

高等学校教学用书

材料力学

下册 第二分册

Н. М. 别辽耶夫著

高等教育出版社

高等學校教學用書



材 料 力 学

下册 第二分册

H. M. 別遼耶夫著

于光瑜等譯

高等教育出版社



本書係根據蘇聯技術理論書籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）出版的別遼耶夫（Н. М. Беляев）著“材料力學”（Сопротивление материалов）1951年第七版修正增訂本譯出。原書經蘇聯高等教育部審定為高等工業學校教科書。

本書中譯本分上下兩冊出版。

參加本書翻譯的為哈爾濱工業大學千光瑜（第三十五章、第三十六章）、楊文鵠（第三十七章）、黎紹敏（第三十八章）和金辰（第三十九章）等四同志，並由王光遠同志校訂。

本書舊譯本由商務印書館出版，現在根據原書 1954 年第九版修訂，改由本社出版。

材 料 力 學

下冊 第二分冊

H. M. 別遼耶夫著

千 光 瑜 等 譯

高 等 教 育 出 版 社 出 版

北京琉璃廠一七〇號

（北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號）

華成印刷廠印刷 新華書店總經售

書號 587（課 505） 開本 850×1168 1/32 印張 51/2 字數 153,000

一九五六年二月上海新一版

一九五六年四月上海第二次印刷

印數 2,001—7,000

定價 洋 0.59

下冊第二分冊目錄

第十篇 荷重之動荷作用

第三十五章 慣性力與振動之計算689

§ 215 緒論	689
§ 216 在等加速運動時應力之計算	691
§ 217 旋轉圓環(飛輪輪緣)的計算	693
§ 218 平行桿和連接桿內之應力	694
§ 219 等厚之旋轉圓盤	697
§ 220 等強度圓盤	700
§ 221 共振對應力之影響	702
§ 222 振動時應力之計算	703
§ 223 振動時彈性體系之質量的考慮	708
§ 224 例題	713

第三十六章 撞擊時之應力717

§ 225 基本原理	717
§ 226 撞擊時應力計算的一般方法	718
§ 227 撞擊時應力計算及強度校核之特例	723
§ 228 對不動平面作軸向撞擊時桿件之應力	728
§ 229 撞擊時變斷面桿內之應力	729
§ 230 從上面所得結果推出之實用結論	731
§ 231 受撞擊之彈性體系之質量的考慮	732
§ 232 例題	735
§ 233 直到破壞之撞擊實驗，撞擊試驗	738
§ 234 不同之因素對撞擊試驗之影響	741

第三十七章 在重複應力情況下材料的強度校核745

§ 235 關於重複荷重對材料強度的影響的基本概念	745
§ 236 在重複應力情況下的強度條件之組成	747

§ 237	在對稱循環時持久極限的求法	749
§ 238	不對稱循環時的持久極限	753
§ 239	局部應力	758
§ 240	零件尺寸對持久極限的影響	765
§ 241	在重複荷重下破壞的實際例子。疲勞裂痕出現和擴展的程序	768
§ 242	實用應力的確定	772
§ 243	例題	779
§ 244	在重複應力及複雜受力狀態下之強度校核	785
§ 245	幾種防止疲勞破壞的實用方法	787
§ 246	關於材料對動荷重的抗力之問題的發展	792
第三十八章 材料的強度		797
§ 247	基本概念	797
§ 248	對塑性變形之抗力	798
§ 249	對破壞之抗力。斷裂和切斷	801
§ 250	強度理論	803
§ 251	廣義的馬爾強度理論	807
§ 252	達維端考夫-弗里特曼之聯合強度理論	810
第三十九章 蠕滑計算之基礎		815
§ 253	高溫對金屬的機械性質的影響	815
§ 254	蠕滑及鬆弛現象	816
§ 255	蠕滑及鬆弛曲線	818
§ 256	蠕滑計算之基礎	824
§ 257	蠕滑計算之例題	828
附錄(續上冊)		
表 5 工字形壓延斷面的屬性幾何特性		1
表 6 槽形壓延斷面的屬性幾何特性		2
中俄名詞對照表		
俄中名詞對照表		
俄中人名對照表		
俄英中文度量衡單位符號對照表		

