特色专业

普通高等教育电子通信类国家级特色专业系列规划教材

随机信号分析

高新波　刘聪锋
宋骊平　牛振兴　编著

科学出版社
www.sciencep.com

普通高等教育电子通信类国家级特色专业系列规划教材

随机信号分析

高新波　刘聪锋
宋骊平　牛振兴　编著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书讨论随机信号的基本概念和随机信号的分析计算方法。其特色可归纳为:注重信号处理领域整体知识体系的构建,连续随机信号和离散随机序列分析并重,理论分析与实验实践相结合,以及引入最新的研究成果等。全书共分为6章,包括概率论知识回顾、随机过程及其特征描述、平稳随机过程的线性变换、平稳窄带随机过程、平稳随机过程的非线性变换和非平稳随机过程的特征描述等。书中结合内容的论述,列举了典型的例题,并附有相当数量的习题和部分习题参考答案。此外,本书还配有相应的电子课件可免费提供给任课教师。

本书可作为高等院校工科电子信息类专业的专业基础课教材,也可作为从事信号处理的科技人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

随机信号分析/高新波等编著. —北京:科学出版社,2009
(普通高等教育电子通信类特色专业系列规划教材)
ISBN 978-7-03-025204-3

Ⅰ.随… Ⅱ.高… Ⅲ. 随机信号-信号分析-高等学校-教材
Ⅳ. TN911.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第140530号

责任编辑:匡 敏 潘斯斯 潘继敏 / 责任校对:刘小梅
责任印制:张克忠 / 封面设计:耕者设计工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
新蕾印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009年8月第 一 版 开本:B5(720×1000)
2009年8月第一次印刷 印张:18 1/4
印数:1—3 500 字数:357 000

定价: 29.00 元

如有印装质量问题,我社负责调换

前　言

随机信号(stochastic signal)又称随机过程(stochastic process),它是一连串随机事件动态关系的定量描述。随机过程论与其他数学分支如位势论、微分方程、力学及复变函数论等都有密切联系,是自然科学和社会科学各领域研究随机现象的重要工具。随机过程论目前已得到广泛的应用,在诸如天气预报、统计物理、天体物理、运筹决策、经济数学、安全科学、人口理论、可靠性及计算机科学等很多领域都要经常用到随机过程的理论来建立数学模型。

在研究随机过程时人们透过表面的偶然性描述出必然的内在规律,并以概率的形式来描述这些规律,从偶然中悟出必然正是这一学科的魅力所在。

随机过程整个学科的理论基础是由柯尔莫哥洛夫和杜布奠定的。这一学科最早源于人们对物理学的研究,如吉布斯、玻尔兹曼、庞加莱等对统计力学的研究,及后来爱因斯坦、维纳、莱维等对布朗运动的开创性工作。1907 年前后,马尔可夫研究了一系列有特定相依性的随机变量,后人称之为马氏链。1923 年维纳给出布朗运动的数学定义,直至今日这一过程仍是重要的研究课题。随机过程一般理论的研究通常被认为开始于 20 世纪 30 年代。1931 年,柯尔莫哥洛夫发表了《概率论的解析方法》,1934 年欣钦发表了《平稳过程的相关理论》,这两篇论文奠定了马尔可夫过程与平稳过程的理论基础。1953 年,杜布出版了著作《随机过程论》,系统且严格地叙述了随机过程基本理论。至此,随机过程发展成为一门系统的科学理论。

在日常生活中,由于噪声和干扰的存在使得我们接收到的信号不再是确知信号,而是一个随机过程,通常称之为随机信号。随机信号是客观世界中普遍存在的一类信号,深入理解其统计特性并掌握相应的处理与分析方法对信息技术领域的大学生是非常重要的。因此,随机信号分析是电子信息类专业的重要基础课程。通过该课程的学习,要求学生理解随机信号的基本概念,掌握随机信号的基本理论、统计特性和分析处理方法,为学习“统计信号处理”或“信号检测与估值”等后续课程以及将来的发展奠定坚实的基础。

本书是在西安电子科技大学章潜五教授编写的《随机信号分析》教材的基础上编写而成的,编写时吸取了兄弟院校同类教材的经验,并经过课题组多次讨论后定稿。本书的特色可归纳如下:

