

高等工业学校教学用书

高等数学教程

第一卷

陈 蘆 民 著



国防工业出版社

高等工业学校教学用书

高等数学教程

第一卷

陈 盖 民 著

国防工业出版社

413.07

441

存

本書是为工学院編写的教科書，內容分为四卷：解析几何、数学分析初步、数学分析的进一步发展、补充教材。前三卷是根据高教部教学大綱的要求而編写的，曾在北京工业学院試教过，約需200学时講完。最后一卷是为了某些专业的需要而編写的，內容包括：复变函数、拉氏变换、矩陣分析、概率論等等，約需32—80学时講完，隨各专业所需內容的不同而定。

書中特別注意难点的处理与基本概念的闡述。对于难点的处理，除用深入分析的方法外，也用分散难点的方法来減輕困难的程度。对于基本概念是按历史的发展或具体的分析与綜合来叙述的。此外，并通过概念的闡述来进行政治思想的教育。

高等数学教程

第一卷

陈景民著

*

国防·業品版社出版

北京市書刊出版业营业許可証出字第074号

北京新中印刷厂印刷 新华書店发行

*

850×1168 耗1/32·67/8印張·174千字

一九五八年五月第一版

一九五八年五月北京第一次印刷

印数：1—3,030册 定价：(10)1.10元

統一書号：13034·3

序

本書是为工学院編写的高等数学教科書，全書分为四卷，前三卷分別为：解析几何学、数学分析初步、数学分析的进一步发展。这三卷的内容系根据高教部教学大綱(350~380学时)的要求而編写的，曾在北京工业学院以190学时講完(第一卷44学时，第二卷76学时，第三卷70学时)，有的专业因为略去了該专业不要求的部分，以160学时講完。第四卷为补充教材，内容系根据某些专业的要求而編写的，其中包括复变函数、拉氏变换、福里哀变换、矩陣分析、概率論等等，約需32~80学时講完，随各专业需要的不同而定。这些項目为了便于不同的专业可以选讀起見，都尽可能彼此独立地加以叙述。

本書在編写时，曾力图遵循辯証唯物主义的認識途徑：“从生动的直观到抽象的思維，从思維到实践^①”，以及“实践、認識、再实践、再認識^②”来安排全書的内容。因为，实践是真理的标准，也是認識的基础，只有这样才能使学生获得理解而巩固的数学知識，不仅在其他課程的学习中可以灵活应用，而且在日后也能以此为基礎进一步地加以充实和扩大数学知識，以适应技术发展的需要。例如在叙述标积、矢积、行列式、导数、微分、不定积分、定积分、重积分、曲綫积分、曲面积分等等概念时，都从具体的問題加以分析、抽象、概括，引出它們的定义。不过，这些定义都只从一个具体事例引出，而不从多个事例引出，因为我認為：多举事例就会分散学生的注意力，反而不易掌握概念的本質屬性，与其在得出定义之前，多举事例，不如抽一部分事例放在得出定义之后来研究，使学生对于定义有更深刻、更巩固的印象，例如导数与定积分的概念我就是这样处理的。又如在一元函数微分学中，把微分法(認識)和它的

① 列宁：黑格尔“邏輯学”一書摘要(人民出版社1953年版，134頁)。

② 毛泽东选集第一卷295頁。

应用(实践)都交错地加以编排,使学生在循环往复的实践基础上逐步提高来学习微分学的基本理论(中值定理),并以函数作图与方程的近似解作为微分学总结性的实践,这是企图贯彻辩证唯物论的知行统一观的。在一元函数积分学中,把初等函数积分法的讨论放在定积分之后,使学生在前两章的实践基础上,来学习积分法理论,这也是企图贯彻知行统一观的。至于微分方程紧接在微积分学之后,作为微分法与积分法总结性的实践,一方面固然是贯彻上面的企图,而另一方面也是为了配合第三学期理论力学的应用才这样做的。

此外,我也拟定下面几条作为编写的原则:

(1) 贯彻爱国主义与国际主义的思想教育,并以辩证唯物主义的观点与方法来阐明基本概念与理论;

(2) 尽可能配合其它课程(如普通物理与理论力学)的进度,使数学在其它课程中得到及时的应用;

(3) 注意系统性与可接受性,并与中学的知识相衔接;