第十篇 荷重之動荷作用

第三十五章 慣性力與振動之計算

§ 215. 結論

到現在為止只是在荷重的靜荷作用下我們解決了材料力學的基本問題，確定了結構部件的斷面尺寸以及選擇了這些部件的材料。

如在 § 2 內所述，當結構之一部分對另一部分傳遞壓力或在體積力的作用下這些部分之機械運動並不隨時間而改變時就是荷重的靜荷作用。在此情況下結構的每一構件在外力和應力之作用下處於平衡。

運動的不改變表示被研究之零件和這些零件之每一部分的速度沒有改變——這些構件的各微粒沒有加速度。而被研究的物體或與它鄰接的零件的微粒有加速度時就已經表示荷重的動荷作用了。譬如，地對擋土牆的壓力就是靜荷重，因為牆和地都不運動——它們的速度不變並等於零。

同樣，被提升的荷重對吊索的作用在荷重之上升為等速度時也是靜荷作用。反之，如果荷重以加速度上升時則就為動荷作用了。蒸汽機和內燃機的連桿是承受着動荷重的，因為它們的各個單元以變速度運動着。作為其他的對動荷重工作的結構的例子可以舉帶有對旋轉軸裝得偏心的旋轉部分的機器之基座——這些旋轉部分受到向心加速度，也可以舉蒸汽錘的桿和基座，因為當打擊時汽錘在極短的時間內失去速度，因之要給予它非常大的加速度。

從這些例子裏已經看到，在實際情形裏我們可以碰到被研究的零

件或與該零件相鄰接的物體等的各種不同形式的加速度；加速度可以在數值和方向上都是不變的，或僅只方向不變；也可以是符號變動的。

在變動的和符號變動的應力裏我們會遇到由於裂縫逐漸地擴展而破壞的現象——疲勞現象。在由於從相鄰零件對結構構件所傳遞的壓力而使其運動速度急劇改變時，即當發生撞擊現象時，此時在當靜荷重作用時是塑性的這種材料裏也可能顯現出脆性。所以在檢查受動荷作用時的結構零件之強度時就不但得研究這些荷重對零件內應力數值之影響，同時還要研究其對材料抵抗能力的影響。

結構零件上的各點的加速度對材料應力狀態之影響可以用下列方式來考慮。如果任何一物體以加速度運動着時，則這就意味着對該物體傳遞着（作用於該物體上）從其他物體傳過來的力（壓力）；按照作用與反作用恆等之定理，它也傳遞給這些物體相等於所作用的力而方向相反的反力，即所謂慣性力。這一說法也可以用於每一個以加速度運動着的物體的單元；這一單元將傳給材料的相鄰部分以等於這一單元的慣性力的內力。

如是，當結構部件作加速運動時，在其內部產生着附加的完全真實的應力，這些應力等價於由慣性力所引起的靜荷應力；從桿件之每一單元對材料的相鄰部分將傳遞着這樣的應力，彷彿對這一單元作用着相應的慣性力一樣。

由此得到用於求結構部件上之各點受加速度時在該部件內之應力的實用規則：必須計算這些加速度並且對被研究的結構構件除了作用在該構件上的外力外，再把相應的慣性力亦作用上去。然後就像對桿件作用着靜荷重一樣地來進行計算。

這裏必須分開三種情形。如果作用於所研究的單元的外力之數值和分佈與該單元之變形無關，如果這些變形並不改變桿件運動的性質，則其各點之加速度按剛體運動學的規則來計算，而動荷影響的考慮就

歸結為以相應的慣性力作為附加的靜荷重的計算了。這一情形在大多數的實際的重要情況裏(除撞擊外)都會遇到。

如果在這一時候加速度將要變動,則照例將發生結構被研究部分之振動,這種振動在某種情況下會引起與變形和應力之急劇增加相聯系的共振現象。這種應力可以達到非常大的數值並將附加到以慣性力作為靜荷重的方法所考慮的應力上去。

最後,可能會有這樣的情況(撞擊),當加速度的數值,也就是說相應的慣性力的數值與被研究之構件的變形性能有關時;在這種情況下,當計算慣性力時就須要利用材料抵抗能力的資料了。

對於前面各種情形的強度校核方法將以例題來說明。

§ 216. 在等加速運動時應力之計算

關於解決在動荷應力作用下強度檢驗之問題我們來從最簡單的情況開始,就是當被研究之結構部分之

各點具有並不引起振動的不變的加速度;今取荷重 Q 之等加速提升作為例子,該荷重掛在斷面面積為 F 之鋼桿上;桿之材料的單位體積的重量等於 γ ; 荷重以加速度 a cm/秒² 上升(圖 581)。試求在離開桿之下端距離為 x 的任一斷面內的應力。將桿在該斷面處截開並觀察下面的截下部分。這一部分將以加速度 a 向上運動;就是說