1) 注重信号处理领域整体知识体系的构建

从知识体系上看,随机信号分析的数学基础为“高等数学”、“概率论”、“线性

代数”，专业背景来自“信号与系统”，后续课程为“统计信号处理”或“信号检测与估值”。鉴于此，本书在编写中继续强化学生数学分析基础和确知信号的基本概念、基本原理和基本分析处理方法，同时帮助学生了解随机信号分析方法在噪声背景下的信号检测及参数估计中的应用。因此，本书注重为学生勾画出整个信号处理的知识体系和结构，避免学生孤立地学习和理解随机信号处理。

2）连续随机信号和离散随机序列分析并重

传统的随机信号分析教材大多侧重于连续随机过程的描述、刻画和分析，往往忽视了离散随机序列的介绍，从而使学生在学习本课程时只能进行理论分析和推导，而无法利用计算机进行模拟和仿真。然而，充分利用计算机进行随机信号的处理和分析，一方面有利于学生获得直观的认识，另一方面有利于学生学以致用，真正将理论研究与实际应用相结合。因此，本书除了分析连续随机过程，还增加了离散随机序列的分析。

3）理论分析与实验实践相结合

随机信号分析本来为一门比较实用的课程，而现在的教材大多只注重理论讲授而忽略了实验实践。本书为每章的内容设计了相应的实验内容，让学生通过计算机仿真实验来领会和掌握基本概念、基本原理和基本方法。

4）引入最新的研究成果

现有的随机信号分析教材主要局限于平稳随机过程的刻画和分析，而缺少对非平稳随机过程的描述以及随机过程通过非线性系统后的相关分析。随着现代信号处理的不断推进，人们对非平稳、非周期、非高斯和非线性等随机信号处理方面取得了大量的研究成果，这些成果应该让今天的本科学生有初步的了解。因此，本书将增加一章的内容来介绍时频分析和小波分析的基本知识。

全书共分 6 章。首先是绪论，复习与总结概率论的基础知识，同时补充随机变量及其相关的数字特征和特征函数等知识点；第 1 章介绍随机信号的基本概念、基本特性与描述方法，给出复随机过程和离散时间随机过程，并介绍正态随机过程及其谱分析和白噪声过程；第 2 章介绍平稳随机过程的线性变换，复习线性变换与线性系统，介绍随机过程的微分和积分过程，讨论随机过程通过连续和离散时间系统的分析，介绍白噪声通过线性系统的分析和随机过程通过线性变换后的概率密度的求解方法等；第 3 章讨论平稳窄带随机过程，先介绍解析过程和 Hilbert 变换、窄带随机过程的表示和解析复随机过程，然后介绍窄带正态过程包络和相位的概率密度以及其包络平方的概率密度；第 4 章探讨平稳随机过程的非线性变换方法，包括直接法、变换法和缓变包络法等，并给出随机过程通过限幅器的分析以及非线性系统输出端信噪比的计算方法；第 5 章给出非平稳随机过程的特征描述和分析方法，先介绍非平稳随机过程的定义和描述，讨论其相关函数和功率谱密度，最后简要介绍 Wigner-Ville 分布、小波分析等现代信号处理中非平稳随机过程的分析

方法。书中给出大量的例题与图示，各章末附有足够的习题供练习，并在书末提供部分参考答案，除此之外，本书最后还提供一些重要公式的推导、证明和英汉术语对照等附录。

全书由高新波教授等规划、编写，由赵国庆教授审阅。其中，由高新波编写前言部分，宋骊平编写第 0、1 章，刘聪锋编写第 2、3、4 章，牛振兴编写第 5 章，最后由高新波教授与课题组全体同仁统编定稿。本书在编写过程中得到西安电子科技大学电子工程学院领导及随机信号分析课题组同仁的鼓励、帮助和支持。本书的出版还得到科学出版社的大力支持，作者在此一并表示衷心的感谢。

