



# 重难点手册

- ★四千万学子的制胜宝典
- ★八省市名师的在线课堂
- ★十六年书业的畅销品牌

新课标

配北师大版

## 高中数学1 (必修)

蔡上鹤 主审

汪江松 主编



## 汪江松

### 教授(编审)

《中学数学》杂志主编，湖北大学硕士研究生导师，湖北省奥林匹克学校校长，中国优选法统筹法研究会理事，全国初等数学研究会副理事长，“希望杯”全国数学邀请赛组委会常委，湖北省科技期刊专家委员会委员，湖北省中学教师培训专家库成员，华中师范大学出版社特聘作者。长期从事数学教学和数学教育研究工作。出版有《初高中数学重难点手册》(该丛书出版16年来多次荣获优秀畅销书奖)、《高中数学解题方法与技巧》、《趣味数学》(丛书)、《几何明珠》、《成功数学新捷径(初中)》、《初中数学竞赛讲座》等著作40余部。在《数学通报》、《数学教育学报》、《湖北大学学报》、《山东教育》、《编辑学刊》、《科学进步与对策》、《中学数学》、《数学通讯》等20余家刊、报上发表论文50余篇，其中多篇论文被全文转载或获得湖北省数学学会优秀论文奖和湖北大学科研奖。

#### 《超级课堂》同步专题系列

数学(必修1、2、3、4、5)  
数学(选修2-1)  
数学(选修2-2)  
数学(选修2-3)  
物理(必修1、2)  
物理(选修3-1)  
物理(选修3-2)  
物理(选修3-3)  
物理(选修3-4)  
物理(选修3-5)  
化学(必修1、2)  
化学(物质结构与性质)  
化学(化学反应原理)  
化学(有机化学基础)  
化学(实验、技术与生活)  
生物(必修1、2、3)  
地理(必修1、2、3)

#### 《超级课堂》培优竞赛系列

数学(七、八、九年级)  
物理(八、九年级)  
英语(七、八、九、十、十一、十二)  
英语(八、九、十、十一、十二)  
英语(九、十、十一、十二)  
英语(九、十、十一、十二)  
英语(九、十、十一、十二)  
化学(九、十、十一、十二)

#### 《重难点手册》高中新课标版部分

数学(必修1、2、3、4、5/人教A版)  
数学(选修2-1、2-2、2-3/人教A版)  
数学(必修1、2、3、4、5/苏教版)  
数学(选修2-1、2-2、2-3/苏教版)  
数学(必修1、2、3、4、5/北师大版)  
数学(选修2-1、2-2、2-3/北师大版)  
物理(必修1、2/粤教版)  
物理(必修1、2/人教版)  
物理(选修3-1、3-2、3-3、3-4、3-5/人教版)  
化学(必修1、2/鲁科版)  
化学(必修1、2/人教版)  
化学(选修3 物质结构与性质/人教版)  
化学(选修4 化学反应原理/人教版)  
化学(选修5 有机化学基础/人教版)  
化学(选修6 实验化学/人教版)  
化学(必修1、2/苏教版)  
化学(选修3 物质结构与性质/苏教版)  
化学(选修4 化学反应原理/苏教版)  
化学(选修5 有机化学基础/苏教版)  
化学(选修6 实验化学/苏教版)  
生物(必修1、2、3/人教版)

#### 《重难点手册》初中新课标版部分

数学(七年级上册/人教版)  
数学(七年级下册/人教版)  
数学(八年级上册/人教版)  
数学(八年级下册/人教版)  
数学(九年级上册/人教版)  
数学(九年级下册/人教版)  
英语(七年级上册/人教版)  
英语(七年级下册/人教版)  
英语(八年级上册/人教版)  
英语(八年级下册/人教版)  
英语(九年级全一册/人教版)  
物理(八年级上册/人教版)  
物理(八年级下册/人教版)  
物理(九年级全一册/人教版)  
化学(九年级上册/人教版)  
化学(九年级下册/人教版)