從桿之上部分對這一部分除了傳遞平衡其重量的力以外,還有方向向上的等於它的質量與加速度 a 之乘積的力,即 $\frac{Q + \gamma F x}{g} a$, 式中 g 是重力加速度。

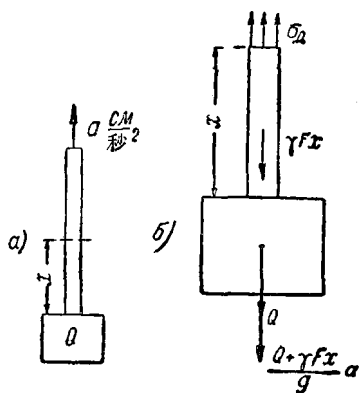


圖 581

根據作用與反作用恆等的定理，從下部分對上部分也將傳遞着同樣的力，不過方向向下。如是，沿所截斷面作用到下部分去的動荷應力 σ_n 將不僅要平衡靜荷重 $Q + \gamma Fx$ ，並且還要平衡附加力 $\frac{Q + \gamma Fx}{g}a$ ；要計算這些應力，必須研究所截之下部分在 σ_n 、靜荷重 $Q + \gamma Fx$ 及方向向下的慣性力 $\frac{Q + \gamma Fx}{g}a$ 等之作用下的平衡（圖 581）。此時

$$\sigma_n = \frac{Q + \gamma Fx}{F} + \frac{Q + \gamma Fx}{gF}a = \frac{Q + \gamma Fx}{F} \left(1 + \frac{a}{g}\right);$$

分式 $\frac{Q + \gamma Fx}{F}$ 就是在所截斷面上的靜荷應力 σ_c ；所以

$$\sigma_n = \sigma_c \left(1 + \frac{a}{g}\right), \quad (35.1)$$

亦即動荷應力等於靜荷應力乘一係數 $1 + \frac{a}{g}$ 。這一數值叫做動荷係數 K_n ：

$$\sigma_n = K_n \sigma_c. \quad (35.2)$$

用於動荷應力的公式的這一形式說明了為什麼我們首先把注意力放在在荷重之靜荷作用下的應力的計算；在極大多數的情形裏，動荷應力都可以通過靜荷應力乘一動荷係數的方法來表示。

強度條件得到下面的形式：

$$\sigma_{n \max} = \sigma_{c \max} \left(1 + \frac{a}{g}\right) = K_n \sigma_{c \max} \leq [\sigma].$$

由此得：

$$\sigma_{c \max} \leq \frac{[\sigma]}{1 + \frac{a}{g}} = \frac{[\sigma]}{K_n}. \quad (35.3)$$

如是，在許多情形裏，動荷計算可以用靜荷計算來代替，只要將資用應力除以動荷係數 K_n 使其降低後即可。

處在這樣的情況下，就是當在計算時如果動荷係數在理論上的求法覺得困難時，那就不得不利用在實驗裏所得到的數值。例如就是這

樣來考慮作用於橋樑的暫時荷重的動荷性。

§ 217. 旋轉圓環(飛輪輪緣)的計算

現在來研究快速旋轉的等斷面環(圖 582, a)的應力計算作為第二個例子。如果不考慮輻條的影響則飛輪的輪緣就是處在這種近似的情況下。

以 F 代表環之橫斷面面積;
 γ —材料單位體積之重量; n —單位時間內的轉數; ω —旋轉之角速度; D —環之軸線的直徑。

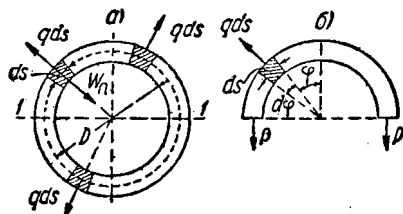


圖 582

截出長為 ds 之環的單元。在環旋轉時,這一單元以等角速度 ω 沿圓週運動着。角加速度 ε 等於零,所以單元之切線加速度等於 $w_t = \varepsilon \frac{D}{2} = 0$; 而單元之徑向(向心的)加速度等於 $w_n = \frac{\omega^2 D}{2}$ 及方向向着環心。欲計算應力 σ_n , 必須對所取之每一單元作用上它的慣性力。這力之方向向外並等於