限于编者水平，书中谬误与疏漏之处在所难免，敬请读者批评指正。

本书配有电子课件，可供任课教师免费使用，有需要的教师请与责任编辑联系（电话：010-64033891）。

编　者

2009 年 6 月

目　　录

第 0 章　绪　　论

0.1　概 率 空 间

在工程数学中的概率论部分，已经对古典概型和几何概型这两种特殊类型定义了概率。在古典概型中，要求试验的可能结果是有限个且具有等可能性；对于几何概型，虽然试验的可能结果是无穷多个，但仍要求具有某种等可能性。然而，实际问题中大量的随机试验结果并不属于这两种类型，因此有必要对一般的随机现象给出一个明确的概率定义。1933 年苏联数学家柯尔莫哥洛夫综合前人的研究成果，给出了概率论的公理化体系，明确了事件、概率等基本概念，从而使概率论成为一个严谨的数学分支。

0.1.1　随机试验

在概率论中，随机试验是指在一定条件下出现的结果带有随机性的试验。一般用 E 表示随机试验，下面举几个随机试验的例子。

E_1：抛一枚硬币，观察正面 H、反面 T 出现的情况；

E_2：抛一颗骰子，观察出现的点数；

E_3：向实数轴的$(0,1)$区间上随意地投掷一个点；

E_4：在一批灯泡中任意抽取一只，测试它的寿命。

上面几个试验的例子存在共同的特点。例如，试验 E_1 有两种可能的结果，出现 H 或者出现 T，但在抛掷之前不能确定出现 H 还是出现 T。这个试验可以在相同条件下重复进行。试验 E_2 有六种可能结果，但在抛掷之前不能确定究竟会出现哪一种结果，这一试验也可在相同条件下重复进行。又如试验 E_4，我们知道灯泡的寿命（以小时计）$t\geqslant 0$，但在测试之前并不能确定它的寿命有多长，这一试验也可以在相同的条件下重复进行。概括起来，这些试验具有以下特点：

(1) 可以在相同的条件下重复进行。

(2) 每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果。

(3) 每次试验之前不能确定哪一个结果会出现。

在概率论中，将具有上述三个特点的试验称为**随机试验**。

0.1.2　样本空间

对于随机试验，尽管在每次试验之前不能预知试验的结果，但试验的所有可能

结果组成的集合是已知的。将随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为随机试验 E 的**样本空间**，把每一可能出现的试验结果称为一个**基本事件**，可见样本空间由随机试验 E 的所有基本事件构成。

例如，在随机试验 E_1 中，出现"正面 H"、"反面 T"都是基本事件。这两个基本事件构成一个样本空间。

在随机试验 E_2 中，分别出现"1 点"、"2 点"、"3 点"、"4 点"、"5 点"、"6 点"都是基本事件。这六个基本事件构成一个样本空间。

在随机试验 E_3 中，在(0,1)区间中的每一个点是一个基本事件，而所有点的集合(即(0,1)区间)构成一个样本空间。

抽象地说，样本空间是一个点的集合，此集合中的每个点都称为**样本点**。样本空间记为 $\Omega=\{\omega\}$，其中 ω 表示样本点。有如下定义。

定义 0.1.1　设样本空间 $\Omega=\{\omega\}$ 的某些子集构成的集合记为 $\mathscr{F}$，如果 $\mathscr{F}$ 满足下列性质：

(1) $\Omega\in\mathscr{F}$。

(2) 若 $A\in\mathscr{F}$，则 $\overline{A}=\Omega-A\in\mathscr{F}$。

(3) 若 $A_k\in\mathscr{F}, k=1,2,\cdots$，则 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k\in\mathscr{F}$。

那么称 $\mathscr{F}$ 为一个**波雷尔**(Borel)**事件域**，或 σ **事件域**。波雷尔事件域中每一个样本空间 Ω 的子集称为一个**事件**。

特别指出，样本空间 Ω 称为**必然事件**，而空集 $\varnothing$ 称为**不可能事件**。

在上面三个样本空间的例子中，每一个样本点都是基本事件。但是，一般并不要求样本点必须是基本事件。

0.1.3　概率空间

在概率论中曾提及概率的统计定义和古典概率定义。下面介绍概率的公理化定义。这种定义是从上述具体的概率定义抽象出来的，同时又保留了具体概率定义中的一些特征。事件的概率是对应于波雷尔事件域 $\mathscr{F}$ 中每一个 Ω 的子集的一个数，即可以看成集合函数。

