\frac{b}{a}\cdot|\boldsymbol{a}|=b=|\boldsymbol{b}|$$

因此, $\boldsymbol{b}$ 與 $m\boldsymbol{a}$ 同模同方向, 亦卽它們互相幾何相等, 而這正意味着 $\boldsymbol{b}=m\boldsymbol{a}$。如果 $\boldsymbol{a}$ 與 $\boldsymbol{b}$ 反方向, 那麽數量乘數m應當是$-\dfrac{b}{a}$, 而我們的論述仍舊正確。

8. 單位矢量 現在我們來考察空間任意矢量$\boldsymbol{a}$。如 $\boldsymbol{a}^0$ 是與 $\boldsymbol{a}$ 同方向,但是它的模等於一單位: $|\boldsymbol{a}^0|=1$, 那麽, 就稱 $\boldsymbol{a}^0$ 爲在矢量$\boldsymbol{a}$方向上的單位矢量(圖 10)。我們有:

$$\boldsymbol{a}=a\cdot\boldsymbol{a}^0(a\text{ 是矢量 }\boldsymbol{a}\text{ 的模}),$$

因爲矢量 $a\cdot\boldsymbol{a}^0$ 是以矢量$\boldsymbol{a}$的方向爲方向,而且它的模等於

$$|a\cdot\boldsymbol{a}^0|=a|\boldsymbol{a}^0|=a。$$

單位矢量可以確定空間的方向;任何矢量 $\boldsymbol{a}$ 可以用矢量 $\boldsymbol{a}$ 的模乘

對應單位矢量 $\boldsymbol{a}^0$ 的乘積表示。

9. 共面矢量　位於同一平面的矢量稱爲共面矢量,而且預先假定它們有公共始點 O。

設 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 兩矢量不共線,那麽矢量 $\boldsymbol{c}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}$ 位於 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的平面內(m 與 n 是任意數量乘數)。例如在圖 11a 中給出 $2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 的作法。因此,矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 共面。

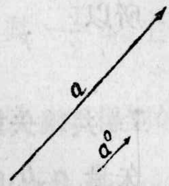

圖 10

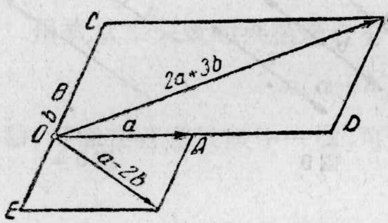

圖 11a

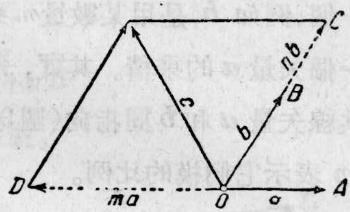

圖 11b

反之,如果三矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面,那麽總能找得兩數量 m 與 n,使

$$\boldsymbol{c}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}。$$

在圖 11b 的情形,$m=-\dfrac{OD}{OA}$;　$n=\dfrac{OC}{OB}$。

空間任意矢量 $\boldsymbol{d}$ 可以用下式表示:

$$\boldsymbol{d}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}+p\boldsymbol{c},$$

其中 $\boldsymbol{a}$ $\boldsymbol{b}$ $\boldsymbol{c}$ 是預先給出的三個不共面的矢量,而 m,n,p 是數量,亦卽空間任意矢量可分解爲三個平行於已知矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的組成矢量(圖 12)。

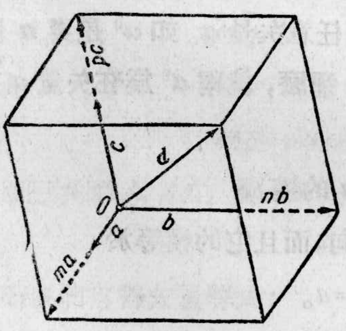

圖 12

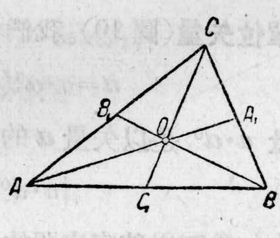

圖 13

問題 2. 證明，可作一三角形，各邊平行且等於已知三角形的中線。

解 設 A_1A, BB_1 及 CC_1 是已知三角形 ABC (圖 13)的中線，那麼 $\overline{BA_1}=\frac{1}{2}\overline{BC}$，因爲 $BA_1=\frac{1}{2}BC$。同樣

$$\overline{CB_1}=\frac{1}{2}\overline{CA} \qquad \overline{AC_1}=\frac{1}{2}\overline{AB},$$

由此

$$\overline{AA_1}=\overline{AB}+\overline{BA_1}=\overline{AB}+\frac{1}{2}\overline{BC}$$

$$\overline{BB_1}=\overline{BC}+\overline{CB_1}=\overline{BC}+\frac{1}{2}\overline{CA}$$

$$\overline{CC}=\overline{CA}+\overline{AC_1}=\overline{CA}+\frac{1}{2}\overline{AB}$$

而和式

$$\overline{AA_1}+\overline{BB_1}+\overline{CC_1}=\overline{AB}+\frac{1}{2}\overline{BC}+\overline{BC}+\frac{1}{2}\overline{CA}+\overline{CA}+\frac{1}{2}\overline{AB}$$

$$=\frac{3}{2}\left(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}\right)=0$$

可見，矢量 $\overline{AA_1}$，$\overline{BB_1}$ 及 $\overline{CC_1}$ 可以構成三角形。

10. 矢量的分量及射影 可以區別正負方向的無限直線稱爲軸。例如在解析幾何中，直線 Ox, Oy 及 Oz 是軸，因爲在它們上面具有正負方向。

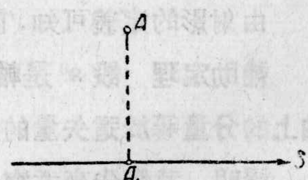

圖 14

A 點在 s 軸上的射影是自 A 點至射影軸 s 所作垂線 AA_1 的垂足(圖 14)。如果 A 點位於射影軸上，那麼，它的射影與其本身重合。

矢量 $\boldsymbol{a}$ 在 s 軸上的分量是矢量 $\overline{A_1B_1}$，它是由矢量 $\boldsymbol{a}$ 的兩端 A 及