$$w_n \frac{F\gamma}{g} ds = \frac{F\gamma}{g} \frac{\omega^2 D}{2} ds = qds,$$

其中 q 是作用於輪緣的單位長度上的慣性力之密度。如是,在環內分佈着這樣的應力,彷彿該環在單位長度上受到密度為 q 的徑向荷重之作用(圖 582, b)。拉伸輪緣的內力 P 等於 (§ 20):

$$P = \frac{Dq}{2}.$$

應力 σ_n 等於:

$$\sigma_n = \frac{P}{F} = \frac{Dq}{2F} = \frac{DF\gamma}{2gF} \cdot \frac{\omega^2 D}{2} = \frac{\gamma\omega^2 D^2}{4g} = \frac{\gamma v^2}{g},$$

其中 $v = \omega \frac{D}{2}$ —是環上各點的圓周速度。如是,在飛輪輪緣內的應力僅與材料單位體積之重量及輪緣各部分之線速度有關。爲了體驗這些應

力之數值有多少大，我們用下列數據來計算一下：

$$n = 360 \text{ 轉/分}; \quad D = 4 \text{ m}; \quad \gamma = 7.5 \text{ g/cm}^3.$$

每秒之角速度 $\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{2\pi \times 360}{60} = 12\pi$; 應力等於：

$$\sigma_A = \frac{\gamma \omega^2 D^2}{4g} = \frac{7.5 \times 144\pi^2 \times 16 \times 10^4}{4 \times 10^3 \times 981} = 435 \text{ kg/cm}^2.$$

§ 218. 平行桿和連接桿內之應力

現在來檢查聯接機車二軸(圖 583)之平行桿 AB 的強度; 從機車的機器傳遞旋轉力矩到主動軸 O_1 上。

在 A 和 B 兩點，平行桿藉柱形鉸之助連接在車輪上，距離 AO_2 和

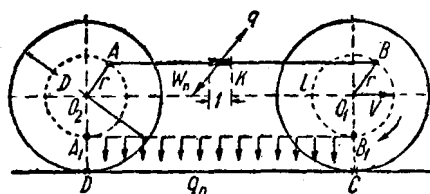


圖 583

BO_1 等於 r ，車輪直徑為 D ，平行桿之長為 l ，機車以等速度 v 運動着。

因為平行桿運動着，所以在對它作強度校核時首先必須確定該運動是否有加速度，亦

即解決一個純粹運動學的問題。平行桿本身與機車之間有相對運動，並與它一起以速度 v 作牽連運動。

因為牽連運動是等速度的前進運動，所以加速度只會在相對運動裏才有。因為在這一運動裏平行桿之二點 A 和 B 是相同地運動着，它們在同一平面內畫着半徑為 r 的圓周，所以這一運動是平面的和前進的運動，因之，所有平行桿之各點和點 A 及 B 一樣有着同樣的速度和加速度。

點 A 與第二個輪子一起運動着，畫着半徑為 r 的圓周。在機車等速運動時，輪子旋轉的角速度 ω 也是不變的，即角加速度等於零，而因之，點 A 之切線加速度也等於零，即 $w_t = 0$ ；剩下的是方向由 A 向 O_2 並等於 $\omega^2 r$ 的向心加速度 w_n 。平行桿之任一點，例如 K ，也受到相同

的加速度，其方向平行於 O_2A 。

欲校核平行桿之強度必須在它自身重量上再加上以慣性力作為荷重的荷重。在平行桿之每一單位長度上將作用着慣性力

$$q = \frac{1 \cdot F \cdot \gamma}{g} w_n = \frac{F \gamma}{g} \omega^2 r;$$

這一慣性力的方向與加速度的方向相反並與半徑 O_2A 平行。

在圖中所示的平行桿的位置下，它自身的重量引起與由慣性力所引起的彎曲之方向相反的彎曲。平行桿最危險的位置是最下面的位置 A_1B_1 ，這時二種荷重作用在同一方向上。此時在平行桿之單位長度上所作用的總荷重 q_n 將等於：

$$q_n = \gamma F + \frac{\gamma F}{g} \omega^2 r = \gamma F \left[1 + \frac{\omega^2 r}{g} \right].$$