定义 0.1.2(概率的公理化定义)　设 $P(A)$ 是定义在样本空间 Ω 中波雷尔事件域 $\mathscr{F}$ 上的集合函数。如果 $P(A)$ 满足以下条件：

(1) 非负性。$\forall A\in\mathscr{F}$，有 $P(A)\geqslant 0$。

(2) 归一性。$P(\Omega)=1$。

(3) 可列可加性。若对 $\forall n=1,2,\cdots, A_n\in\mathscr{F}$，且对 $\forall i\neq j, A_iA_j=\varnothing$，则有

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)$$

则称 P 为定义在波雷尔事件域上的概率，而称 $P(A)$ 为事件 A 的**概率**。

至此，我们引进了概率论中的三个基本概念：样本空间 Ω、事件域 $\mathscr{F}$ 和概率 P。它们是描述一个随机试验的三个基本组成部分。对随机试验 E 而言，样本空间 Ω 给出它的所有可能的试验结果，$\mathscr{F}$ 给出了由这些可能结果组成的各种各样的事件，而 P 则给出了每一个事件发生的概率。将这三者结合起来，称这三元有序总体 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为**概率空间**。

0.2 条件概率空间

0.2.1 条件概率

条件概率是概率论中的一个重要而实用的概念。因为在许多实际问题中，除了要求事件 A 发生的概率，有时还需要求在“事件 B 已发生”的条件下事件 A 发生的概率，这就是条件概率，记为 $P(A|B)$。先看一个例子。

例 0.2.1 将一枚硬币抛掷两次，观察正反面出现情况。设事件 B 为“至少有一次为正面”，事件 A 为“两次掷出为同一面”。现在来求在“事件 B 已发生”的条件下事件 A 发生的条件概率。

解 容易看出本题中样本空间为 $\Omega=\{HH,HT,TH,TT\}$，含有四个样本点。$B=\{HH,HT,TH\}$，$A=\{HH,TT\}$，已知事件 B 已发生，也就是说已知试验所有可能结果所组成的集合应为 B，B 中一共有三个元素，其中只有 $HH\in A$，故由等可能性知 $P(A|B)=\frac{1}{3}$。

另外，易知 $P(A)=\frac{2}{4}$，显然与 $P(A|B)$ 不等。

此外，还可发现 $P(AB)=\frac{1}{4}$，$P(B)=\frac{3}{4}$，即 $P(A|B)$ 恰好等于 $P(AB)$ 与 $P(B)$ 之比。

下面给出条件概率的一般性定义。

定义 0.2.1 设 $A,B\in\mathscr{F}$，且 $P(A)>0$，记

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)} \tag{0.2.1}$$

称其为在已知事件 A 发生条件下，事件 B 发生的**条件概率**。

记 $P_A(B)\overset{\text{def}}{=\!=}P(B|A)$，称 $(\Omega,\mathscr{F},P_A)$ 为给定事件 A 的条件概率空间，简称为**条件概率空间**。

0.2.2 乘法公式

由式(0.2.1)，有

$$P(AB) = P(A)P(B \mid A), \quad P(A) > 0 \tag{0.2.2}$$

称其为**条件概率的乘法公式**。

若 $P(B)>0$，与上面类似可定义已知 B 发生条件下事件 A 发生的条件概率为

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \quad P(B) > 0 \tag{0.2.3}$$

及相应的乘法公式

$$P(AB) = P(B)P(A \mid B), \quad P(B) > 0 \tag{0.2.4}$$

乘法公式可推广到 n 个事件的情形。

一般乘法公式：设 $A_i \in \mathscr{F}, i=1,2,\cdots,n$，且 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1A_2)\cdots P(A_n \mid A_1A_2\cdots A_{n-1}) \tag{0.2.5}$$

0.2.3 全概率公式

全概率公式是用来计算概率的一个重要公式。在介绍全概率公式之前，先介绍样本空间的划分概念。

定义 0.2.2 设 Ω 为试验 E 的样本空间，$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 E 的一组事件。若：

(1) $B_iB_j=\varnothing, i\neq j, i,j=1,2,\cdots,n$。

(2) $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n = \Omega$。

则称 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为样本空间 Ω 的一个**划分**。

若 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是样本空间的一个划分，那么，对每次试验，事件 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 中必有一个且仅有一个发生。

