



赚分

我一定要



妈妈的双眼在看着我

为了母亲的微笑

探秘

我一定要赚分

丛书主编：戚德良 王金战

高中数学

解题方法与技巧

新课标·最新版

黄河出版社

责任编辑：张清训 葛春亮
丛书主编：戚德良 王金战
本册主编：王 飞
封面设计：贾正海

这是一本值得广大师生认真阅读的高考数学解题奇书。内容引人入胜，解法精巧绝伦！

——陕西师范大学数学教授、博导、数学解题学创始人 罗增儒

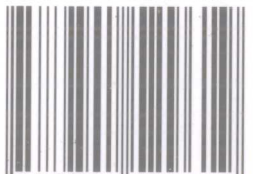


妈妈的双眼在看着我
为了母亲的微笑
我一定认真学习

我一定要
高中数学 赚分 探秘
解题方法与技巧



ISBN 978-7-80152-961-9



9 787801 529619 >

定价：108.00元(全三册)

我一定要赚分系列丛书

高中数学
解题方法与技巧探秘

丛书主编 戚德良 王金战

本册主编 王 飞

副 主 编 梁新华 程龙珍 孔令旺
边玉华

黄河出版社

责任编辑 葛春亮 张清训 封面设计 贾正海

图书在版编目(CIP)数据

高中数学解题方法与技巧探秘/王飞主编.—济南:黄河出版社,2008.6

(我一定要赚分系列丛书/戚德良,王金战主编)

ISBN 978-7-80152-961-9

I. 高… II. 王… III. 数学课—高中—解题 IV. G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第078931号

- 丛 书 名 我一定要赚分系列丛书
丛 主 编 戚德良 王金战
书 名 高中数学解题方法与技巧探秘
主 编 王 飞
副 主 编 梁新华 程龙珍 孔令旺 边玉华
发 行 黄河出版社发行部
(济南市英雄山路21号 250002)
印 刷 济宁市火炬书刊印务中心
规 格 880毫米×1230毫米 32开本
14.25印张 547千字
版 次 2008年10月第1版
印 次 2008年10月第1次印刷
印 数 1-3000册
书 号 ISBN 978-7-80152-961-9/G·222
定 价 108.00元(全三册)

致读者

如欲精通解题术，首先需要进行解题训练，包括解题思想与方法技巧的训练、得分步骤的训练。对于解题训练，必须下定决心，视其为日常生活中的一个重要部分。做到这点必须有坚韧不拔的意志。饮食质量、睡眠时间、社交生活乃至思维活动无不影响着你对解题的信念。

解题要的是激情。头脑中始终浮现的就是，当你达到目标时所能得到的奖赏，以此激励自己。充满激情就能赢得尊敬、争得公认，就能树立信心和胜利感，就能显得神采奕奕，就能感到自我满足。

解题训练的重要意义在于，它赋予人们一种临难不惧、泰然处之的本领。这个本领促使您在关键时刻采取迅捷而有效的行动；能在一刹那间作出抉择，反应正确。这个关键时刻就是高考战场的两个小时。

在掌握了解题的技巧之后，您就会觉得，解题这项活动变得更令人兴奋、更令人心满意足了。你就能充分利用自己的力量征服自身思维的薄弱。

胜利的滋味最令人陶醉。你的解法如果达到了炉火纯青的地步，那你就经常沉浸在胜利的喜悦之中。从事解题训练，要养成积极动脑的习惯，广做联想，让您的想像之翼时刻张开着、振动着。这一习性在日常生活中将处处给你带来益处，使你左右逢源，如有神助。

成功没有捷径，好题要做六遍。耍小聪明抄近路，必定走进死胡同；投机取巧只能适得其反。

解题的训练要按计划进行。为达到掌握全部解题技术的长期目标，首先应制订短期目标。这些短期目标会时刻激励着你，帮助你克服懒散、灰心和惰性。

掌握解题术要有激情，要全力以赴、信心百倍。在考场上，这种精神会渗透于你解题的全过程，使你赢得胜利。

赚分赚天下，赢分赢天下。这正是《我一定要赚分》这套丛书命名的由来。

我们期待着你的成功！金榜题名时，是你和父母最激动也是我们最激动的时刻。现在，我们作者群已经闻到了您的谢师宴上庆功酒的醇香，祝酒词的激昂。虽然我们远隔百里、千里，但心绪是那样的一样。