須要把平行桿看作像鉸支於 A 、 B 二點並受均佈荷重 q_n 之作用的樑一樣。最大彎矩在跨度中央：

$$M_{\max} = \frac{q_n l^2}{8} = \frac{\gamma F l^2}{8} \left[1 + \frac{\omega^2 r}{g} \right].$$

在這一斷面上之最大應力

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{F}{W} \frac{\gamma l^2}{8} \left[1 + \frac{\omega^2 r}{g} \right].$$

例 134. 以下列數據來研究平行桿之二種橫斷面：(a) 長方形斷面，(b) 工字斷面（圖 584）：

$\omega = 30$ 1/秒， $\gamma = 7.86$ g/cm³， $r = 50$ cm 及 $l = 150$ cm。

在此情況下

$$\frac{\gamma l^2}{8} \left[1 + \frac{\omega^2 r}{g} \right] = \frac{0.00786 \times 150^2}{8} \left[1 + \frac{50 \times 30^2}{981} \right] = 1036 \text{ kg/cm}.$$

對於長方形斷面：

$$F = 10 \times 4.5 = 45 \text{ cm}^2, \quad W = \frac{4.5 \times 10^3}{6} = 75 \text{ cm}^3,$$

$$\frac{F}{W} = \frac{45}{75} = 0.6 \text{ 1/cm 及 } \sigma_{\max} = 0.6 \times 1036 = 622 \text{ kg/cm}^2.$$

對於工字斷面：

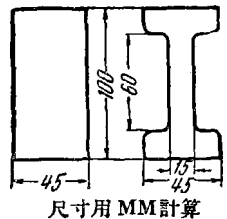


圖 584

$$F = 10 \times 4.5 - 2 \times 6 \times 1.5 = 27 \text{ cm}^2, \quad W = \frac{4.5 \times 10^3 - 2 \times 1.5 \times 6^3}{12 \times 5} = 64.2 \text{ cm}^3,$$

$$\frac{F}{W} = \frac{27}{64.2} = 0.42 \text{ 1/cm 及 } \sigma_{\pi \text{ max}} = 0.42 \times 1036 = 435 \text{ kg/cm}^2.$$

如是，雖然斷面的斷面係數減少(差不多 15%)了，但由於平行桿重量的顯著減少，所以在第二種情形裏，最大應力還是減少了幾乎三分之一。

除了彎曲以外平行桿還受到將輪 O_1 之旋轉傳到輪 O_2 去的力 P 之作用而產生的壓縮或拉伸。在 A_1B_1 位置時，平行桿受壓縮。此時，如果不計撓度對彎矩值之影響，就得到強度條件：

$$\sigma_{\text{max}} = \left\{ \frac{D}{F} + \frac{\gamma F l^2}{8 W} \left[1 + \frac{\omega^2 r}{g} \right] \right\} \leq [\sigma].$$

除了強度校核外，平行桿還應該作穩定之校核，像對一個兩端鉸支的桿件而校核其在荷重 q_{π} 所引起的彎曲平面內的穩定，以及像對兩端固定之桿件而校核其在垂直平面內之穩定。在第一種情形裏在計算柔度時應該用最大的慣性半徑，而在第二種情形裏則用最小的慣性半徑。

同樣的辦法也可以用來計算連接桿 AB ，該連接桿在 A 點與以角速度 ω 繞 O 點旋轉的曲拐 OA 相連接(圖 585)。在曲拐以等角速度旋

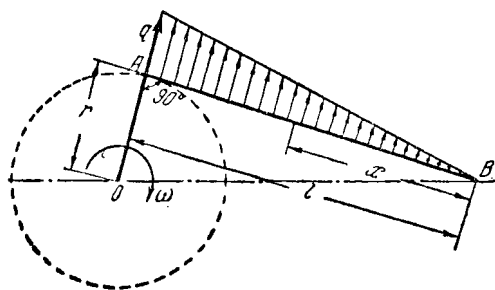


圖 585

轉時，連接桿之 A 點只受到一向心加速度，而 B 點只受到一切線加速度。連接桿上所有位在 A 點和 B 點之間的各點兩種加速度都有。在這裏若限於考慮僅由於向心加速度而產生在連接桿內的慣性力時，

我們可以來研究這樣的一個位置就是連接桿與曲拐垂直時的位置，此時 A 點的向心加速度的方向與連接桿之軸線垂直。我們假設離心慣性力 q 到處都與連接桿之軸線垂直並按照直線規則隨長度從 A 點之 $q = q_0$ 改變到 B 點之 $q = 0$ 。這一假設當連接桿之度長與曲拐之長度相

