朗德教辅

我一定要赚分

妈妈的双眼在看着我
为了母亲的微笑
我一定要赚分……

丛书主编：戚德良 王金战

高中数学
解题方法与技巧探秘

新课标·最新版

黄河出版社

责任编辑：张清训　葛春亮
丛书主编：戚德良　王金战
本册主编：王　飞
封面设计：贾正海

这是一本值得广大师生认真阅读的高考数学解题奇书。内容引人入胜，解法精巧绝伦！

——陕西师范大学数学教授、博导、数学解题学创始人 罗增儒

妈妈的双眼在看着我　为了母亲的微笑　我一定要赚分……

朗德教辅 45.

我一定要赚分
高中数学 解题方法与技巧探秘

ISBN 978-7-80152-961-9
9 787801 529619 >
定价：108.00元(全三册)

我一定要赚分系列丛书

高中数学

解题方法与技巧探秘

丛书主编　戚德良　王金战

本册主编　王　飞

副 主 编　梁新华　程龙珍　孔令旺
　　　　　边玉华

黄 河 出 版 社

责任编辑 葛春亮 张清训　　封面设计 贾正海

图书在版编目（CIP）数据

高中数学解题方法与技巧探秘/王飞主编.—济南：黄河出版社，2008.6
（我一定要赚分系列丛书/戚德良，王金战主编）
ISBN 978-7-80152-961-9

Ⅰ. 高… Ⅱ. 王… Ⅲ. 数学课—高中—解题 Ⅳ. G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 078931 号

丛 书 名　我一定要赚分系列丛书
丛 主 编　戚德良　王金战
书　　名　高中数学解题方法与技巧探秘
主　　编　王　飞
副 主 编　梁新华　程龙珍　孔令旺　边玉华
发　　行　黄河出版社发行部
　　　　　（济南市英雄山路 21 号　250002）
印　　刷　济宁市火炬书刊印务中心
规　　格　880 毫米×1230 毫米　32 开本
　　　　　14.25 印张　547 千字
版　　次　2008 年 10 月第 1 版
印　　次　2008 年 10 月第 1 次印刷
印　　数　1-3000 册
书　　号　ISBN 978-7-80152-961-9/G·222
定　　价　108.00 元（全三册）

致读者

如欲精通解题术，首先需要进行解题训练，包括解题思想与方法技巧的训练、得分步骤的训练。对于解题训练，必须下定决心，视其为日常生活中的一个重要部分。做到这点必须有坚韧不拔的意志。饮食质量、睡眠时间、社交生活乃至思维活动无不影响着你对解题的信念。

解题要的是激情。头脑中始终浮现的就是，当你达到目标时所能得到的奖赏，以此激励自己。充满激情就能赢得尊敬、争得公认，就能树立信心和胜利感，就能显得神采奕奕，就能感到自我满足。

解题训练的重要意义在于，它赋予人们一种临难不惧、泰然处之的本领。这个本领促使您在关键时刻采取迅捷而有效的行动：能在一刹那间作出抉择，反应正确。这个关键时刻就是高考战场的两个小时。

在掌握了解题的技巧之后，您就会觉得，解题这项活动变得更令人兴奋、更令人心满意足了。你就能充分利用自己的力量征服自身思维的薄弱。

胜利的滋味最令人陶醉。你的解法如果达到了炉火纯青的地步，那你就可以经常沉浸在胜利的喜悦之中。从事解题训练，要养成积极动脑的习惯，广做联想，让您的想像之翼时刻张开着、振动着。这一习性在日常生活中将处处给你带来益处，使你左右逢源，如有神助。

成功没有捷径，好题要做六遍。耍小聪明抄近路，必定走进死胡同；投机取巧只能适得其反。

解题的训练要按计划进行。为达到掌握全部解题技术的长期目标，首先应制订短期目标。这些短期目标会时刻激励着你，帮助你克服懒散、灰心和惰性。

掌握解题术要有激情，要全力以赴、信心百倍。在考场上，这种精神会渗透于你解题的全过程，使你赢得胜利。

赚分赚天下，赢分赢天下。这正是《我一定要赚分》这套丛书命名的由来。

我们期待着你的成功！金榜题名时，是你和父母最激动也是我们最激动的时刻。现在，我们作者群已经闻到了您的谢师宴上庆功酒的醇香，祝酒词的激昂。虽然我们远隔百里、千里，但心绪是那样的一样。

