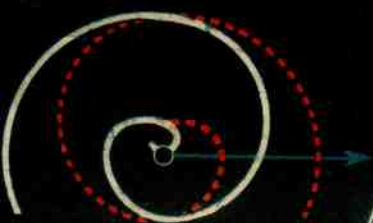


大学自学丛书



解析几何

陸慧英編著

科技卫生出版社

解 析 几 何

陆 慧 英 编 著

科技卫生出版社出版

(上海南京西路2004号)

上海市书刊出版业营业许可証出093号

上海市印刷五厂印刷 新华书店上海发行所总经售

开本787×1092 1/32 印张6 字数130,000

1958年12月第1版 1958年12月第1次印刷

印数1—20,000

统一书号: 13119·219

定价: (九) 0.54元

序 言

解析几何学没有固定的内容,它不是研究的对象而是一种方法,就是用代数法来研究几何图形的性质,就是把图形的几何关系用代数方程(或方程组)来表示。

例如在笛卡尔的直角坐标系的条件下,平面上每一条直线对应着一个一次方程:

$$Ax + By + C = 0$$

三直线交于一点,表示为已知直线的三方程组有唯一解的条件。

解析几何学不但是研究几何学的基本方法,及学习微积分的重要条件,并且广泛地被应用于其他自然科学与技术科学的领域里,它不但是学习数学、物理的必要工具,也是工程师的好助手。

解析几何学的原始思想出于笛卡尔 (Descartes)。1637 年,他在写“几何”论文里叙述了这方法的原理。

本书是为在职干部自学而编写的,学习的目的又是为学习数学分析、物理及技术科学作准备的,所以本书内容并不象一般的解析几何学教程那样全面,例如一般二次曲线研究等都删去而不讲,代之以有关生产及实用的材料。又因为是自学的不是讲授的书本,所以在科学严密性基础上也照顾到读者容易接受,象矢量积的分配律的证明便略去了。

本书分为十一讲,预计学习 144 小时,如果加上总复习 16 小时,刚好 160 小时学好。每周学习 8 小时,20 周(就是一个学期)学完。

每一讲后附有复习思考题及检查作业。总复习后,有总检查作业。书后附有思考题的解答和作业的提示及正确答案。通过这些练习,读者可以了解自己的学习情况,以便随时更正学习方法及学习态度。

一般学习方法指导

学习理论，必须进行艰苦的思想劳动，因为只有通过自己的独立思考，才能学好理论。学习解析几何学也必须通过自己的思考，来摸清这些理论的来龙去脉，这样才能深入领会这些原理的含义。

学习理论，不仅要开动脑筋，理解那些已有的定理和公式，更重要的是要研究这些定理和公式的建立的逻辑思维。

学习理论，必须循序渐进，逐步钻研，随时实践——做练习。

在每一讲开始时，读者必须先看本讲的学习指示，这是指出本讲的中心问题及学习本讲的方法。倘若能按照这些指示来进行学习，比较容易掌握内容。本书学习完后，必须总复习两星期，使知识系统化。

一 阅 读

1. 应当仔细阅读教材内容，必须对前面的内容正确地理解后，才能继续前进，不可以东挑一点看看，西挑一点读读。学完一小节后，应当放下书本，思考本节所解决的中心问题，并考虑除了本节所讲的方法外，有没有别的方法可以解决这个问题？学完一讲，必须把各小节内容合併考虑，并且注意各小节的衔接性和顺序性。

2. 应当特别注意一些下面划有线条的基本概念。这些基本概念对学习解析几何学来讲，就象造房子用的墙基。如果基本概念不搞清，理论既学不好，作业也无法下手。对例题，要仔细钻研，应当自己设法举出类似的例题。

3. 对于类似的理论、概念、公式多作比较。这样，学习才能深入，理论才会彻底，记忆才能巩固。

4. 学完一讲必须作笔记，这样做对学习下一章是有很大的帮助的。

二 笔 记

1. 练习记笔记，做摘要，对培养独立工作能力有很大的意义。建议在学完一讲后，经过自己的思索，写下定义，定理的叙述、定理的证明、及公式的导来；最好用自己的体会写出这一讲的总结。