比越大時則越接近於真實情況。連接桿將看作像放置在 A 及 B 二鉸座上的樑 AB 一樣。當 $x = \frac{l}{\sqrt{3}}$ (x 從 B 點開始算起) 時彎矩達到最大值, 等於 (參閱 § 73):

$$M_{\max} = \frac{q_0 l^2}{9\sqrt{3}}.$$

因為 $q_0 = \frac{F \cdot \gamma \cdot 1}{g} \omega^2 r$ 及 $\sigma_{d \max} = \frac{M_{\max}}{W}$, 所以

$$\sigma_{d \max} = \frac{q_0 l^2}{9\sqrt{3} W} = \frac{F \gamma l^2 \omega^2 r}{9\sqrt{3} W g}.$$

§ 219. 等厚之旋轉圓盤

關於快速旋轉之軸和圓盤的應力和變形是一個極有興趣的問題。蒸汽渦輪軸旋轉之高速件隨着在軸和圓盤內之非常大的離心力之出現。由這些離心力所引起的應力對圓盤之旋轉軸對稱地分佈着。

現在來研究一個關於計算等厚圓盤的最簡單的問題。這種圓盤的計算奠定了計算任何形狀之圓盤的某些近似方法的基礎。將應用在推求厚壁圓筒 (§ 197) 之公式時所得到的某些結果。假設沿圓盤的厚度上 (採用單位厚度), 其應力 σ_r 和 σ_t 不改變; 軸向應力 σ_z 將認為等於零。

立出以二子午斷面和二同心圓柱體表面在圓盤上所截取之單元體 AB 的平衡條件 (圖 586)。在此情況下, 除了作用在單元體 AB 側面上的力以外還須注意到慣性力

$$dj = \omega^2 r \frac{\gamma \cdot r \cdot 1 \cdot dr d\theta}{g},$$

其方向由圓心沿半徑朝向圓盤之外緣。代替在 § 197 裏所推出來的方程式 (32.1) 可得:

$$\sigma_r - \sigma_t + r \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\gamma \omega^2 r^2}{g} = 0. \quad (35.4)$$

在該節裏的方程式 (32.4) (變形諧調條件) 在此問題上仍舊有效, 即

$$\frac{d\sigma_t}{dr} - \mu \frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{1+\mu}{r} (\sigma_r - \sigma_t). \quad (35.5)$$

將從 (35.4) 裏得到的差值 $\sigma_r - \sigma_t$ 代到這一方程式裏後便得:

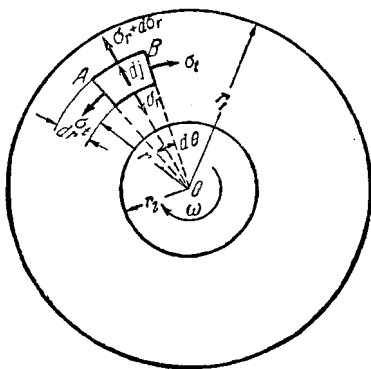


圖 586

$$\frac{d\sigma_t}{dr} = -\frac{d\sigma_r}{dr} - \frac{1+\mu}{g} \gamma \omega^2 r. \quad (35.6)$$

將方程(35.4)對 r 微分並將由公式(35.6)裏所得到的值來代替 $\frac{d\sigma_t}{dr}$ 去代入後就得一線性微分方程式

$$r \frac{d^2\sigma_r}{dr^2} + 3 \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{3+\mu}{g} \gamma \omega^2 r = 0$$

或

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r^2 \sigma_r) \right] + \frac{3+\mu}{g} \gamma \omega^2 r = 0.$$

將此方程積分, 就得:

$$\sigma_r = A + \frac{B}{r^2} - \frac{3+\mu}{8g} \gamma \omega^2 r^2. \quad (35.7)$$

從(35.4)和(35.7)得出

$$\sigma_t = \sigma_r + r \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\gamma \omega^2 r^2}{g} = A - \frac{B}{r^2} - \frac{1+3\mu}{8g} \gamma \omega^2 r^2. \quad (35.8)$$

在公式(35.7)和(35.8)裏 A 和 B 是積分常數, 它們可以從圓盤之週邊條件求得。在求這二個常數時來研究二種情況: (1) 在中心有孔之圓盤, (2) 實體圓盤。這裏首先我們將假設圓盤週邊上是沒有外力的。