例如，设试验 E 为“掷一颗骰子观察其点数”，它的样本空间为 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$。E 的一组事件 $B_1=\{1,2,3\}, B_2=\{4,5\}, B_3=\{6\}$ 是 Ω 的一个划分；而事件组 $C_1=\{1,2,3\}, C_2=\{3,4\}, C_3=\{5,6\}$ 不是 Ω 的划分。

定理 0.2.1 设试验 E 的样本空间为 Ω，B_i 为 Ω 的一个划分，$B_i \in \mathscr{F}$，且 $P(B_i)>0, i=1,2,\cdots,n$。若 $A\in\mathscr{F}$，则

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A \mid B_i) \tag{0.2.6}$$

称为**全概率公式**。

在很多实际问题中 $P(A)$ 不易直接求得，但却容易找到 Ω 的一个划分 $B_1, B_2,\cdots,B_n$，且 $P(B_i)$ 和 $P(A \mid B_i)$ 或为已知，或容易求得，那么就可以根据式(0.2.6)求出 $P(A)$。

0.2.4 贝叶斯公式

由条件概率的定义、乘法公式及全概率公式，可以得到贝叶斯(Bayes)公式。

定理 0.2.2 设试验 E 的样本空间为 Ω，B_i 为 Ω 的一个划分，$B_i \in \mathscr{F}$，且 $P(B_i)>0$，$i=1,2,\cdots,n$。若 $A\in\mathscr{F}$ 且 $P(A)>0$，则

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(A \mid B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A \mid B_j)P(B_j)}, \quad i = 1,2,\cdots,n \qquad (0.2.7)$$

称为**贝叶斯公式**。

在式(0.2.6)、式(0.2.7)中取 $n=2$，并将 B_1 记为 B，此时 B_2 就是 $\bar{B}$，那么，全概率公式和贝叶斯公式分别为

$$P(A)= P(A \mid B)P(B) + P(A \mid \bar{B})P(\bar{B}) \qquad (0.2.8)$$

$$P(B \mid A)= \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(A \mid B)P(B)}{P(A \mid B)P(B) + P(A \mid \bar{B})P(\bar{B})} \qquad (0.2.9)$$

这两个公式是常用的。

例 0.2.2 对以往数据分析表明，当机器调整良好时，产品的合格率为 98%，而当机器发生某种故障时，其合格率为 55%。每天早上机器开动时，机器调整良好的概率为 95%。试求已知某日早上第一件产品是合格品时，机器调整良好的概率是多少？

解 设 A 为事件："产品合格"，B 为事件："机器调整良好"。由题意可知 $P(A|B)=0.98$，$P(A|\bar{B})=0.55$，$P(B)=0.95$，$P(\bar{B})=0.05$，所需求的概率为 $P(B|A)$。由贝叶斯公式得

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B})} = \frac{0.98 \times 0.95}{0.98 \times 0.95 + 0.55 \times 0.05} = 0.97$$

这就是说，当生产出第一件产品是合格品时，机器调整良好的概率为 0.97。这里，概率 0.95 是由以往的数据分析得到的，叫做**先验概率**。而在得到信息(即生产出的第一件产品是合格品)之后再重新加以修正的概率(即 0.97)叫做**后验概率**。有了后验概率我们就能对机器的情况有进一步的了解。

0.3 随机变量

0.3.1 随机变量的概念

概率论中另一个重要概念就是随机变量的概念。随机变量就是在试验的结果中能取得不同数值的量，其数值随试验结果而定，由于试验的结果是随机的，所以

它的取值具有随机性。

随机变量定义如下。

定义 0.3.1　给定概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$。设 $X=X(\omega)$是定义域为 Ω 的一个函数。如果对任意一个实数 x,Ω 的子集为

$$\{\omega: X(\omega) \leqslant x\} \in \mathscr{F}$$

那么,称 $X(\omega)$为**随机变量**,简写为 X。

以抛掷一枚硬币为例,$\Omega=\{\omega\}=\{$正面,反面$\}$为这一随机试验的样本空间,规定函数 $X(\omega)$的值:$X($正面$)=1$,$X($反面$)=0$。这样,$X(\omega)$即为随机变量。