在筆記本的边上留着空白，以便标出疑問，供复习时思考。

2. 筆記要記得清楚、整洁，并有条理。这不仅使自己习惯于有秩序的工作，并且还可以避免很多錯誤。

3. 建議作筆記时，在自己認為重要的結論下，划綫条，或画小点，以便复习时一望而知。

III 作 业

1. 解題前，应当对指定的学习內容及例題能彻底的理解，然后訂解題的簡單計劃，最后动手解題。

2. 解題必須做在練習本上，推理必需有根据，这些根据要确实知道它是正确的；不應該应用理論根据不清楚或結果不知道的公式。

3. 計算要詳細，要有耐心，不应粗枝大叶，潦草完事。每个題目应当做到要求的最終答案。

4. 選擇比較容易的題先解，假如碰到困难，必須反复钻研教材及例題。

5. 在解題过程中，不要引入 π 及 $\sqrt{2}$ 等的近似值，以免繁复的数字运算。

6. 解答不要早看，一定要在做完后才用来核对。不过有些比較复杂的习题，可以看了書后的提示再做。碰到自己的解答与标准答案不符合时，首先要找出自己的錯誤来源，然后改正。

7. “熟能生巧”，不要怕多做題，題做得愈多，解題的技巧愈熟練，而且，理論也容易消化和巩固，公式也自然地記住了。

目 录

第一部分 平面解析几何学

第一講 行列式理論初步(学习20小时) 1

本講学习指示

§1.1 二阶行列式.....	1
§1.2 三阶行列式及它的主要性质.....	7
§1.3 三阶行列式的余子式及代数余子式.....	11
§1.4 三阶行列式的应用.....	15
§1.5 三元线性齐次方程组.....	19
(1) 复习思考题.....	23
(2) 检查作业.....	24

第二講 平面坐标法 (学习12小时) 25

本講学习指示

§2.1 平面上点的笛氏直角坐标.....	27
§2.2 两点间的距离.....	28
§2.3 线段的定比分点.....	29
§2.4 质心.....	31
§2.5 三角形的面积.....	33
§2.6 平面上点的极坐标.....	34
§2.7 极坐标与直角坐标间的变换.....	35
(1) 复习思考题.....	36
(2) 检查作业.....	37

第三講 曲线与方程 (学习12小时) 39

本講学习指示

§3.1 曲綫方程的概念	39
§3.2 由曲綫求它的方程	40
§3.3 由方程求它的曲綫	41
§3.4 兩曲綫的交点	42
§3.5 曲綫的极坐标方程	42
§3.6 曲綫的參数方程	44
(1)复习思考題	46
(2)检查作业	46

第四講 直綫(学习16小时) 48

本講学习指示

§4.1 直綫的点斜式方程	48
§4.2 直綫的斜截式方程	49
§4.3 直綫的一般式方程	49
§4.4 直綫的两点式方程	50
§4.5 直綫的截距式方程	51
§4.6 直綫的法綫式方程	52
§4.7 化直綫的一般式方程为法綫式	53
§4.8 直綫的參数式方程	53
§4.9 直綫与点的关系	55
§4.10 直綫与直綫間的关系	57
(1)复习思考題	60
(2)检查作业	61

第五講 圓錐曲綫(学习24小时) 64

本講学习指示

§5.1 圓錐曲綫的发生和类别	64
§5.2 圓	65
§5.3 橢圓	66

§5.4 双曲线	69
§5.5 抛物线	72
§5.6 离心率和准线	74
§5.7 圆锥曲线的统一定义与极坐标方程	78
§5.8 圆锥曲线的切线和法线、切线和法线的性质,及它们在物理学上的应用	80
§5.9 圆锥曲线与实际生活	86
(1) 复习思考题	86
(2) 检查作业	87

第六讲 坐标变换 (学习12小时) 89

本讲学习指示

§6.1 坐标系的平移	89
§6.2 坐标系的旋转	91
§6.3 一般坐标的变换	95
§6.4 坐标变换的应用	96
(1) 复习思考题	100
(2) 检查作业	100

第二部分 空间解析几何学

第七讲 空间坐标法 (学习8小时) 102

本讲学习指示

§7.1 笛氏直角坐标	102
§7.2 坐标系的平移	103
§7.3 两点间的距离	104
§7.4 线段的定比分点	104
§7.5 直线的方向角、方向余弦和方向数	105
§7.6 球面坐标和柱面坐标	106
(1) 复习思考题	109