再一次预祝您的成功，考场传出欢呼声！

戚德良

目 录

九种常用的金牌数学解题思想

第一章 函数思想奠定百世基业	2
一、利用函数的定义域和值域	2
二、利用函数的单调性	3
三、利用函数的奇偶性	5
四、利用函数的连续性和有界性	6
五、利用函数的周期性	7
六、利用二次函数的性质	8
七、利用二项式定理	9
实战秘修一	10
实战秘修一答案与提示	11
第二章 方程思想闪耀万丈光芒	14
一、待定系数法	14
二、直接设元解方程	15
三、运用根的定义构造方程	16
四、运用判别式构造方程	18
五、运用根与系数关系构造方程	19
六、由待求式与条件式构造方程组	20
七、挖掘隐含条件构造方程(组)	22
实战秘修二	23
实战秘修二答案与提示	24
第三章 换元思想化繁为简 妙不可言	27
一、比值换元	27
二、整体换元	28
三、倒数换元	29
四、均值换元	30

五、三角换元	32
六、对称换元	35
实战秘修三	37
实战秘修三答案与提示	38
第四章 整体思想雄霸天下 彰显王者风范	41
一、整体观察	41
二、整体代人	43
三、整体变形	44
四、整体联想	45
五、整体配对	46
六、设而不求	47
七、合设方程	48
实战秘修四	49
实战秘修四答案与提示	51
第五章 逆反思维围魏救赵 快速突破	54
一、逆用定义	54
二、逆用公式	55
三、执果索因	55
四、反面思考	56
五、反客为主	58
六、反例否定	59
七、反证法	60
实战秘修五	62
实战秘修五答案与提示	63
第六章 特殊与一般思想 能上能下 阴阳互化	66
一、从抽象到具体	66
二、从一般到特殊	68
三、从多元到少元	69
四、从高维到低维	70
五、从整体到局部	72

实战秘修六	74
实战秘修六答案与提示	75
第七章 分类讨论思想深究细察 各个击破	77
分类讨论的动因和方法	77
实战秘修七	84
实战秘修七答案与提示	86
第八章 向量思想上天入地 随心所欲	92
一、利用共线向量的充要条件	92
二、利用向量的夹角公式	93
三、利用向量的模	95
四、利用向量垂直的充要条件	96
五、利用向量平行的充要条件	98
六、利用向量的射影公式	100
七、利用定比分点的向量公式	102
实战秘修八	104
实战秘修八答案与提示	105
第九章 数形结合思想清晰直观 别有洞天	111
一、利用“两点间的距离”	111
二、利用“点到直线的距离”	112
三、利用“平行线间的距离”	113
四、利用“直线的方程”	114
五、利用“直线的斜率”	114
六、利用“直线的截距”	115
七、利用“单位圆”	116
八、利用勾股定理构图	117
九、利用正余弦定理构图	118
十、利用二次曲线的定义	120
十一、利用函数的图象	121
十二、利用线性规划	122
实战秘修九	123
实战秘修九答案与提示	125

十一类神奇的高考热点专题的方法技巧

第十章 三角恒等变换技巧大曝光	130
一、切割化弦	130
二、角的拆变	132
三、“1”的代换	135
四、变通公式	136
五、升幂与降次	137
六、引入辅助角	139
七、平方消元	140
八、裂项添项	142
九、设元转化	143
实战秘修十	145
实战秘修十答案与提示	146
第十一章 不等式证明的常用方法再演练	150
一、比较法	150
二、基本不等式法	152
三、综合法	154
四、分析法	155
五、放缩法	156
六、导数法	158
七、数学归纳法	162
八、换元法	166
九、函数法	168
十、反证法	170
十一、数形结合法	172
十二、向量法	173
十三、柯西不等式法(不等式选讲内容)	175
实战秘修十一	176
实战秘修十一答案与提示	178
第十二章 归纳与递推 良谋揭开看	184
一、数学归纳法的常用技巧	184
二、不完全归纳法与完全归纳法	190
三、递推数列	194
四、递推方法的应用	199
实战秘修十二	201