#### 《初中数学竞赛同步辅导》

七年级数学竞赛同步辅导  
八年级数学竞赛同步辅导  
九年级数学竞赛同步辅导

ISBN 978-7-5622-3912-3



9 787562 239123 >

定价: 14.00元

责任编辑/张桂娜

责任校对/刘 峥

封面设计/新视点



# 重难点手册

配北师大版

## 高中数学1 (必修)

主 审 蔡上鹤

主 编 汪江松

- ★四千万学子的制胜宝典
- ★八省市名师的在线课堂
- ★十六年书业的畅销品牌



华中师范大学出版社

# 新出图证(鄂)字 10 号

## 图书在版编目(CIP)数据

重难点手册——高中数学 1(必修)(配北师大版)/汪江松 主编.

—武汉:华中师范大学出版社,2009.7

ISBN 978-7-5622-3912-3

I. 重… II. 汪… III. 数学课-高中-教学参考资料

IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 051435 号

---

## 重难点手册——高中数学 1(必修)(配北师大版)

---

主编:汪江松

选题策划:第一编辑室

责任校对:刘 峥

编辑室:第一编辑室

出版发行:华中师范大学出版社 ©

社址:武汉市珞喻路 152 号

销售电话:027-67863040 027-67867371 027-67867076

传真:027-67863291

网址:<http://www.ccnpublish.com>

印刷:湖北科学技术出版社黄冈印刷厂

字数:256 千字

开本:880mm×1230mm 1/32

版次:2009 年 7 月第 1 版

定价:14.00 元

责任编辑:张桂娜

封面设计:新视点

咨询电话:027-67867361

邮购电话:027-67861321

电子信箱:[hscbs@public.wh.hb.cn](mailto:hscbs@public.wh.hb.cn)

督印:章光琼

印张:8.25

印次:2009 年 9 月第 2 次印刷

欢迎上网查询、购书

---

敬告读者:为维护著作人的合法权益,并保障读者的切身利益,本书封面采用压纹制作,压有“华中师范大学出版社”字样及社标,请鉴别真伪。若发现盗版书,请打举报电话 027-67861321。

# 目 录

第一章 集 合 .....	(1)
§1 集合的含义与表示 .....	(1)
§2 集合的基本关系 .....	(13)
§3 集合的基本运算 .....	(21)
3.1 交集与并集 .....	(21)
3.2 全集与补集 .....	(31)
第一章综合评价 .....	(40)
第二章 函 数 .....	(43)
§1 生活中的变量关系 .....	(43)
§2 对函数的进一步认识 .....	(45)
2.1 函数的概念 .....	(45)
2.2 函数的表示法 .....	(58)
2.3 映射 .....	(70)
§3 函数的单调性 .....	(78)
§4 二次函数性质的再研究 .....	(89)
§5 简单的幂函数 .....	(98)
第二章综合评价 .....	(111)
第三章 指数函数和对数函数 .....	(115)
§1 正整数指数函数 .....	(115)
§2 指数扩充及其运算性质 .....	(119)
§3 指数函数 .....	(127)
§4 对数 .....	(141)
§5 对数函数 .....	(155)
§6 指数函数、幂函数、对数函数增长的比较 .....	(173)
第三章综合评价 .....	(178)



第四章 函数应用 ..... (183)

    §1 函数与方程 ..... (183)

    §2 实际问题的函数建模 ..... (195)

    第四章综合评价 ..... (210)

参考答案与提示 ..... (214)