(2) 检查作业	110
----------	-----

第八讲 矢量代数 (学习20小时) 111

本讲学习指示

§8.1 矢量与数量	111
------------	-----

§8.2 矢量的和与差	112
-------------	-----

§8.3 矢量与数量的乘积	113
---------------	-----

§8.4 矢量的分解	115
------------	-----

§8.5 矢量的数量积	117
-------------	-----

§8.6 矢量的矢量积	120
-------------	-----

(1) 复习思考题	123
-----------	-----

(2) 检查作业	123
----------	-----

第九讲 平面 (学习8小时) 128

本讲学习指示

§9.1 平面的一般式方程	126
---------------	-----

§9.2 平面的法线式方程	128
---------------	-----

§9.3 平面的截距式方程	130
---------------	-----

§9.4 两平面间的关系	130
--------------	-----

§9.5 平面与点的关系	133
--------------	-----

(1) 复习思考题	134
-----------	-----

(2) 检查作业	134
----------	-----

第十讲 空间直线 (学习8小时) 136

本讲学习指示

§10.1 直线的矢量方程, 直线的参数方程及直线的标准方程	136
--------------------------------	-----

§10.2 直线的两点方程	138
---------------	-----

§10.3 直线的一般方程	139
---------------	-----

§10.4 直线与直线的关系	140
----------------	-----

§10.5 直线与平面的关系	143
----------------	-----

(1) 复习思考题	146
(2) 检查作业	146
第十一講 二次曲面与空間曲綫 (学习 8 小时)	148
本講学习指示	
§11.1 曲面方程	148
§11.2 二次柱面	149
§11.3 二次錐面	151
§11.4 旋轉曲面	152
§11.5 一般二次方程	153
§11.6 橢圓面	154
§11.7 单叶双曲面	156
§11.8 双叶双曲面	157
§11.9 橢圓拋物面	158
§11.10 双曲拋物面	159
§11.11 曲面类型总结	161
§11.12 空間曲綫	161
(1) 复习思考题	163
(2) 检查作业	164
总检查作业	164
解 答	165

第一部分 平面解析几何学

第一讲 行列式理论初步

行列式在解析几何学里用途很大,象求三角形的面积,三点共线以及三线共点等问题,用了行列式就非常方便。现在只讲它应用于解析几何方面的初步理论,即从线性方程组的求解,引进二阶行列式的一些基本性质,推广再得三阶行列式的一些基本性质及应用。

学习指示: (i) 弄清楚行列式的定义和特性;

(ii) 掌握二阶及三阶行列式的运算方法;

(iii) 反复思考三元线性齐次方程组有非0解的意义和条件,这条件对解析几何用处很大。

§1.1 二阶行列式

在初等代数里已讲过关于一次方程组的问题,现在我们要讲比初等代数中所讲过更加方便的方法。

设有二元线性方程组:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & (i) \\ a_2x + b_2y = c_2 & (ii) \end{cases} \quad (1)$$

初等代数里用消去法求解,就是以 b_2 乘(i)式, b_1 乘(ii)式然后相减,得

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1 \quad (iii)$$

同样以 a_1 乘(ii)式,以 a_2 乘(i)式,相减得

$$(a_1b_2 - a_2b_1)y = c_2a_1 - c_1a_2 \quad (iv)$$

如果 $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, 我们就把 $(a_1b_2 - a_2b_1)$ 来除(iii)及(iv), 得

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad y = \frac{c_2a_1 - c_1a_2}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad (2)$$

(2)的分子和分母是形式相同的代数式: 两个因数的乘积减去另二

个因数的乘积，这种形式的代数式，例如 $a_1b_2 - a_2b_1$ ，叫做二阶行列式，记作：

$$a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} \text{(左上角)} & \text{(右上角)} \\ a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \text{(左下角)} & \text{(右下角)} \end{vmatrix}$$

行列式的计算方法就是左上角的数乘以右下角的数的乘积，减去左下角的数乘以右上角的数的乘积。

例如： $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 3 \times 8 - 1 \times 5 = 24 - 5 = 19$, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