实战秘修十二答案与提示	202
第十三章 空间角与空间距离的求法全透视	209
一、求空间角的常用方法	209
二、求空间距离的常用方法	220
实战秘修十三	231
实战秘修十三答案与提示	234
第十四章 折叠、展开与割补 空间变换建奇功	248
一、折 叠	248
二、展 开	251
三、割 补	255
实战秘修十四	257
实战秘修十四答案与提示	259
第十五章 直线与圆锥曲线的相关问题再探讨	265
一、利用圆锥曲线的定义	265
二、与交点个数有关的问题	267
三、有关弦长问题	271
四、弦的中点问题	275
五、借助于曲线系	279
实战秘修十五	282
实战秘修十五答案与提示	284
第十六章 对称问题巧亮相 闪金光	293
一、轴对称问题	293
二、中心对称问题	301
三、用对称思想解题	304
实战秘修十六	306
实战秘修十六答案与提示	308
第十七章 轨迹方程的探求试评说	312
一、直接法	312
二、定义法	315
三、参数法	317
四、相关点法	319
五、交轨法	321
六、向量法	323
实战秘修十七	326
实战秘修十七答案与提示	329

第十八章 求最(极)值的常用方法六露尊容	341
一、配方法	341
二、函数单调性法	343
三、不等式法	345
四、三角函数法	347
五、导数法	349
六、数形结合法	352
实战秘修十八	354
实战秘修十八答案与提示	356
第十九章 探究性问题的解题方法细思量 更难忘	365
一、直接探求	365
二、观察推测	367
三、特值探求	369
四、类比联想	371
五、分类讨论	373
六、逆推反证	377
七、实验归纳	381
实战秘修十九	383
实战秘修十九答案与提示	386
第二十章 数学应用问题展现数学才能	400
一、函数与不等式的应用	400
二、导数的应用	402
三、数列的应用	404
四、三角函数的应用	406
五、线性规划的应用	410
六、解析几何的应用	412
七、立体几何的应用	415
八、概率统计的应用	416
实战秘修二十	421
实战秘修二十答案与提示	424
附录一 2008 年高考数学试题亮点品析及备考策略	433
附录二 2008 年高考数学创新题型评析	442

九种常用的金牌数学解题思想

第一章

函数思想奠定百世基业

2

利用函数的定义域和值域

函数是高中数学的重要内容之一,其理论和应用涉及各个方面,是贯穿整个高中数学的一条主线.函数思想,系最重要的、最基本的数学思想方法之一,可见它在整个高中数学中的地位和作用.我们这里所说的函数思想是指运用函数的概念和性质去分析问题、转化问题和解决问题.为节省篇幅,本章仅侧重于对那些本身无明显的函数关系的问题,通过类比、联想、转化,合理地引进函数,并通过对所引进的函数的研究,使问题得以解决.

一、利用函数的定义域和值域

例 1 (2008年重庆高考理·T4)已知函数 $y = \sqrt{1-x} + \sqrt{x+3}$ 的最大值为 M , 最小值为 m , 则 $\frac{m}{M}$ 的值为 ()

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【规范解析】 由题意函数的定义域为 $\{x | -3 \leq x \leq 1\}$,

$$\because y = \sqrt{1-x} + \sqrt{x+3} \geq 0.$$

$$\therefore y^2 = 4 + 2\sqrt{(1-x)(x+3)} = 4 + 2\sqrt{-(x+1)^2 + 4},$$

$$\text{当 } x = -1 \text{ 时, } y_{\max}^2 = 8, \therefore y_{\max} = 2\sqrt{2},$$

$$\text{当 } x = 1 \text{ 或 } -3 \text{ 时, } y_{\min}^2 = 4, \therefore y_{\min} = 2,$$

$$\therefore \frac{m}{M} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

【答案】 C

例 2 (2008年安徽高考文·T20)已知函数 $f(x) = \frac{a}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + (a+1)x + 1$, 其中 a 为实数.