(1) ..... 合集第一章

(1) ..... 示定义域的合集 1.2

(13) ..... 系关系的合集 2.2

(15) ..... 映射关系的合集 3.2

(21) ..... 集合的交集 1.3

(31) ..... 集合的并集 1.3

(40) ..... 集合的补集 1.3

(43) ..... 函数的概念 第二章

(43) ..... 关系量变中的函数 1.2

(45) ..... 对函数的认识 2.2

(45) ..... 函数的性质 2.1

(52) ..... 函数的表示法 2.2

(70) ..... 映射 2.3

(78) ..... 映射的性质 2.3

(80) ..... 映射的表示法 2.4

(88) ..... 映射的表示法 2.2

(111) ..... 映射的概念 第二章

(115) ..... 映射的概念 第三章

(115) ..... 映射的概念 1.2

(119) ..... 映射的概念 2.2

(137) ..... 映射的概念 3.2

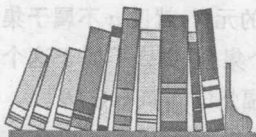
(141) ..... 映射的概念 4.2

(152) ..... 映射的概念 5.2

(153) ..... 映射的概念 6.2

(157) ..... 映射的概念 第三章

# 第一章



# 集 合



## 集合的含义与表示



### 课程目标点击

1. 初步理解集合的概念,掌握常用数集及其记法.
2. 理解元素与集合的关系,会判断某一元素“属于”或“不属于”某一集合.
3. 了解集合的常用表示方法,学会用列举法和描述法来表示集合.
4. 理解有限集、无限集、空集的概念,并注意  $0$ 、 $\{0\}$  及空集之间的关系.
5. 能结合日常生活中的一些具体事例来感受和理解集合的含义,体会并逐步熟悉集合语言的特点,并会用集合的语言来描述生活中的某些现象或事物.



### 重点难点突破

#### 1. 集合与集合的元素

##### (1) 集合与元素

指定的某些对象的全体称为集合,集合中的每个对象叫作这个集合的元素.如:

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\},$$

$$B = \{(x, y) \mid y = 2x - 1\},$$

$$C = \{\text{鼠, 牛, 虎, 兔, 龙, 蛇, 马, 羊, 猴, 鸡, 狗, 猪}\},$$

$$D = \{\text{北京, 哈尔滨, 长春, \dots, 上海, 武汉, \dots, 香港, 澳门, 台北}\}.$$

其中  $A$  为所有正奇数的集合,  $B$  为直线  $y = 2x - 1$  上点的集合,  $C$  为十二生肖的集合,  $D$  为全国各省省会、直辖市及特区城市的集合.

一般地,集合用大写字母表示,组成集合的元素用小写字母表示.集合与元素之间的关系是“集体”与“个体”之间的关系.如果 $a$ 是集合 $A$ 中的元素,就说 $a$ 属于集合 $A$ ,记作 $a \in A$ ;如果 $a$ 不是集合 $A$ 中的元素,就说 $a$ 不属于集合 $A$ ,记作 $a \notin A$ .对于某一个集合,元素要么属于这个集合,要么不属于这个集合.如 $5 \in A, 6 \notin A; (2, 3) \in B, (1, 3) \notin B$ ;大象 $\notin C$ ;福州 $\in D$ ,黄石 $\notin D$ .

**注意** (1) 符号“ $\in$ ”与“ $\notin$ ”是用来表示元素与集合之间的关系的符号;  
(2)  $a \in A$ 与 $a \notin A$ 两种情况,有且仅有一种成立.

## (2) 常用的数集及记法

数的集合简称数集.

自然数集(非负整数集),记作 $N$ ;

正整数集,记作 $N^*$ 或 $N_+$ ;

整数集,记作 $Z$ ;

有理数集,记作 $Q$ ;

实数集,记作 $R$ .

## 2. 集合的三种特性

### (1) 确定性

一组对象是否构成集合,其判定标准首先就得看这组对象是否是确定的.如“所有的胖子”这组对象就不是确定的,因为如何定义“胖子”没有确定的标准.

### (2) 互异性

这里所说的互异性即教材中所说的“不同的对象”,集合中所有的元素彼此是不能相同的,在今后的解题中要特别注意这一点.

### (3) 无序性

由集合的定义可知,其关键是确定性和互异性,一旦集合确定,集合中的元素可以随意排列,如“高一(1)班的全体同学”形成的集合与教室中座位的安排无关.集合 $\{a, b, c, d\}$ 与 $\{d, b, c, a\}$ 是同一个集合.