(4) 说理力求简明,举例须有目的,并且要简单而有说服力;

(5) 要深入分析难点或分散难点,以减轻读者的困难。

我对于以上各点,虽然曾尽过最大的努力,企图贯彻于万一,但是限于政治与业务的水平、学习苏联先进经验为时不久、编写时间又匆促,显然不能做到这些要求;即使有的地方,在主观上认为做到了一部分,可是恰当与否,仍有待于多次实践才能判定。譬如反函数概念与台劳公式都是读者的难点,我用详细分析的方法处理。换元积分法(§15.4)也是难点,我用分散的方法把它分为两种情形:抽出其中的一种作为积分形式不变性,来推广基本积分表的作用;其它一种仍作为换元法来处理使问题简单化。又对于有理函数积分法(§17.6)也用分散的方法:先在分解积分法(§15.4)中,通过举例作些预备功夫,然后在第十七章中进行有系统的讨论。以上所举难点的处理都只是一种尝试,不能遽然

認為恰當，尚有待於同志們的幫助與指正。

我在1950年，由於任課的需要，曾編過工學院的數學分析講義。但經過教學改革、學習蘇聯先進經驗、鑽研蘇聯教材與教學原理後，就發覺我的講義有進一步加以修改的必要。因此，根據我對學習的體會，提出前面的基本精神與編寫原則，並結合我國的具體情況，於1956年開始重行增刪原有講義，改名為“高等數學教程”。這次，接受國防工業出版社的建議，把它陸續印出來，向廣大同志們請求教益，希望同志們指出錯誤和缺點，以便再版時加以補充和修正。

在本書緒論中關於中國數學史部分，曾蒙科學院李儼先生指正；又本書在編寫過程中，北京工業學院數學教研組同志們曾給以很大的幫助，並于試教後提出很多寶貴的意見，謹向他們一併表示衷心的感謝。此外，國防工業出版社編輯徐家宗同志在整理本書原稿時，曾提供了許多建議，特向他表示深切的謝意。

陳蓋民

1958年2月於北京

第一卷

目次

序.....	1
緒論	1

第一編 平面解析几何学

第一章 坐 标 法

第一节 实数.....	13
§ 1.1 引言.....	13
§ 1.2 实数与数轴 数轴上一点的坐标.....	14
§ 1.3 有向綫段及其在轴上的值.....	17
§ 1.4 实数的绝对值.....	20
§ 1.5 实数的区間.....	22
§ 1.6 近似值与誤差.....	23
第二节 直角坐标与几何量的解析表示.....	25
§ 1.7 平面上一点的坐标.....	25
§ 1.8 两点的距离.....	27
§ 1.9 綫段的定比分点.....	28
§ 1.10 直綫的斜角与斜率.....	30

第二章 曲綫与方程

§ 2.1 曲綫的方程 圓的方程.....	32
§ 2.2 方程的軌迹描法.....	34
§ 2.3 用比較法判定方程的軌迹.....	39

第三章 直 綫

§ 3.1 直綫方程的各种形式.....	42
§ 3.2 綫性函数的图形为直綫.....	44
§ 3.3 直綫的一般方程.....	45
§ 3.4 直綫方程的法綫式.....	47

§ 3.5	由直線到一点的离差与距离	49
§ 3.6	两条直線的夹角 垂直与平行的条件	51
§ 3.7	直線束	53

第四章 圓錐曲綫

第一节	圓錐曲綫的基本理論	57
§ 4.1	橢圓的定义与标准方程	57
§ 4.2	橢圓形状的研究 离心率	59
§ 4.3	双曲綫的定义与标准方程	62
§ 4.4	双曲綫形状的研究	63
§ 4.5	双曲綫的渐近綫 离心率	65
§ 4.6	等軸双曲綫与其軛双曲綫	68
§ 4.7	方程 $Ax^2 + By^2 = C$ 的討論	69
§ 4.8	抛物綫	71
§ 4.9	橢圓及双曲綫的准綫	74
§ 4.10	圓錐曲綫的定义与方程	77
第二节	坐标变换	79
§ 4.11	引言	79
§ 4.12	平移公式	80
§ 4.13	旋轉公式	83
§ 4.14	反比关系的图形为等軸双曲綫	84
§ 4.15	二次三項式的图形为抛物綫	84
第三节	一般二次方程的討論	85
§ 4.16	引言	85
§ 4.17	缺 xy 項的二次方程的軌迹	86
§ 4.18	一般二次方程的軌迹	88