(1) 已知函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极值, 求 a 的值;

(2) 已知不等式 $f'(x) > x^2 - x - a + 1$ 对任意 $a \in (0, +\infty)$ 都成立, 求实数 x 的取值范围.

【规范解析】 (1) $f'(x) = ax^2 - 3x + (a+1)$,

由于函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极值, 所以 $f'(1) = 0$.

$$\text{即 } a - 3 + a + 1 = 0, \therefore a = 1.$$

横空出世, 给迷茫的双眼指明前进的方向, 《我一定要赚分》我高歌猛进的舵手!



(2) 由题设知: $ax^2 - 3x + (a+1) > x^2 - x - a + 1$ 对任意 $a \in (0, +\infty)$ 都成立,
即 $a(x^2 + 2) - x^2 - 2x > 0$ 对任意 $a \in (0, +\infty)$ 都成立.

于是 $a > \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 2}$ 对任意 $a \in (0, +\infty)$ 都成立,

$$\text{即 } \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 2} \leq 0.$$

$$\therefore -2 \leq x \leq 0.$$

所以 x 的取值范围是 $\{x | -2 \leq x \leq 0\}$.

例 3 已知方程 $ax^2 + 2(2a-1)x + 4a - 7 = 0$ 中, a 为正整数, 问 a 取何值时, 方程至少有一个整数根.

【思路探索】 若用求根公式解出 $x = \frac{1-2a \pm \sqrt{3a+1}}{a}$ 来讨论 x 的整数值, 将十分繁难. 不妨把 a 表成 x 的函数来试试.

【解】 将原方程改写为 $a(x+2)^2 = 2x+7$ (*)

显然, 当 $x = -2$ 时, (*) 式不成立, 所以有

$$a = \frac{2x+7}{(x+2)^2} \quad (x \neq -2) \quad (**)$$

若要 a 为正整数, 则须 $2x+7 \geq (x+2)^2$.

解得 $-3 \leq x \leq 1$ ($x \in \mathbf{Z}, x \neq -2$)

$\therefore x$ 只能在 $-3, -1, 0, 1$ 中取值.

代入(**)式中可知, 仅当 $x = -3, x = -1$ 和 $x = 1$ 时能保证 a 为正整数. 此时分别有 $a = 1$ 和 $a = 5$.

故当 a 为 1 或 5 时原方程至少有一个整数根.

【解后感言】 本来原方程中的变元是 x , a 为参数, 解题过程中我们“反客为主”, 将方程表示成为 a 的函数关系式(**), 这种将参数和未知数等同看待的思想是函数思想的思维特征之一.

二、利用函数的单调性

解题秘言: 函数的单调性, 对具体函数通常并不难判别. 对有些数学问题, 若能与函数的单调性联系起来, 常能获得简捷、直观的解法.

例 1 (2008 年全国 I 高考理·T9) 设奇函数 $f(x)$ 在

$(0, +\infty)$ 上为增函数, 且 $f(1) = 0$, 则不等式 $\frac{f(x) - f(-x)}{x} < 0$ 的解集为

()

A. $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$

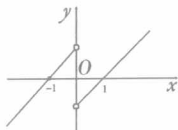
B. $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

C. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

D. $(-1, 0) \cup (0, 1)$

发现被忽视的, 揭秘被隐藏的, 当然是《高中数学解题方法与技巧探秘》! 它亦我师亦我友!