**例 1** 下列所给对象不能构成集合的是( ).

(A) 平面内的所有点

(B) 平面直角坐标系中第一、三象限角平分线上的所有点

(C) 清华大学附中高一年级全体女生

(D) 所有高大的树

**【解】** “高大”没有确定的标准.

**答案**

D



**例 2** (2006·宁波联考)在数集 $\{2x, x^2-x\}$ 中,实数 $x$ 的取值范围是

**【解】**依元素的互异性知, $2x \neq x^2-x$ ,即 $x(x-3) \neq 0$ ,得 $x \neq 0$ 且 $x \neq 3$ ,即 $x$ 的取值范围是 $x \neq 0$ 且 $x \neq 3$ 的任何实数.

### 3. 集合的表示法

#### (1) 列举法

列举法就是把集合中的元素一一列举出来,并写在大括号内的方法.

如前面所说的 $A = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$ ,  $D = \{\text{北京, 哈尔滨, 长春, \dots, 上海, 武汉, \dots, 香港, 澳门, 台北}\}$ 都属于列举法.

对于含有限个元素的集合(叫有限集),通常用列举法.

**注意** (1) 对于含无限个元素的集合(叫无限集)用列举法表示时应呈现集合的规律,如 $A = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$ ,就表示正奇数的集合;

(2) 对于元素较多的有限集,应注意省略号的正确应用,如 $B = \{1, 3, 5, 7, \dots, 999\}$ ,就表示1000以内的正奇数.

#### (2) 描述法

用确定的条件把集合中元素的公共属性描述出来叫描述法.

描述法常见的有:文字语言描述,符号语言描述,图形语言描述.例如:

①  $B = \{\text{直线 } y = 2x - 1 \text{ 上所有的点}\}$ 就为文字语言描述;②  $B = \{(x, y) | y = 2x - 1\}$ 就为符号语言描述;③ 在平面直角坐标系内画出直线 $y = 2x - 1$ 的图像,就为图形语言描述.不管用哪种语言描述,都必须做到简明、准确,不产生歧义.

#### (3) 正确地理解集合 $\{x | p(x)\}$ 的含义

对于描述性的集合,常用 $\{x | p(x)\}$ 的形式表示,其中“ $x$ ”为集合的代表“元素”,“ $p(x)$ ”描述元素 $x$ 遵循的规律或所具有的性质.

显然,当 $p(x)$ 不同时,它表示不同的集合,如 $M = \{x | y = x^2 + 1\}$ 与 $N = \{x | y = 2x + 1\}$ 是不同的集合.

当元素 $x$ 不同时,它也表示不同的集合.

**注意** 集合 $A = \{y | y = x^2 - 1\}$ ,  $B = \{x | y = x^2 - 1\}$ ,  $C = \{(x, y) | y = x^2 - 1\}$ 的区别:集合 $A$ 的代表元素是 $y$ ,它表示函数 $y = x^2 - 1$ 的值域,即 $\{y | y \geq -1\}$ ,为一数集;集合 $B$ 的代表元素是 $x$ ,它表示抛物线 $y = x^2 - 1$ 上任意一点的横坐标所具有的性质,也就是函数 $y = x^2 - 1$ 的定义域,即 $\{x | x \in \mathbf{R}\}$ ,也是

数集;而集合  $C$  中的代表元素是有序实数对  $(x, y)$ , 它表示的是点, 所以集合  $C$  是点的集合, 这个集合的几何图形就是抛物线  $y = x^2 - 1$  的图像. 它们是三个意义完全不同的集合, 这是初学者应当多加区分和注意的一个问题.

#### 4. 关于空集 $\emptyset$

##### (1) 空集的概念

我们把不含有任何元素的集合叫作空集, 记作  $\emptyset$ . 例如:  $\{x \in \mathbf{R} | x^2 + 1 = 0\} = \emptyset, \{x \in \mathbf{R} | x^2 < 0\} = \emptyset$ , 两条平行直线的交点也是空集.

##### (2) $0, \{0\}, \emptyset$ 的相互关系

$0$  是元素,  $\{0\}$  是以  $0$  为元素的集合,  $\emptyset$  中无任何元素. 因此  $0 \in \{0\}, 0 \notin \emptyset, \{0\}$  与  $\emptyset$  是两个不同的集合.