第五章 参量方程

§ 5.1	直角方程与参量方程的概念	92
§ 5.2	橢圓的参量方程	94
§ 5.3	直線的参量方程	95
§ 5.4	摆綫的参量方程	96
§ 5.5	参量方程与直角方程的关系	97

第六章 极坐标 曲綫的分类

§ 6.1	平面上一点的极坐标	101
-------	-----------	-----

§ 6.2	曲綫的极方程 圓錐曲綫的极方程	103
§ 6.3	极坐标与直角坐标的互換公式	105
§ 6.4	极坐标中的对称性及作图	107
§ 6.5	螺綫	111
§ 6.6	曲綫的分类	113
§ 6.7	平面解析几何的結束語	115

第七章 行列式及綫性方程組

§ 7.1	二阶行列式与二元綫性方程組	117
§ 7.2	三阶行列式的定义及展开法	121
§ 7.3	三阶行列式的主要性質	124
§ 7.4	n 阶行列式的概念	127
§ 7.5	三元綫性方程組	128
§ 7.6	齐次綫性方程組	135

第二編 空間解析几何学

第八章 矢量代数学基础

第一节	点及矢量的坐标	140
§ 8.1	投影法的基本定理	140
§ 8.2	空間一点的直角坐标	141
§ 8.3	两点的距离 定比分点的坐标	146
§ 8.4	矢量的表示法 矢量的相等	148
§ 8.5	矢量的坐标、模及方向余弦	150
第二节	矢量的綫性运算	151
§ 8.6	矢量加法	151
§ 8.7	矢量減法	153
§ 8.8	实数与矢量相乘的定义及运算律	154
§ 8.9	矢量的坐标表达式	155
第三节	矢量的乘积	157
§ 8.10	两个矢量的标积及其性質	157
§ 8.11	标积的坐标表达式 两个矢量的夹角	159
§ 8.12	两个矢量的矢积及其性質	162
§ 8.13	矢积的坐标表达式	165

§ 8.14	三角形的面积	167
§ 8.15	三个矢量的乘积	168
§ 8.16	三个矢量的交错积及其几何意义	168
§ 8.17	二重矢积的性质及算法	170

第九章 空间的曲面及曲线

第一节	曲面及曲线的方程	172
§ 9.1	曲面方程的概念	172
§ 9.2	球面与二次方程的关系	174
§ 9.3	柱面与二次柱面	175
§ 9.4	回转面	177
§ 9.5	曲线方程的概念	179
§ 9.6	曲线的参量方程	180
第二节	平面与直线	182
§ 9.7	引言	182
§ 9.8	平面方程的点法式及一般形式	182
§ 9.9	平面方程的截距式及法线式	183
§ 9.10	平面到一点的距离及离差	188
§ 9.11	两个平面的夹角	190
§ 9.12	平面束	191
§ 9.13	直线方程的各种形式	192
§ 9.14	两直线的夹角	194
§ 9.15	直线与平面的交角及交点	196
第三节	二次曲面	198
§ 9.16	研究方程的轨迹的初等方法 椭圆面	198
§ 9.17	曲面的分类	201
§ 9.18	单叶双曲面	204
§ 9.19	双叶双曲面	206
§ 9.20	椭圆抛物面	207
§ 9.21	双曲抛物面	208
§ 9.22	锥面与二次锥面	209
§ 9.23	二次曲面的结论	212

緒 論

§ 1 恩格斯的数学定义

数学的研究对象是什么？这是数学的哲学問題，哲学观点不同的人就有不同的答案。唯心論的哲学家与数学家，如英国的罗素^①，他說：“数学是永远不知道所談論的是什么，也不知道所說的是否真实的一种科学。”他把数学看作是癡人說梦的科学，既不知道所談的是什么，又不知道所說的是真是假。这种荒誕无稽的說法，显然是不可知論者的本来面目，不能作为科学的数学定义。其他数学家，如美国的皮尔斯^②，他想不涉及数学的对象，只从数学的方法給数学下定义。他說：“数学是推出必然的結論的科学。”这种說法不仅犯了定义太寬的邏輯錯誤，也未脫唯心論者空洞无际的窠臼，自然也不能作为数学的定义。德国著名数学家克萊因^③曾反对这种唯心的看法，他說：“把数学的研究对象看作是空虛的記号，这是一切科学报死的鐘声。”他也同意托馬教授。把那些只研究抽象記号的扩張，而不注意記号的实际意义的人，給以“无思想的思想家”的称号。但是，克萊因并没有提出他的数学定义。我們認為恩格斯所說的：