對於有中心孔之圓盤, 應力 σ_r 在當 $r=r_1$ 和 $r=r_2$ 時 (圖 586) 都應該等於零。這些條件週邊當把它們代入公式(35.7)後就可導出下面的方程式:

$$A + \frac{B}{r_2^2} - \frac{3+\mu}{8g} \gamma \omega^2 r_2^2 = 0$$

及

$$A + \frac{B}{r_1^2} - \frac{3+\mu}{8g} \gamma \omega^2 r_1^2 = 0,$$

由此得:

$$A = \frac{3+\mu}{8g} \gamma \omega^2 (r_1^2 + r_2^2), \quad B = -\frac{3+\mu}{8g} \gamma \omega^2 r_1^2 r_2^2.$$

將 A 和 B 之值代入公式(35.7)及(35.8)裏後, 可得:

$$\sigma_r = \frac{3+\mu}{8g} \gamma \omega^2 \left(r_1^2 + r_2^2 - r^2 - \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} \right)$$

和

$$\sigma_t = \frac{\gamma \omega^2}{8g} \left[(3+\mu) \left(r_1^2 + r_2^2 + \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} \right) - (1+3\mu) r^2 \right].$$

爲了簡單起見, 令

$$\frac{r_2}{r_1} = \alpha, \quad \frac{r}{r_1} = \rho, \quad \frac{3+\mu}{8g} \gamma \omega^2 r_1^2 = p \quad \text{及} \quad \frac{1+3\mu}{3+\mu} = m,$$

就可以寫成

$$\sigma_r = p \left[1 + \alpha^2 \left(1 - \frac{1}{\rho^2} \right) - \rho^2 \right] \quad (35.9)$$

和

$$\sigma_t = p \left[1 + \alpha^2 \left(1 + \frac{1}{\rho^2} \right) - m \rho^2 \right]. \quad (35.10)$$

我們可以看到當 $\rho=1$ 及 $\rho=\alpha$ 時, 即在圓盤之內週邊和外週邊上, 應力 σ_r 變成零; 當 ρ

在 1 和 α 之間時應力 σ_r 爲正，同時也不難看到當 $\rho = \sqrt{\alpha} = \sqrt{\frac{r_2}{r_1}}$ 時達到最大值。此時

$$(\sigma_r)_{\max} = p(1-\alpha)^2. \quad (35.11)$$

應力 σ_t 在任何 ρ 值下也都是正的，而在 $\rho = \alpha$ 的圓盤之內沿達到最大值：

$$(\sigma_t)_{\max} = p[2 + (1-m)\alpha^2]. \quad (35.12)$$

將(35.11)和(35.12)比較一下，可看出 $(\sigma_t)_{\max}$ 永遠大於 $(\sigma_r)_{\max}$ 。所以在校核圓盤之強度時，不論根據最大切應力理論也好或者根據能量理論也好強度條件都應該寫成這樣：

$$(\sigma_t)_{\max} = \frac{3+\mu}{8g} \gamma \omega^2 r_1^2 [2 + (1-m)\alpha^2] \leq [\sigma]. \quad (35.13)$$

在圖 587 上繪着在 $\mu=0.3$ 時對於從 0 到 1 之不同 α 值的 $\sigma_t^0 = \frac{\sigma_t}{p}$ 值沿圓盤半徑改變之曲線。在該圖上也繪着當 $\alpha=0.2$ 時的 $\sigma_r^0 = \frac{\sigma_r}{p}$ 的曲線。可以看到，應力 σ_t (35.12) 之最大值 (在圓盤之內沿) 在圓孔半徑 (即 α 之值) 改變時很少變動 (曲線 ab)。當 $\alpha \approx 0$ 時，即中心圓孔之半徑非常小時，在圓孔之邊沿發生應力 σ_t 之急劇變化——應力集中 (曲線 acd)。此時

$$(\sigma_t)_{\max} = 2p = \frac{3+\mu}{4g} \gamma \omega^2 r_1^2. \quad (35.14)$$