### 方法技巧点拨

#### 1. 注意集合中元素的互异性

**例 1** 集合  $\{3, x, x^2 - 2x\}$  中, 满足条件的实数  $x$  所组成的集合是

**思路点拨** 考虑集合中实数  $x$  应满足什么条件.

**【解】** 由集合  $\{3, x, x^2 - 2x\}$  中元素的互异性知

$$\begin{cases} 3 \neq x, \\ 3 \neq x^2 - 2x, \\ x \neq x^2 - 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 3, \\ x \neq 3 \text{ 且 } x \neq -1, \\ x \neq 0 \text{ 且 } x \neq 3. \end{cases} \Rightarrow x \neq -1 \text{ 且 } x \neq 0 \text{ 且 } x \neq 3.$$

又  $x$  为实数, 则这样的集合为

$$\{x \in \mathbf{R} | x \neq -1 \text{ 且 } x \neq 0 \text{ 且 } x \neq 3\}.$$

#### 2. 对集合的代表元素进行正确的理解和表示

**例 2** 有下列各命题:

(1) 方程  $\sqrt{2x-1} + |3y+3| = 0$  的解集是  $\left\{\frac{1}{2}, -1\right\}$ ;

(2) 方程  $x^2 + x - 6 = 0$  的解集为  $\{(-3, 2)\}$ ;

(3) 集合  $M = \{y | y = x^2 + 1, x \in \mathbf{R}\}$  与集合  $N = \{(x, y) | y = x^2 + 1, x \in \mathbf{R}\}$  表示同一集合;

(4) 方程组  $\begin{cases} 2x+y=0, \\ x-y+3=0 \end{cases}$  的解集是  $\{(x, y) | x = -1 \text{ 或 } y = 2\}$ .

其中描述正确的个数为( ).  
 (A) 0个 (B) 2个 (C) 3个 (D) 4个

**思路点拨** 关键是正确区分数集与点集(有序实数对).

**【解】** (1) 方程的解是有序实数对, 应是  $\left\{\left(\frac{1}{2}, -1\right)\right\}$ , 而不是数集  $\left\{\frac{1}{2}, -1\right\}$ ;

(2) 中的解是数集  $\{-3, 2\}$ , 而不是点集;

(3) 中  $M$  为数集,  $N$  为点集;

(4) 中的点集是  $x = -1$  且  $y = 2$ , 而不是或的关系.  
 综上, 4 个命题均错.

**答案** A

### 3. 按要求表示集合

**例 3** 用列举法表示下列集合:

(1)  $\left\{x \mid \frac{6}{2-x} \in \mathbf{Z}, x \in \mathbf{Z}\right\}$ ;

(2)  $\left\{x \mid x = \frac{a}{b}, a \in \mathbf{Z}, |a| < 2, b \in \mathbf{N}^* \text{ 且 } b \leq 3\right\}$ ;

(3)  $\{(x, y) \mid y = 2x, x \in \mathbf{N} \text{ 且 } 1 \leq x < 4\}$ .

**思路点拨** 这里的几个集合都是用描述法来表示的, 要把它们用列举法表示出来, 关键是理解集合的含义.

**【解】** (1)  $\because \frac{6}{2-x} \in \mathbf{Z}, \therefore |2-x|$  是 6 的因数,

$\therefore |2-x| = 1$  或  $|2-x| = 2$  或  $|2-x| = 3$  或  $|2-x| = 6$ ,

即  $x = 1, 3, 4, 0, -1, 5, -4, 8$ .

$\therefore \left\{x \mid \frac{6}{2-x} \in \mathbf{Z}, x \in \mathbf{Z}\right\} = \{-4, -1, 0, 1, 3, 4, 5, 8\}$ .

(2) 由  $a \in \mathbf{Z}, |a| < 2$  知  $a = -1, 0, 1$ ; 由  $b \in \mathbf{N}^*$  且  $b \leq 3$  知  $b = 1, 2, 3$ .

$\therefore \frac{a}{b}$  的值为  $\frac{-1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{-1}{2}, \frac{0}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{3}, \frac{0}{3}, \frac{1}{3}$ .

考虑到集合中元素的互异性, 故原集合可用列举法表示为

$$\left\{-1, 0, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right\}.$$

(3)  $\because x \in \mathbf{N}$  且  $1 \leq x < 4$ ,

$\therefore x = 1, 2, 3$ , 其对应的  $y$  值分别为 2, 4, 6.