数学是以现实世界的空間形式与数量（注1）关系为对象的科学。这是最正确的数学定义。我們知道，任何一門科学都是遵

① 見B. Russell: International Monthly, Vol. 4, 1901, p. 84。

② 見J. W. Young: Lectures on fundamental concepts of algebra and geometry, "Definition of Peirce and Russell".

③ F. Klein: Elementarmathematik Vom höheren Standpunkte aus, Band II, 384頁。

循邏輯方式：由簡單到複雜，由具體到抽象，在抽象中把握自己的對象再向抽象的理論而發展的。恩格斯的定義，就具有這樣的邏輯性。又從歷史上來看，任何一門科學的對象，不是永恒不變的，它是隨着社會生產的活動和其他科學的發展而發展的。恩格斯的定義，也具有這種歷史性。恩格斯提出這個定義的時候，離現在雖然有半個世紀以上，數學已有非常迅速的發展，但是，他的定義仍能隨着數學的發展而得到日益豐富的含義。

蘇聯數學家科爾莫果洛夫院士，在他為蘇聯大百科全書而寫的數學論文中，把數學對象的發展分為三個階段來闡明恩格斯的定義的邏輯性和歷史性，已引起數學界普遍地贊同。他把17世紀以前的時期作為數學發展的第一階段：數學的對象為數、量和幾何圖形；19世紀初期以前作為第二階段：數學的對象為量的變化和幾何圖形的變換；19世紀中期以後為第三階段：數學的對象為現實世界最一般性的數量形式和空間形式。恩格斯的定義，就包含了這三個不同的發展階段，所以，我們認為它是最正確而最令人滿意的一個定義。現在我把這三個階段，再在下一目中，作一簡要的說明，以助理解，並供以後參考。

§2 數學發展的三個階段

數學不僅因人類生活的需要而產生，也因人類生活的發展而發展。人類在原始共產社會時代，曾有一個極其漫長的時期，過着採集、漁獵和畜牧的生活。由於這種生活都具有數量關係，就引起人們對於數量發生了多寡的心理活動，因而不自覺地用了“一一对应（注2）”與“數一數”的方法來處理數量問題而得到量與數的概念。例如計算牲畜的多寡時，就在人們的意識中留下一頭牛、二頭牛、…，一隻羊、二隻羊、…等帶有事物名稱及單位的數量；或一頭、二頭、…，一隻、二隻、…等僅帶有單位名稱的數量，形成了數量的感性認識。人們凭借這種感性認識，又在實踐中，經過邏輯的思考，把單位名稱去掉，得到1, 2,

3, 4, …等数的概念, 同时, 也得到量的概念。

概念是在感性認識的基础上发展起来的。它是人們对于事物的理性認識。它所反映的, 不是事物的一切为感官所达到的屬性, 而是經過人們的思考, 从事物中抽出来的本質屬性, 非本質屬性并不包含在概念中, 例如单位与事物的名称就不包含在数的概念中。由于数是量的最抽象的表现, 所以就产生了数学家高斯, 黎曼以及狄德項等人附和哲学家康德 (注3) 的唯心看法, 認為数是先驗概念 (即在經驗之前, 已經有的先天概念。) 以及数学家克郎內克^①認為整数是上帝所創造的其它的数是人創造的等等荒謬說法。

我国是世界上文明发达最早的国家之一, 对于各門科学都有偉大的貢獻, 据說: 在公元前一万七千年, 我們祖先已有天文的知識^②。天文历法是和数学有密切关系的, 由此可知, 在很远的年代, 我們祖先也有数学的知識。但因缺乏可信的史料, 詳細情况不得而知了。我們祖先遗留下来的数学書, 最古的有周髀算經和九章算術 (注4), 它們是公元前100年前后的作品, 但是, 原本早已失傳, 現在所流傳的都是經過后人修改和补充过的。这两本数学書都总結了我国过去劳动人民由于生产斗争而获得的算术, 代数, 几何及三角的宝贵知識。其內容系依实用的需要而分类, 并且处处表现出数学与实际生活相联系的精神。