再一次预祝您的成功，考场传出欢呼声！

戚德良

目　　录

九种常用的金牌数学解题思想

十一类神奇的高考热点专题的方法技巧

九种常用的金牌数学解题思想

第一章 函数思想奠定百世基业

函数是高中数学的重要内容之一，其理论和应用涉及各个方面，是贯穿整个高中数学的一条主线. 函数思想，系最重要的、最基本的数学思想方法之一，可见它在整个高中数学中的地位和作用. 我们这里所说的函数思想是指运用函数的概念和性质去分析问题、转化问题和解决问题. 为节省篇幅，本章仅侧重于对那些本身无明显的函数关系的问题，通过类比、联想、转化，合理地引进函数，并通过对所引进的函数的研究，使问题得以解决.

一、利用函数的定义域和值域

例 1 (2008 年重庆高考理 · T4)已知函数 $y=\sqrt{1-x}+\sqrt{x+3}$的最大值为 M，最小值为 m，则$\frac{m}{M}$的值为 ( )

A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【规范解析】 由题意函数的定义域为$\{x|-3\leqslant x\leqslant 1\}$，

$\because y=\sqrt{1-x}+\sqrt{x+3}\geqslant 0$.

$\therefore y^2=4+2\sqrt{(1-x)(x+3)}=4+2\sqrt{-(x+1)^2+4}$，

当 $x=-1$ 时，$y^2_{\max}=8$，$\therefore y_{\max}=2\sqrt{2}$，

当 $x=1$ 或 -3 时，$y^2_{\min}=4$，$\therefore y_{\min}=2$，

$\therefore \frac{m}{M}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

【答案】 C

例 2 (2008 年安徽高考文 · T20)已知函数 $f(x)=\frac{a}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+(a+1)x+1$，其中 a 为实数.

(1)已知函数 $f(x)$在 $x=1$ 处取得极值，求 a 的值；

(2)已知不等式 $f'(x)>x^2-x-a+1$ 对任意 $a\in(0,+\infty)$都成立，求实数 x 的取值范围.

【规范解析】 (1)$f'(x)=ax^2-3x+(a+1)$，

由于函数 $f(x)$在 $x=1$ 处取得极值，所以 $f'(1)=0$.

即 $a-3+a+1=0$，$\therefore a=1$.

(2)由题设知：$ax^2-3x+(a+1)>x^2-x-a+1$ 对任意 $a\in(0,+\infty)$ 都成立，

即 $a(x^2+2)-x^2-2x>0$ 对任意 $a\in(0,+\infty)$ 都成立.

于是 $a>\dfrac{x^2+2x}{x^2+2}$ 对任意 $a\in(0,+\infty)$ 都成立，

即 $\dfrac{x^2+2x}{x^2+2}\leqslant 0$.

$\therefore -2\leqslant x\leqslant 0$.

所以 x 的取值范围是 $\{x|-2\leqslant x\leqslant 0\}$.

例 3 已知方程 $ax^2+2(2a-1)x+4a-7=0$ 中，a 为正整数，问 a 取何值时，方程至少有一个整数根.

【思路探索】 若用求根公式解出 $x=\dfrac{1-2a\pm\sqrt{3a+1}}{a}$ 来讨论 x 的整数值，将十分繁难.不妨把 a 表成 x 的函数来试试.

【解】 将原方程改写为

$$a(x+2)^2=2x+7 \qquad (*)$$

显然，当 $x=-2$ 时，$(*)$式不成立，所以有

$$a=\frac{2x+7}{(x+2)^2}\quad(x\neq-2) \qquad (**)$$

若要 a 为正整数，则须 $2x+7\geqslant(x+2)^2$.

解得 $-3\leqslant x\leqslant 1(x\in\mathbf{Z},x\neq-2)$

$\therefore x$ 只能在 $-3,-1,0,1$ 中取值.

代入$(**)$式中可知，仅当 $x=-3$，$x=-1$ 和 $x=1$ 时能保证 a 为正整数.此时分别有 $a=1$ 和 $a=5$.

故当 a 为 1 或 5 时原方程至少有一个整数根.