【规范解析】 由 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数，且 $f(1)=0$ ， $f(x)$ 为奇函数，可作出 $f(x)$ 的图象大致如下：



$$\text{又 } \frac{f(x)-f(-x)}{x} < 0 \Rightarrow \frac{2f(x)}{x} < 0$$

$\Rightarrow x \cdot f(x) < 0$ ，由图象可知 $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ 。

【答案】 D

例 2 (2008 年山东高考文·T21) 设函数 $f(x) = x^2 e^{x-1} + ax^3 + bx^2$ ，已知 $x = -2$ 和 $x = 1$ 为 $f(x)$ 的极值点。

(1) 求 a 和 b 的值；

(2) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(3) 设 $g(x) = \frac{2}{3}x^3 - x^2$ ，试比较 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的大小。

【规范解析】 (1) 因为 $f'(x) = e^{x-1}(2x+x^2) + 3ax^2 + 2bx = xe^{x-1}(x+2) + x(3ax+2b)$ ，

又 $x = -2$ 和 $x = 1$ 为 $f(x)$ 的极值点，

所以 $f'(-2) = f'(1) = 0$

因此 $\begin{cases} -6a+2b=0 \\ 3+3a+2b=0 \end{cases}$ ，解方程组得 $a = -\frac{1}{3}, b = -1$ 。

(2) 因为 $a = -\frac{1}{3}, b = -1$

所以 $f'(x) = x(x+2)(e^{x-1}-1)$ ，

令 $f'(x) = 0$ ，解得 $x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 1$ 。

因为当 $x \in (-\infty, -2) \cup (0, 1)$ 时， $f'(x) < 0$ ，

当 $x \in (-2, 0) \cup (1, +\infty)$ 时， $f'(x) > 0$ 。

所以 $f(x)$ 在 $(-2, 0)$ 和 $(1, +\infty)$ 上是单调递增的，

在 $(-\infty, -2)$ 和 $(0, 1)$ 上是单调递减的。

(3) 由 (1) 可知 $f(x) = x^2 e^{x-1} - \frac{1}{3}x^3 - x^2$ ，

故 $f(x) - g(x) = x^2 e^{x-1} - x^3 = x^2(e^{x-1} - x)$ ，

令 $h(x) = e^{x-1} - x$ ，则 $h'(x) = e^{x-1} - 1$ ，

令 $h'(x) = 0$ ，得 $x = 1$ ，

因为 $x \in (-\infty, 1]$ 时， $h'(x) \leq 0$ ，

所以 $h(x)$ 在 $x \in (-\infty, 1]$ 上单调递减。

故 $x \in (-\infty, 1]$ 时， $h(x) \geq h(1) = 0$ ；

因为 $x \in [1, +\infty)$ 时， $h'(x) \geq 0$ ，

所以 $h(x)$ 在 $x \in [1, +\infty)$ 上单调递增。

黑暗中高举探索火炬，发现神秘莫测的数学解题世界，是《赚分》给我傲视群雄的力量！



故 $x \in [1, +\infty)$ 时, $h(x) \geq h(1) = 0$.

所以对任意 $x \in (-\infty, +\infty)$, 恒有 $h(x) \geq 0$,

又 $x^2 \geq 0$, 因此, $f(x) - g(x) \geq 0$,

故对任意 $x \in (-\infty, +\infty)$, 恒有 $f(x) \geq g(x)$.

例 3 求自然数 a 的最大值, 使得不等式 $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n+1} > 2a - 5$

对一切自然数 n 都成立.

【解】 记 $f(n) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n+1}$, 则

$$f(n+1) = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+4}.$$

$$\therefore f(n+1) - f(n) = \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+4} - \frac{2}{3(n+1)}$$

$$= \left(\frac{1}{3n+2} - \frac{1}{3n+3} \right) + \left(\frac{1}{3n+4} - \frac{1}{3(n+1)} \right)$$

$$= \frac{1}{(3n+3)(3n+2)} - \frac{1}{(3n+3)(3n+4)} > 0$$

$\therefore f(n)$ 是 n 的增函数,

$\therefore f(n)$ 的最小值 $f(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12}$, 因此 $f(1) > 2a - 5$ 对一切自然数 n 都成立, 当且仅当 $f(1) > 2a - 5$,

$$\therefore a < \frac{73}{24}$$

【解后感言】 对有关数列问题及涉及以自然数 n 为变量的问题, 常可视为函数 $f(n)$, 然后同 $f(x)$ 一样判定其单调性. 这里用的是差值法判定其单调性.