我国在数学上的成就, 有許多方面都比其他各国来得早。例如:

(一) 关于正負数的概念和运算方面: 在九章算術的第八章“方程”中, 就有正負数的加減法則; 又在朱世杰著的算術启蒙 (公元1299) 中, 还有正負数的乘除法則。而印度到了七世紀才有正負数的加減法則。欧洲大陆的数学家在16世紀时, 还不了解

^① 見 F. Cajori: A History of mathematics (1919年), p.362.

^② 見李儼著: 中国算术小史, 第3頁。

正負数的意义。德国的代数学家史蒂費尔(注5)在1544年还说:負数是不合理或虛构的数,尤其两个負数相乘应当是正数,更使許多数学家觉得惊奇。后来法国笛卡儿在他所著的解析几何学中,把負数用之于坐标法,才認負数也是实在的数。

(二)关于 π 的近似值方面:我国数学家对于圓周率的研究也是很早的,到了南齐、祖冲之(429~500),他用綴术(已失傳)就求得 π 的值在3.1415926与3.1415927之間,并定 $\pi = \frac{355}{113}$ 叫做密率; $\pi = \frac{22}{7}$ 叫做約率。其中的密率,在西方国家中,要到1000余年后才由德人渥图求出(1573年)。

(三)关于插值法方面:在九章算术的第七章“盈朒”中,就有直綫插值法(就是高中代数第七章“对数”中的补插法),后来,刘焯(544~610)推广到二次曲綫插值法,郭守敬(1231~1316)又推广到高次曲綫插值法。在西方各国中,英国的华利士(1616~1703)首先用插值法研究 π 的值就比我們晚了一千多年。

(四)关于方程的解法方面:祖冲之应用九章算术中的开方法,求得一般二次方程及三次方程的正根,以及王孝通的三次方程的解法,都比阿拉伯人阿尔卡利斯密(注6)的解法早数百年。宋、刘益在他著的議古根源中(約1080年,已失傳),提出高次方程的解法,后經賈宪加以改良,这和英人和涅在1819年所发现的方法相同。但比刘益、賈宪已晚了六七百年。

印度、埃及和希腊等也是世界上文明发达很早的国家。埃及的測地术(几何的經驗知識),在公元前六七世紀時傳到希腊,希腊人就在这种感性知識的基础上,經過分析,抽象并不断地研究了一些个别問題(例如上古几何学三大問題,見本緒論末注7),而发展成为有系統的几何学,編成几何原本。几何原本中,以欧几里得所編的內容为最丰富而組織最严密,因此,数学界曾以欧几里得作为几何学的代名詞来紀念这位偉大的几何学家。

印度在公元一世紀時，就和我國交流文化，特別是七世紀以後，由於佛教傳入我國，對於數學也發生過影響。印度在數學發展的第一階段中，對於代數和三角都有特別的貢獻。從八世紀起，印度與希臘的重要數學書都由阿拉伯數學家譯成阿拉伯文；於是古代東方與希臘的數學文化就匯合在阿拉伯，到了十一世紀末，十字軍東征後，阿拉伯的數學，又不斷地傳入歐洲，譯成拉丁文。那時的歐洲，正從黑暗時代走向近代市民社會，隨着生產的發展，需要科學日益迫切，於是數學在第一階段形成的數、量與幾何圖形的概念以及算術、代數、幾何、三角等初等數學就在歐洲轉入第二階段發展。

數學發展的第二階段，可以說是從1637年解析幾何的出版開始，它的特徵在於引入了運動與變化的概念，以及形與數的結合。它和第一階段以靜止與孤立的觀點研究數與形，有着顯明的不同。恩格斯在自然辯證法中說：“笛卡兒的變量是數學中的轉折點，運動與辯證法因此就進入了數學，微分法與積分法也因此慢慢成為必要的東西，於是，不久就產生了微積分。”這也說明了由第一階段轉入第二階段的特徵。數學在第二階段中，由於辯證法的引入，它就比較完善地反應了現實世界的空間形式和數量關係。它不僅直接地為社會生活服務，也通過力學、物理學和技術科學促進生產的發展，同時，自然科學與技術科學也不斷地提出新的數學問題，推動數學的發展，給數學轉入第三階段的發展準備了良好的條件。