再以掷骰子为例,$\Omega=\{1$ 点,2 点,3 点,4 点,5 点,6 点$\}$。规定函数 $X(k$ 点$)=k$,$k=1,2,3,4,5,6$,即 $X(\omega)=\omega$,则 $X(\omega)$为随机变量。

按照随机变量可能取得的值,可以把它们分为两种基本类型,即离散随机变量和连续随机变量。

离散随机变量仅可能取得有限个或可数无穷多个数值,即这样的数的集合:其中所有的数可按一定的顺序排列,从而可以表示为数列 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$。在工程技术中常常遇到只能取得非负整数值的随机变量。例如,一批产品中的次品数,电话用户在某一段时间内对电话站的呼叫次数等。

连续随机变量可以取得某一区间内的任何数值。例如,车床加工的零件尺寸与规定尺寸的偏差,射击时击中点与目标中心的偏差等。

0.3.2　离散随机变量

离散随机变量的概率分布一般采用**概率分布表**(也可以称为**分布律**)来描述。

设离散随机变量 X 取得的一切可能值为 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$,而取得这些值的概率分别为 $p(x_1),p(x_2),\cdots,p(x_n),\cdots$,简写为 $p_1,p_2,\cdots,p_n,\cdots$,则可以列出概率分布表如表 0.3.1 所示。

表 0.3.1　概率分布表

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

通常把函数

$$p(x_i)=P(X=x_i),\quad i=1,2,\cdots,n,\cdots$$

称为离散随机变量 X 的概率函数。概率函数 $p(x_i)$具有下列性质:

(1) 概率函数是非负函数,即

$$p(x_i)\geqslant 0,\quad i=1,2,\cdots,n,\cdots$$

(2) 随机变量 X 取得一切可能值的概率的和等于 1,即

$$\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1 \tag{0.3.1}$$

如果随机变量 X 可能取得可数无穷多个值,则式(0.3.1)成为

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1 \tag{0.3.2}$$

有时,概率的分布情况也可直接用一系列等式

$$p(x_i) = P(X = x_i),\quad i = 1,2,\cdots,n,\cdots \tag{0.3.3}$$

表示。式(0.3.3)称为 X 的概率分布。

0.3.3 连续随机变量

连续随机变量的特点是它可能取某一区间内的所有值,例如,炮击中弹着点与目标的距离可以是$[0,+\infty)$中的任意一个值。对于连续随机变量,列举出它的所有取值及其相应的概率是不可能也是没有意义的,通常对连续随机变量 X 只考虑事件"$a<X\leqslant b$"发生的概率。为此引入随机变量的分布函数的概念。

定义 0.3.2 设有随机变量 X,对任意的实数 $x\in(-\infty,+\infty)$,称 $F(x)=P\{X\leqslant x\}$为随机变量 X 的**分布函数**。

考虑上述事件"$a<X\leqslant b$"发生的概率,有

$$P\{a < X \leqslant b\} = P\{X \leqslant b\} - P\{X \leqslant a\} = F(b) - F(a)$$

因此,若已知 X 的分布函数,就可以知道 X 落入任一区间$(a,b]$上的概率,从这个意义上说,分布函数完整地描述了随机变量的统计规律性。

正是通过分布函数,才可以用数学分析的方法来研究随机变量。如果将 X 看成是数轴上的随机点的坐标,那么,分布函数 $F(x)$在 x 处的函数值就表示 X 落入区间$(-\infty,x]$上的概率。

定义 0.3.3 如果对于随机变量 X 的分布函数 $F(x)$,存在非负函数 $f(x)$,使对于任意实数 x 有

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t \tag{0.3.4}$$

则称 X 为连续随机变量,其中函数 $f(x)$称为 X 的**概率密度函数**,简称**概率密度**。

由定义可知,概率密度 $f(x)$具有以下性质:

(1) 非负性。$f(x)\geqslant 0$。

(2) 规范性。$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=1$。

(3) 对于任意实数 $x_1,x_2(x_1\leqslant x_2)$

$$P\{x_1 < X \leqslant x_2\} = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x$$