故原集合用列举法可表示为 $\{(1,2), (2,4), (3,6)\}$ .

**例 4** 试用适当方法表示下列集合:

- (1) 24 的正约数;
- (2) 数轴上到原点的距离小于 1 的所有点;
- (3) 平面直角坐标系中第一、三象限的角平分线;
- (4) 所有非零偶数;
- (5) 所有被 3 除余数是 1 的数.

**思路点拨** 上述问题都是用文字叙述的,通常我们是用列举法或数学符号

描述法来表示集合.

**【解】** (1)  $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$ .

(2)  $\{x \mid |x| < 1\}$ .

(3)  $\{(x, y) \mid y = x\}$ .

(4)  $\{x \mid x = 2k, k \in \mathbf{Z} \text{ 且 } k \neq 0\}$  或  $\{x \mid \frac{x}{2} \in \mathbf{Z} \text{ 且 } x \neq 0\}$ .

(5)  $\{x \mid x = 3k + 1, k \in \mathbf{Z}\}$ .

### 高考真题链接

**例 1** (2007·江西)若集合  $M = \{0, 1, 2\}$ ,  $N = \{(x, y) \mid x - 2y + 1 \geq 0 \text{ 且 } x - 2y - 1 \leq 0, x, y \in M\}$ , 则  $N$  中元素的个数为( ).

- (A) 9                      (B) 6                      (C) 4                      (D) 2

**思路点拨** 关键是注意集合  $N$  的含义,  $N$  为点集, 且  $x \in M, y \in M$ , 还要求有序数对  $(x, y)$  满足  $N$  中的两个不等式. 因此, 先列出全部的  $x \in M, y \in M$  的有序数对, 再逐一检查是否为  $N$  的元素.

**【解】** 因  $N$  为点集,  $(x, y) \in N$  且  $x \in M, y \in M$ ,

故由  $x, y \in M$  组成的点有  $(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 2)$ , 共 9 个.

其中满足  $x - 2y + 1 \geq 0$  且  $x - 2y - 1 \leq 0$  的仅有  $(0, 0), (1, 0), (1, 1), (2, 1)$  四个元素.

**答案** C

**例 2** (2008·江西)定义集合运算  $A * B = \{x \mid x = xy, x \in A, y \in B\}$ . 设  $A = \{1, 2\}, B = \{0, 2\}$ , 则集合  $A * B$  的所有元素之和为( ).

(A) 0

(B) 2

(C) 3

(D) 6

**思路点拨** 正确理解  $A * B = \{z | z = xy, x \in A, y \in B\}$  的含义, 运用列举法解题.

**【解】** 当  $y=0$  时,  $z=0$ ;

当  $y=2, x=1$  时,  $z=2 \times 1=2$ ;

当  $y=2, x=2$  时,  $z=2 \times 2=4$ .

故  $A * B = \{0, 2, 4\}$ , 其元素之和为  $0+2+4=6$ .

**答案** D

**例 3** (2006 · 山东) 定义集合运算:  $A \odot B = \{z | z = xy(x+y), x \in A, y \in B\}$ . 设集合  $A = \{0, 1\}$ ,  $B = \{2, 3\}$ , 则集合  $A \odot B$  的所有元素之和为( ).

(A) 0

(B) 6

(C) 12

(D) 18

**思路点拨** 类似于例 2, 关键是理解  $A \odot B$  的含义.

**【解】** 当  $x=0$  时,  $z=xy(x+y)=0$ ;

当  $x=1, y=2$  时,  $z=1 \times 2 \times (1+2)=6$ ;

当  $x=1, y=3$  时,  $z=1 \times 3 \times (1+3)=12$ .

故  $A \odot B = \{0, 6, 12\}$ , 其元素之和为  $0+6+12=18$ .