數學發展的第三階段是從19世紀下半期開始的，它的特徵在於數學的對象推廣到更高度的普遍化與抽象化，使過去已認為很抽象的對象也成為現在對象的特殊形式，並且數學自己的各部門也進一步地密切交融起來。

§3 實踐是真理的標準

數學對象的高度抽象化是不是還能反映客觀的實際情況呢？

这可以由实践来证明。譬如黎曼几何应用于相对论，抽象代数与希氏空间应用于量子力学，量子力学与相对论又应用于原子能的研究，而原子能又应用于医学、农业、工业并由苏联建设起世界上第一座的原子能发电站、第一艘原子能破冰船以及在设计中的原子能飞机，这些都证明了数学的抽象化更能接近客观实际的实际情况。

实践是真理的标准，是马列主义哲学的认识论的基本原理之一。马克思在费尔巴哈论纲中曾经指出：“人的思维是否具有客观的真确性，这个问题并不是一个理论的问题，而是一个实践的问题。人应该在实践中证明自己思维的真确性，即自己思维的现实性和力量，亦即自己思维的此岸性。关于离开实践的思维是否现实的争论，乃是一个纯粹烦琐哲学的问题^①。”毛主席在实践论中也说：“通过实践而发现真理，又通过实践而证实真理而发展真理。…实践、认识、再实践、再认识，这种形式，循环往复以至无穷，而实践和认识之每一循环的内容，都比较地进到高一级的程度。这就是辩证唯物论的全部认识论，这就是辩证唯物论的知行统一观^②。”我们从数学的发展史来看，也证明：实践在人类认识过程中的主导作用。譬如负数的概念，初由阿拉伯传到欧洲时，有许多数学家不能理解，后经数世纪的实践，就逐渐认识了这个概念并发展它的作用。又如虚数在16世纪中叶是由于求方程的解而发生的。从它的命名，可知在当时并不知道它也是反映客观现实的量，经过数学家数世纪的实践，到了19世纪初，才完全明白，并建立了复变函数论的一门数学。后来俄国力学家茹可夫斯基（1847~1922）又应用复变函数论创造了飞机翼的理论。数学史上还有许多实例，都可以证实列宁和毛主席的指示，所以我们学习数学，既不可以犯教条主义，也不可以犯经验主

① 见马克思恩格斯文选（两卷集），第二卷，401页。

② 见毛泽东选集，第一卷，285页。

义，必須以“認識与实践統一”的观点来学习。

§4 初等数学与高等数学的区别

通常所謂初等数学是指中学的算术，初等代数，初等几何及三角等科目而言，其它的数学科目都是高等数学。但这不是根据数学本身某一特性而划分的，所以，这不是数学的分类，这只是数学教育上的习惯語。現在从观点与方法两方面指出它們的特征如下。

第一：初等数学是以靜止的观点研究对象，而高等数学是以运动的观点研究对象的。初等数学的对象是不变的数量与不变的图形。高等数学的对象是变化的量和变化的图形。

初等数学是以孤立观点研究对象的，因此，初等代数与初等几何就各自独立地建立起来，也各自独立地向前发展，并没有一个基本原理把数与形結合起来。但是，高等数学就与此相反。

第二：高等数学常用极限方法来研究它的对象。极限是以动的，有联系的，以及量变引起質变的观点研究数量变化的一种方法。它是高等数学的重要方法，沒有它，就沒有高等数学，但是初等数学沒有它，并不受影响。

总起来简单地講：初等数学的研究对象是常量，高等数学的研究对象是变量。但这并不是說高等数学中沒有常量。我們應該知道：常量与变量是对立統一、互相依存、互相轉化的。它們在高等数学中都是一样的重要。只不过变量是占主导地位，所以我們就說高等数学的研究对象是变量。在下一目，再把它們詳細地講一講，这对于以后的学习是有很大帮助的。

§5 常量与变量

量是客观事物的屬性之一，它常表现出可以被測量而得到数。所以，凡是可测量的对象都叫做量。例如：长、寬、面积、体积、温度、時間、速度、加速度，以及电路中的电压、潤滑油的