三、利用函数的奇偶性

例 1 (2008 年辽宁高考理·T12) 设 $f(x)$ 是连续的偶函数, 且当 $x > 0$ 时 $f(x)$ 是单调函数, 则满足 $f(x) = f\left(\frac{x+3}{x+4}\right)$ 的所有 x 之和为 ()

- A. -3 B. 3 C. -8 D. 8

【规范解析】 若 $\frac{x+3}{x+4} \neq 0$, 依题意 x 与 $\frac{x+3}{x+4}$ 异号,

$$\text{即 } x < -4 \text{ 或 } -3 < x < 0 \text{ 且 } -x = \frac{x+3}{x+4},$$

$$\therefore x^2 + 5x + 3 = 0, \Delta = 5^2 - 4 \times 3 > 0, x_1 + x_2 = -5,$$

此二根均符合题意.

若 $\frac{x+3}{x+4} = 0$, 则 $x = -3$, 符合题意. 故所求和为 -8. 故选 C.

【答案】 C

为了母亲的微笑, 我一定要赚分! 我的考场每一分, 都是妈妈的青丝绕。





【解后感言】 这里运用函数的奇偶性及单调函数一一对应的关系将复杂的隐性方程化归为简单的一元二次方程来求解。

例 2 (2008 年福建高考文·T4、理·T4) 函数 $f(x) = x^3 + \sin x + 1 (x \in \mathbf{R})$, 若 $f(a) = 2$, 则 $f(-a)$ 的值为 ()

A. 3 B. 0 C. -1 D. -2

【规范解析】 设 $g(x) = x^3 + \sin x$. 则 $f(x) = g(x) + 1$

$f(a) = g(a) + 1 = 2, \therefore g(a) = 1$.

又 $g(-x) = (-x)^3 + \sin(-x) = -(x^3 + \sin x) = -g(x)$,

即 $g(x)$ 为奇函数.

$\therefore f(-a) = g(-a) + 1 = -g(a) + 1 = -1 + 1 = 0$

【答案】 B

例 3 解方程 $(5x+3)^3 + x^3 + 6x + 3 = 0$.

【解】 将方程改写成

$$(5x+3)^3 + (5x+3) = -(x^3+x)$$

令 $f(x) = x^3 + x$, 则 $f(x)$ 为奇函数, 且在 \mathbf{R} 上单调增.

原方程即为 $f(5x+3) = -f(x) = f(-x)$.

由 $f(x)$ 的单调性知, 其对应法则 f 是一一对应的.

故 $5x+3 = -x$

得 $x = -\frac{1}{2}$, 即 $x = -\frac{1}{2}$ 为原方程的解.

【解后感言】 这里运用函数的奇偶性及单调函数一一对应的关系将复杂的高次方程化归为简单的一元一次方程来求解。

四、利用函数的连续性和有界性

例 1 证明: 方程 $x = a \sin x + b (a > 0, b > 0)$ 至少有一个正根, 它不超过 $a+b$.

【证明】 设 $f(x) = a \sin x + b - x$.

则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 且 $f(0) = b > 0$.

又 $f(a+b) = a \sin(a+b) + b - (a+b)$
 $= a[\sin(a+b) - 1] \leq 0$

若 $f(a+b) = 0$, 则 $a+b$ 就是方程的根, 且它不超过 $a+b$;

若 $f(a+b) < 0$, 又 $f(0) > 0$, 故在区间 $(0, a+b)$ 内至少存在一个 x_0 , 使得 $f(x_0) = 0$, 即 $x_0 = \sin x_0 + b$.

故方程 $x = a \sin x + b$ 至少有一个正根, 它不超过 $a+b$.