【解后感言】 本来原方程中的变元是 x，a 为参数，解题过程中我们“反客为主”，将方程表示成为 a 的函数关系式$(**)$，这种将参数和未知数等同看待的思想是函数思想的思维特征之一.

二、利用函数的单调性

解题秘言：函数的单调性，对具体函数通常并不难判别.对有些数学问题，若能与函数的单调性联系起来，常能获得简捷、直观的解法.

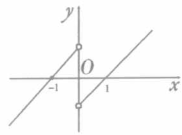
例 1 (2008 年全国Ⅰ高考理·T9)设奇函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，且 $f(1)=0$，则不等式 $\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}<0$ 的解集为 ( )

A. $(-1,0)\cup(1,+\infty)$ B. $(-\infty,-1)\cup(0,1)$

C. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ D. $(-1,0)\cup(0,1)$

【规范解析】 由 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，

且 $f(1)=0$，$f(x)$ 为奇函数，可作出 $f(x)$ 的图象大致如下：



又 $\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}<0\Rightarrow\dfrac{2f(x)}{x}<0$

$\Rightarrow x\cdot f(x)<0$，由图象可知 $x\in(-1,0)\cup(0,1)$.

【答案】 D

例 2 (2008 年山东高考文 · T21)设函数 $f(x)=x^2e^{1-1}+ax^3+bx^2$，已知 $x=-2$ 和 $x=1$ 为 $f(x)$ 的极值点.

(1)求 a 和 b 的值；

(2)讨论 $f(x)$ 的单调性；

(3)设 $g(x)=\dfrac{2}{3}x^3-x^2$，试比较 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的大小.

【规范解析】 (1)因为 $f'(x)=e^{x-1}(2x+x^2)+3ax^2+2bx=xe^{x-1}(x+2)+x(3ax+2b)$，

又 $x=-2$ 和 $x=1$ 为 $f(x)$ 的极值点，

所以 $f'(-2)=f'(1)=0$

因此 $\begin{cases}-6a+2b=0\\3+3a+2b=0\end{cases}$，解方程组得 $a=-\dfrac{1}{3}$，$b=-1$.

(2)因为 $a=-\dfrac{1}{3}$，$b=-1$

所以 $f'(x)=x(x+2)(e^{x-1}-1)$，

令 $f'(x)=0$，解得 $x_1=-2$，$x_2=0$，$x_3=1$.

因为当 $x\in(-\infty,-2)\cup(0,1)$ 时，$f'(x)<0$，

当 $x\in(-2,0)\cup(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$.

所以 $f(x)$ 在 $(-2,0)$ 和 $(1,+\infty)$ 上是单调递增的，

在 $(-\infty,-2)$ 和 $(0,1)$ 上是单调递减的.

(3)由(1)可知 $f(x)=x^2e^{x-1}-\dfrac{1}{3}x^3-x^2$，

故 $f(x)-g(x)=x^2e^{x-1}-x^3=x^2(e^{x-1}-x)$，

令 $h(x)=e^{x-1}-x$，则 $h'(x)=e^{x-1}-1$，

令 $h'(x)=0$，得 $x=1$，

因为 $x\in(-\infty,1]$ 时，$h'(x)\leqslant 0$，

所以 $h(x)$ 在 $x\in(-\infty,1]$ 上单调递减.

故 $x\in(-\infty,1]$ 时，$h(x)\geqslant h(1)=0$；

因为 $x\in[1,+\infty)$ 时，$h'(x)\geqslant 0$，

所以 $h(x)$ 在 $x\in[1,+\infty)$ 上单调递增.

故 $x\in[1,+\infty)$ 时，$h(x)\geqslant h(1)=0$.
所以对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，恒有 $h(x)\geqslant 0$，
又 $x^2\geqslant 0$，因此，$f(x)-g(x)\geqslant 0$，
故对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，恒有 $f(x)\geqslant g(x)$.

例3　求自然数 a 的最大值，使得不等式 $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n+1}>2a-5$ 对一切自然数 n 都成立.

【解】 记 $f(n)=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n+1}$，则

$f(n+1)=\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+3}+\frac{1}{3n+4}$.