注意下列的名称：

(1) 行列式的元素：组成二阶行列式的数或文字叫做行列式的元素。例如 a, b, c, d 就叫做行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 的元素， $3, 5, 1, 8$ 叫做行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}$ 的元素，二阶行列式共有四个元素。

(2) 行列式的项：计算行列式时所得的乘积，叫做行列式的项。例如 ad 和 bc 就是行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 的项，二阶行列式共有二项。

(3) 行：横排叫做行。例如 a 和 b 组成行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 的第一行， c 和 d 组成行列式的第二行，二阶行列式共有二行。

(4) 列：竖排叫做列。例如 a 和 c 组成行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 的第一列， b 和 d 组成行列式的第二列，二阶行列式共有二列。

(5) 对角线：在行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 中，有两对角线 a 和 d 组成行列式的主对角线， c 和 b 组成行列式的付对角线。

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

(主一行) (主一列) (付一行) (付一列)

利用这些术语，可得下列结论：

二阶行列式等于它主对角线上两元素的乘积，减去它付对角线上两元素的乘积。

根据上面的方法，可以导出二阶行列式的几个基本性质：

i) 行列式里，行与列对调，它的数值不变。

$$\text{例如：} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} \quad \text{即} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$$

ii) 行列式里，两行(或二列)对调，它的符号要改变。

$$\text{例如：} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \quad (\text{第一行与第二行对调}),$$

$$\therefore \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 3 \times 8 - 5 \times 1 = 19, \quad \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \times 5 - 3 \times 8 = -19$$

$$\text{即} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} \quad \text{或} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$$

iii) 行列式里，倘若一行(或一列)的元素全为0时，它的数值显然为0。

$$\text{例如：} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 0 \times 8 - 0 \times 1 = 0, \quad \text{或} \quad \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{vmatrix} = 0$$

iv) 行列式里，倘若二行(或二列)相同，它的数值为0。

$$\text{例如：} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 3 = 0, \quad \text{或} \quad \begin{vmatrix} a & a \\ c & c \end{vmatrix} = 0, \quad \text{及} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = 0.$$

v) 行列式里，倘若那一行(或那一列)的元素有公因子时，这个因子可以提到行列式的外面。

$$\text{例如：} \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \cdot 3 & 5 \\ 2 \cdot 1 & 8 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 8 \end{vmatrix},$$

$$\therefore \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 6 \times 8 - 2 \times 5 = 38$$

$$2 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 2(24 - 5) = 38$$

$$\text{或: } \begin{vmatrix} ma & b \\ mc & d \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} ma & mb \\ c & d \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

vi) 行列式里,倘若二行(或二列)的元素都成比例,它的数值为0,由性质iv)及v)便可知道。

采用了行列式的記号后;方程組(1)的解可写成

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

观察上式 x 和 y 的值,都是由分式表示。两分式的分母是相同的,分子是不同的。在表示 x 的分式中,只要把分母的第一列(即 x 的系数) a_1, a_2 ,换为常数项 c_1, c_2 ,就得它的分子。同样,在表示 y 的分式中,只要把分母的第二列(即 y 的系数) b_1, b_2 ,换为 c_1, c_2 ,就得到它的分子。

$$\text{例1. } \begin{cases} 5x+2y=5 & (1) \\ x-3y=18 & (2) \end{cases} \quad \begin{matrix} a_1=5, b_1=2, c_1=5, \\ a_2=1, b_2=-3, c_2=18. \end{matrix}$$

$$\text{解 } x: \text{分母: } \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -15 - 2 = -17, \quad \text{分子: 以 } 5, 18 \text{ 代 } 5, 1;$$

$$\text{得 } \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 18 & -3 \end{vmatrix} = -15 - 36 = -51, \quad \therefore x = \frac{-51}{-17} = 3.$$

$$\text{解 } y: \text{分母: } \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -17, \quad \text{分子: 以 } 5, 18 \text{ 代 } 2, -3,$$

$$\text{得 } \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 1 & 18 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 18 \end{vmatrix} = 5(18-1) = 85,$$

$$\therefore y = \frac{85}{-17} = -5.$$

$$\therefore \begin{cases} x=3 \\ y=-5 \end{cases} \quad (3)$$

驗算: 以(3)代入(1)得 $5 \times 3 + 2(-5) = 15 - 10 = 5$ 。

$$\therefore \begin{cases} x=3 \\ y=-5 \end{cases} \quad \text{正确。}$$

注意：如果常数項 c_1, c_2 在方程式左邊。解 x, y 時必須在分子行列式的前加“-”號，或者把它搬到方程式的右邊去再解。同時要注意含有 x 的項必須放在第一項，含有 y 的項放在第二項。