對於非常薄的圓環，當 $r_1 \approx r_2$ 及 $\alpha \approx 1$ 時，

$$(\sigma_t)_{\max} = \frac{\gamma \omega^2 r_1^2}{g}, \quad (35.15)$$

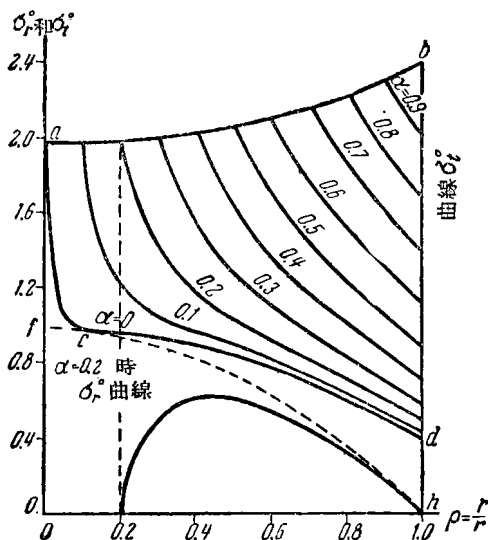


圖 587

這正與 § 217 裏的結論吻合。在此情況下,最大應力 σ_t (35.15) 比具有非常小之圓孔的 (35.14) 圓盤應力 $(\sigma_t)_{\max}$ 總共只大 20%。

從公式 (35.9) 和 (35.10) 裏看到在圓盤之圓周速度 $v = \omega r_1$ 增加時應力 σ_r 和 σ_t 非常快的增長着。我們可以看到除了速度 v 和材料之性質 μ 及 γ 以外這些應力僅與因次值 ρ 及 α 有關。如是,在幾何形狀上相同的圓盤裏在同樣的 ρ 值下應力 σ_r 及 σ_t 將相同。這一情況就可以使我們用實驗室裏的模型試驗來代替大直徑之圓盤的工廠試驗。

在實體圓盤的情形下,在圓盤中心,即 $r=0$ 時,應力 σ_r 和 σ_t 應該互相相等。若將公式 (35.7) 和 (35.8) 比較一下,不難看到如欲符合這一條件,常數 B 應該等於零。常數 A 可從下面條件求得:當 $r=r_1$ 時,即在圓盤之外週邊應力 σ_r 等於零。得

$$A = \frac{3+\mu}{8g} \gamma \omega^2 r_1^2 = p。$$

將此 A 值和 $B=0$ 代到公式 (35.7) 及 (35.8) 裏後就得:

$$\sigma_r = p(1 - \rho^2) \quad (35.16)$$

及

$$\sigma_t = p(1 - m\rho^2)。 \quad (35.17)$$

相應的 $\sigma_r^0 = \frac{\sigma_r}{p}$ 及 $\sigma_t^0 = \frac{\sigma_t}{p}$ 沿半徑改變之曲線表示於圖 587 中(曲線 fh 及 fed)。在所有之 ρ 值下此二應力都為正的,並隨 ρ 之減少,即隨向圓盤中心之靠近程度而增加。當 $\rho=0$ 時

$$(\sigma_r)_{\max} = (\sigma_t)_{\max} = p = \frac{3+\mu}{8g} \gamma \omega^2 r_1^2。 \quad (35.18)$$

如是,在具有非常小之中心圓孔之圓盤內,在圓孔邊沿之應力 σ_t 由於應力集中的關係比在實體圓盤中心之應力大一倍[參閱公式 (35.14)]。

所有到現在為止之討論都是在圓盤之邊沿沒有外力作用之假設上進行的。這一假設通常與實際並不符合。圓盤之裝在軸上是在熱狀態中或藉水力壓縮之助完成的,並裝成保持着這樣的緊密程度俾使圓盤之孔由離心力所引起之變形永遠比與它符號相反的在圓盤安裝時的變形為小,即使得在工作時圓盤緊密地裝在軸上。在圓盤之外沿通常安裝着輪緣以便使盤上之渦輪葉更為牢固,在該輪緣旋轉時產生附加離心力傳到圓盤上去。如是,在圓盤之外沿和內沿上通常總作用着某些平均分佈的拉力或壓力。由這些力所引起的圓盤內的應力可以按照在計算厚壁筒時所推出的公式[§ 197 之公式 (32.9)]來計算。若將按公式 (32.9) 以及按公式 (35.9) 及 (35.10) 所得的應力相加後就可以得到給製旋轉圓盤內總的應力分佈圖的可能性。

§ 220. 等強度圓盤

如像在前節裏的各公式及圖 587 裏的各曲線所指出的那樣,在等厚圓盤內應力 σ_r 和 σ_t 沿半徑之改變是非常厲害的。最不公平之應力分佈是在中心有圓孔之等厚圓盤內。在計算