$\because f(n+1)-f(n)=\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+4}-\frac{2}{3(n+1)}$

$=\left(\frac{1}{3n+2}-\frac{1}{3n+3}\right)+\left(\frac{1}{3n+4}-\frac{1}{(3n+3)}\right)$

$=\frac{1}{(3n+3)(3n+2)}-\frac{1}{(3n+3)(3n+4)}>0$

$\therefore f(n)$ 是 n 的增函数，

$\therefore f(n)$ 的最小值 $f(1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{13}{12}$，因此 $f(1)>2a-5$ 对一切自然数 n 都成立，当且仅当 $f(1)>2a-5$，

$\therefore a<\frac{73}{24}$

【解后感言】 对有关数列问题及涉及以自然数 n 为变量的问题，常可视为函数 $f(n)$，然后同 $f(x)$ 一样判定其单调性. 这里用的是差值法判定其单调性.

三、利用函数的奇偶性

例1　(2008 年辽宁高考理 · T12)设 $f(x)$ 是连续的偶函数，且当 $x>0$ 时 $f(x)$ 是单调函数，则满足 $f(x)=f\left(\frac{x+3}{x+4}\right)$ 的所有 x 之和为　(　　)

A. -3　　B. 3　　C. -8　　D. 8

【规范解析】 若 $\frac{x+3}{x+4}\neq 0$，依题意 x 与 $\frac{x+3}{x+4}$ 异号，

即 $x<-4$ 或 $-3<x<0$ 且 $-x=\frac{x+3}{x+4}$，

$\therefore x^2+5x+3=0$，$\Delta=5^2-4\times 3>0$，$x_1+x_2=-5$，

此二根均符合题意.

若 $\frac{x+3}{x+4}=0$，则 $x=-3$，符合题意. 故所求和为 -8. 故选 C.

【答案】 C

为了母亲的微笑，我一定要赚分！我的考场每一分，都是妈妈的青丝绕。

【解后感言】 这里运用函数的奇偶性及单调函数一一对应的关系将复杂的隐性方程化归为简单的一元二次方程来求解.

例 2 (2008年福建高考文·T4、理·T4)函数 $f(x)=x^3+\sin x+1(x\in\mathbf{R})$，若 $f(a)=2$，则 $f(-a)$的值为 ( )

A. 3　　B. 0　　C. -1　　D. -2

【规范解析】 设 $g(x)=x^3+\sin x$. 则 $f(x)=g(x)+1$

$f(a)=g(a)+1=2$，$\therefore g(a)=1$.

又 $g(-x)=(-x)^3+\sin(-x)=-(x^3+\sin x)=-g(x)$，

即 $g(x)$为奇函数.

$\therefore f(-a)=g(-a)+1=-g(a)+1=-1+1=0$

【答案】 B

例 3 解方程$(5x+3)^3+x^3+6x+3=0$.

【解】 将方程改写成

$$(5x+3)^3+(5x+3)=-(x^3+x)$$

令 $f(x)=x^3+x$，则 $f(x)$为奇函数，且在 $\mathbf{R}$ 上单调增.

原方程即为 $f(5x+3)=-f(x)=f(-x)$.

由 $f(x)$的单调性知，其对应法则 f 是一一对应的.

故 $5x+3=-x$

得 $x=-\frac{1}{2}$，即 $x=-\frac{1}{2}$为原方程的解.

【解后感言】 这里运用函数的奇偶性及单调函数一一对应的关系将复杂的高次方程化归为简单的一元一次方程来求解.

四、利用函数的连续性和有界性

例 1 证明：方程 $x=a\sin x+b(a>0,b>0)$至少有一个正根，它不超过 $a+b$.

【证明】 设 $f(x)=a\sin x+b-x$.

则 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，且 $f(0)=b>0$.

又 $f(a+b)=a\sin(a+b)+b-(a+b)$

$=a[\sin(a+b)-1]\leqslant 0$

若 $f(a+b)=0$，则 $a+b$ 就是方程的根，且它不超过 $a+b$；

若 $f(a+b)<0$，又 $f(0)>0$，故在区间$(0,a+b)$内至少存在一个 x_0，使得 $f(x_0)=0$，即 $x_0=\sin x_0+b$.

故方程 $x=a\sin x+b$ 至少有一个正根，它不超过 $a+b$.

天天警言

妈妈，我要用不懈的努力来回报您的爱！幸好，戚叔叔呕心沥血给我编写了《我一定要赚分》，是老天佑我！