**答案** D

**例 4** (2006 · 辽宁) 设  $\oplus$  是  $\mathbf{R}$  上的一个运算,  $A$  是  $\mathbf{R}$  的非空子集. 若对任意  $a, b \in A$ , 有  $a \oplus b \in A$ , 则称  $A$  对运算  $\oplus$  封闭. 下列数集对加法、减法、乘法和除法(除数不等于零)(四则运算)都封闭的是( ).

(A) 自然数集

(B) 整数集

(C) 有理数集

(D) 无理数集

**思路点拨** 理解并运用“ $A$  对运算  $\oplus$  封闭”的含义.

**【解法 1】** 令  $a=1, b=2$ , 则  $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$ , 可排除 A、B;

令  $a=\sqrt{3}, b=2\sqrt{3}$ , 则  $\frac{b}{a} = 2$ , 可排除 D.

**【解法 2】** 自然数集对减法、除法不封闭; 整数集对除法不封闭; 无理数集对加法、减法、乘法、除法都不封闭.

**答案** C



## 探究创新拓展

**例 1** 已知集合  $A = \{x | ax^2 - 3x + 2 = 0\}$ , 其中  $a$  为常数, 且  $a \in \mathbf{R}$ .

(1) 若  $A$  是空集, 求  $a$  的取值范围;

(2) 若  $A$  中至多有一个元素, 求  $a$  的取值范围.

**思路点拨** (1) 方程  $ax^2 - 3x + 2 = 0$  无实根;

(2) 方程  $ax^2 - 3x + 2 = 0$  至多有一个实根, 包含无实根及只有一个实根两种情况.

**【解】** (1)  $A$  为空集, 即  $ax^2 - 3x + 2 = 0$  无实根.

所以  $\begin{cases} a \neq 0, \\ \Delta = 9 - 8a < 0, \end{cases}$  解得  $a > \frac{9}{8}$ .

(2) 由(1)知  $A$  为空集时,  $a > \frac{9}{8}$ .

若  $A$  中只有一个元素, 即方程  $ax^2 - 3x + 2 = 0$  只有一个实根.

当  $a = 0$  时, 方程有一个实根  $x = \frac{2}{3}$ ;

当  $a \neq 0$  时, 则应有  $\Delta = 9 - 8a = 0$ , 即  $a = \frac{9}{8}$  时,  $A$  中只有一个元素.

故当  $a = 0$  或  $a \geq \frac{9}{8}$  时,  $A$  中只有一个元素.

**例 2** (2006·上海) 若关于  $x$  的不等式  $(1+k^2)x \leq k^4 + 4$  的解集是  $M$ , 则对任意实常数  $k$ , 总有 ( ).

(A)  $2 \in M, 0 \in M$

(B)  $2 \notin M, 0 \notin M$

(C)  $2 \in M, 0 \notin M$

(D)  $2 \notin M, 0 \in M$

**思路点拨** 解含以  $k$  为参数的关于  $x$  的一元一次不等式时, 注意运用配方法求它的最值.

**【解】** 因为  $1+k^2 > 0$ , 所以  $M = \left\{ x \mid x \leq \frac{k^4+4}{1+k^2}, k \in \mathbf{R} \right\}$ ,

因为  $\frac{k^4+4}{1+k^2} = \frac{(k^4-1)+5}{1+k^2} = k^2 - 1 + \frac{5}{1+k^2} = (k^2+1) + \frac{5}{k^2+1} - 2$

$$= \left( \sqrt{k^2+1} - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{k^2+1}} \right)^2 + 2\sqrt{5} - 2$$

$$\geq 2\sqrt{5} - 2 = 2(\sqrt{5}-1) > 2,$$

所以  $2 \in M$ , 显然  $0 \in M$ .