(4) 若 $f(x)$在点 x 处连续，则有 $F'(x)=f(x)$。

例 0.3.1 设连续随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x) = A\mathrm{e}^{-|x|}, \quad -\infty < x < +\infty$$

求：(1) 系数 A；(2) $P\{x\in(0,1)\}$；(3) X 的分布函数 $F(x)$。

解 (1) 由概率密度的基本性质 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=1$，得

$$A\left(\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\right) = 1$$

解得

$$A = \frac{1}{2}$$

(2) $P\{x\in(0,1)\}=P\{0<x<1\}=\int_0^1 \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$

(3) $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$。

当 $x<0$ 时

$$F(x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}$$

当 $x\geqslant 0$ 时

$$F(x) = \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t + \int_{0}^{x}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\right) = 1 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}$$

从而

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}, & x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}, & x \geqslant 0 \end{cases}$$

0.3.4 多维随机变量

前面讨论的仅是单个随机变量的情况，但在实际中常常会遇到同时需要几个随机变量才能较好地描述某一试验或现象。例如，炮弹在地面的弹着点的位置是由一对随机变量(X,Y)所构成。称 n 个随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的总体 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为 n 维随机变量或 n 维随机向量。由于二维和 n 维没有什么原则性的区别，因此，为了简单和容易理解起见，着重讨论二维随机变量的情况。

0.3.4.1 联合分布函数

定义 0.3.4 设 X 和 Y 为定义在同一概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的两个随机变量，

则(X,Y)称为二维随机变量，对任意 $x,y\in R$，令

$$F(x,y)=P\{X\leqslant x,Y\leqslant y\}$$

称 $F(x,y)$为(X,Y)的**联合分布函数**，或称**二维分布函数**。

如果将二维随机变量(X,Y)看成平面上随机点的坐标，那么分布函数 $F(x,y)$在(x,y)处的函数值就是随机点(X,Y)落入如图 0.3.1(a)所示的以点(x,y)为顶点的无限矩形区域内的概率。

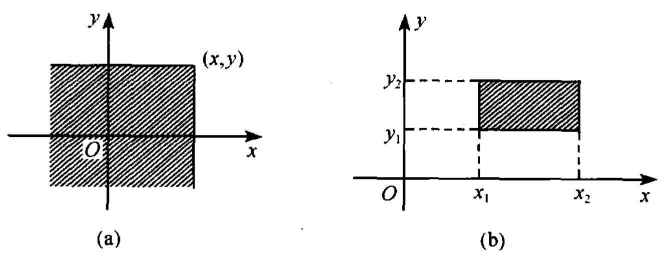

图 0.3.1　二维随机变量的分布函数示意图

那么，随机点(X,Y)落入如图 0.3.1(b)所示的矩形区域内的概率就可以由分布函数给出，其概率为

$$P\{x_1<X\leqslant x_2,y_1<Y\leqslant y_2\}=F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)-F(x_1,y_2)$$

分布函数 $F(x,y)$具有以下几个基本性质：

(1) $0\leqslant F(x,y)\leqslant 1$。

(2) $F(x,y)$关于 x 和 y 均单调非降、右连续。

(3) $F(-\infty,y)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x,y)=0$

$F(x,-\infty)=\lim\limits_{y\to-\infty}F(x,y)=0$

$F(-\infty,-\infty)=\lim\limits_{(x,y)\to(-\infty,-\infty)}F(x,y)=0$

$F(+\infty,+\infty)=\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}F(x,y)=1$

此外，如果(X,Y)的分布函数 $F(x,y)$已知，则由 $F(x,y)$可导出 X 和 Y 各自的分布函数 $F_X(x)$和 $F_Y(y)$。

$$F_X(x)=P\{X\leqslant x\}=P\{X\leqslant x,Y\leqslant+\infty\}=F(x,+\infty)\qquad(0.3.5)$$

同理

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{X\leqslant+\infty,Y\leqslant y\}=F(+\infty,y)\qquad(0.3.6)$$

通常称 $F_X(x)$和 $F_Y(y)$为联合分布函数 $F(x,y)$的**边缘分布函数**。

0.3.4.2　离散型随机变量的联合概率分布

定义 0.3.5　当随机变量 X 和 Y 只能取有限个或可列个值时，称(X,Y)为二