例2.
$$\begin{cases} y+3x-2=0 & (1) \\ 4x-5y-8=0 & (2) \end{cases}$$

整理：
$$\begin{cases} 3x+y=2 & a_1=3, \quad b_1=1, \quad c_1=2 \\ 4x-5y=8 & a_2=4, \quad b_2=-5, \quad c_2=8 \end{cases}$$

解 x
$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{-10-8}{-15-4} = \frac{18}{19}。$$

解 y
$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{24-8}{-19} = -\frac{16}{19}。$$

倘若常數項不搬到方程式的右邊去，例如

$$\begin{cases} 3x+y-2=0 & a_1=3, \quad b_1=1, \quad c_1=-2, \\ 4x-5y-8=0 & a_2=4, \quad b_2=-5, \quad c_2=-8, \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -8 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{-(10+8)}{-19} = \frac{-18}{-19} = \frac{18}{19}；$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{-(-24+8)}{-19} = -\frac{16}{19}。$$

討論：方程組 $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad (1)$

解 $x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$

現在分三種情形來討論：

i) 當 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ 時，方程(1)有唯一的解，如例1、例2。

ii) 當 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ 時，而 $\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$ 或 $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$ 中有一個不等於0，則無解。

例3. $\begin{cases} 3x - 2y = 5 & a_1 = 3, b_1 = -2, c_1 = 5, \\ 6x - 4y = 7 & a_2 = 6, b_2 = -4, c_2 = 7, \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = 0, \text{ 而 } \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 7 & -7 \end{vmatrix} \neq 0.$$

解： $x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 7 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{-20 + 14}{0} = \frac{-6}{0} \text{ (無意義)}$
 $y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{21 - 30}{0} = \frac{-9}{0} \text{ (無意義)}$ } 無解。

注意：“0”不能除任何數，倘若以“0”來做除數，我們不能確定它的數值。

iii) 當 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$ 時，就是
 $a_1b_2 - a_2b_1 = 0, c_1b_2 - c_2b_1 = 0, a_1c_2 - a_2c_1 = 0$

即 $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}, \frac{c_1}{c_2} = \frac{a_1}{a_2}$, 即 $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

上面最後式子的意義，就是兩個方程的各項係數（連常數項在內）都

成比例,所以这时方程組(1)变成一个方程了。

因为倘若 $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = r \neq 0$ (假定), 則 $a_1 = ra_2, b_1 = rb_2,$

$c_1 = rc_2$, 代入 (1)

得 $ra_2 + rb_2y = rc_2$. $\because r \neq 0$, 所以可以把 r 除去, 得 $a_2x + b_2y = c_2$ 。

所以第一个方程可以化为第二个方程, 就是說 (iii) 的条件成立时, 方程組(1)的两个方程可以化为一个方程, 根据初等代数知識, 我們知道, 含有两个变数的一个方程, 它的解有无穷多組。

例4.
$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 & a_1 = 2, & b_1 = -3, & c_1 = 1 \\ 4x - 6y = 2 & a_2 = 4, & b_2 = -6, & c_2 = 2 \end{cases}$$

$$\therefore \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

$\therefore$ 把第二个方程各项系数除 2, 便得第一个方程, 所以这組方程可以用 $2x - 3y = 1$ 表示, 因此有无穷多組解。

§1.2 三阶行列式及它的主要性質

用二阶行列式来解二元綫性方程組的方程, 可以推广到用三阶行列式来解三元綫性方程組, 現在先引进三阶行列式的概念。

$a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$, 九个元素所做成的三阶行列式

用記号 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ 表示。

它的定义就是:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1$$

关于三阶行列式的一些名称, 与二阶行列式完全相同。三阶行列式有三行三列: $a_1b_2c_3$ 組成行列式的主对角綫; $c_1b_2a_3$ 組成付对角綫。

据上面的定义, 我們得三阶行列式的計算法則:

1) 首先把行列式的三列元素写出。再添上第一列及第二列的元素, 成下面的表。