**答案** A



### 三级题型测训

#### 1 夯实基础

- 已知集合  $S = \{a, b, c\}$  中的三个元素可构成三角形的三边边长, 那么这个三角形一定不是( ).  
 (A) 锐角三角形 (B) 直角三角形  
 (C) 钝角三角形 (D) 等腰三角形
- 下列命题为真命题的是( ).  
 (A) 所有著名的作家可以形成一个集合  
 (B) 0 与  $\{0\}$  的意义相同  
 (C) 集合  $A = \left\{ x \mid x = \frac{1}{n}, n \in \mathbf{N}^* \right\}$  是有限集  
 (D) 方程  $x^2 + 2x + 1 = 0$  的解集中只有一个元素
- 集合  $A = \{x \mid ax^2 + 2x + 1 = 0\}$  中只有一个元素, 则  $a$  的值是( ).  
 (A) 0 (B) 0 或 1  
 (C) 1 (D) 无数多个
- 方程组  $\begin{cases} 2x + y + 6 = 0, \\ x - y + 3 = 0 \end{cases}$  的解集是( ).  
 (A)  $\{(-3, 0)\}$  (B)  $\{-3, 0\}$   
 (C)  $(-3, 0)$  (D)  $\{(0, -3)\}$
- 集合  $M = \left\{ a \in \mathbf{Z} \mid \frac{6}{5-a} \in \mathbf{N} \right\}$ , 用列举法表示集合  $M =$  \_\_\_\_\_.
- 方程组  $\begin{cases} x^2 - y^2 = -5, \\ (x-2)^2 + y^2 = 15 \end{cases}$  的解集是 \_\_\_\_\_.
- 已知  $P = \{x \mid 2 < x < k, x \in \mathbf{N}, k \in \mathbf{R}\}$ , 若集合  $P$  中恰有 3 个元素, 则实数  $k$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.
- 集合  $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x = a + b\sqrt{3}, a \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{Z}\}$ , 判断下列元素  $x$  与集合  $A$  的关系:  
 (1)  $x = 0$ ; (2)  $x = \frac{4}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$ ; (3)  $x = \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$ ;

$$(4) x_1 \in A, x_2 \in A, x = x_1 + x_2; \quad (5) x_1 \in A, x_2 \in A, x = x_1 \cdot x_2.$$

### D 能力提升

9. 设  $a, b \in \mathbf{Z}$ , 把形如  $a + b\sqrt{5}$  的数构成的集合记为  $M$ , 若  $x, y \in M$ , 则下列元素中不一定属于  $M$  的是( ).
- (A)  $x+y$  (B)  $x-y$   
 (C)  $xy$  (D)  $\frac{x}{y}$
10. 设集合  $P = \{3, 4, 5\}$ ,  $Q = \{4, 5, 6, 7\}$ , 定义  $P * Q = \{(a, b) | a \in P, b \in Q\}$ , 则  $P * Q$  中元素的个数为( ).
- (A) 3 (B) 7 (C) 10 (D) 12
11. (2005 · 湖北) 设  $P, Q$  为两个非空实数集合, 定义集合  $P+Q = \{a+b | a \in P, b \in Q\}$ , 若  $P = \{0, 2, 5\}$ ,  $Q = \{1, 2, 6\}$ , 则  $P+Q$  中元素的个数是( ).
- (A) 9 (B) 8 (C) 7 (D) 6
12. 若  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $B = \{2, 4, 6, 8\}$ , 记  $M - N = \{x | x \in M, \text{且 } x \notin N\}$ , 则  $A - B =$ \_\_\_\_\_.
13. 已知  $-3 \in \{a-3, 2a-1, a^2+1\}$ , 求实数  $a$  的值.
14. 已知  $A = \{x | x^2 + px + q = x\}$ ,  $B = \{x | (x-1)^2 + p(x-1) + q = x+1\}$ , 当  $A = \{2\}$  时, 求集合  $B$ .



15. 设集合  $A = \{x, y, x+y\}$ ,  $B = \{0, x^2, xy\}$ , 且  $A=B$ , 求实数  $x, y$  的值.

16. 已知由实数组成的集合  $A$  满足: 若  $x \in A$ , 则  $\frac{1}{1-x} \in A$ .

(1) 设  $A$  中含有三个元素, 且  $2 \in A$ , 求  $A$ .

(2)  $A$  能否是仅含一个元素的单元素集? 试说明理由.

### III 探索拓展

17. 集合  $M = \{(x, y) \mid y = -2x^2 + x - 1, x \in \mathbf{R}, x \neq 0\}$ , 若点  $P$  的坐标  $(x, y) \in M$ , 则点  $P$  是第几象限的点?