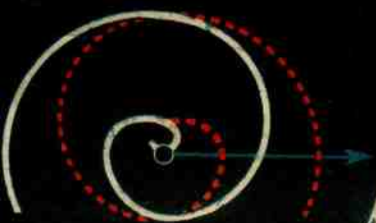
大学自学丛书



解析几何

陸慧英編著

科技卫生出版社

解 析 几 何

陆 慧 英 编 著

·

科 技 卫 生 出 版 社 出 版

（上海南京西路 2004 号）

上海市书刊出版业营业许可证出 093 号

上海市印刷五厂印刷　新华书店上海发行所总经售

·

开本 787×1092 纸 1/32　印张 6　字数 130,000

1958 年 12 月第 1 版　1958 年 12 月第 1 次印刷

印数 1—20,000

統一書号：13119·219

定价：（九）0.54 元

序　言

解析几何学沒有固定的內容，它不是研究的对象而是一种方法，就是用代数法来研究几何图形的性质，就是把图形的几何关系用代数方程(或方程組)来表示。

例如在笛卡尔的直角坐标系的条件下，平面上每一条直綫对应着一个一次方程：

$$Ax+By+C=0$$

三直綫交于一点，表示为已知直綫的三方程組有唯一解的条件。

解析几何学不但是研究几何学的基本方法，及学习微积分的重要条件，并且广泛地被应用于其他自然科学与技术科学的領域里，它不但是学习数学、物理的必要工具，也是工程师的好助手。

解析几何学的原始思想出于笛卡尔 (Descartes)。1637 年，他在写“几何”論文里敍述了这方法的原理。

本書是为在职干部自学而編写的，学习的目的又是为学习数学分析、物理及技术科学作准备的，所以本書內容并不象一般的解析几何学教程那样全面，例如一般二次曲綫的研究等都刪去而不講，代之以有关生产及实用的材料。又因为是自学的不是講授的書本，所以在科学严密性基礎上也照顧到讀者容易接受，象矢量积的分配律的証明便略去了。

本書分为十一講，預計学习 144 小时，如果加上总复习16小时，剛好160小时学好。每周学习 8 小时，20周(就是一个学期)学完。

每一講后附有复习思考題及檢查作业。总复习后，有总檢查作业。書后附有思考題的解答和作业的提示及正确答案。通过这些練习，讀者可以了解自己的学习情况，以便隨时更正学习方法及学习态度。

一般学习方法指导

学习理論，必須进行艰苦的思想劳动，因为只有通过自己的独立思考，才能学好理論。学习解析几何学也必須通过自己的思考，来摸清这些理論的来龙去脈，这样才能深入領会这些原理的含义。

学习理論，不仅要开动脑筋，理解那些已有的定理和公式，更重要的是要研究这些定理和公式的建立的邏輯思維。

学习理論，必須循序漸进，逐步钻研，隨时实踐——做練习。

在每一講开始时，讀者必須先看本講的学习指示，这是指出本講的中心問題及学习本講的方法。倘若能按照这些指示来进行学习，比較容易掌握內容。本書学习完后，必須总复习两星期，使知識系統化。

I 閱 讀

1. 应当仔細閱讀教材內容，必須对前面的內容正确地了解后，才能継續前进，不可以东挑一点看看，西挑一点讀讀。學完一小节后，应当放下書本，思考本节所解决的中心問題，并考虑除了本节所講的方法外，有沒有别的方法可以解决这問題？学完一講，必須把各小节內容合併考虑，并且注意各小节的啣接性和順序性。

2. 应当特别注意一些下面划有綫条的基本概念。这些基本概念对学习解析几何学来講，就象造房子用的墻基。如果基本概念不搞清，理論既學不好，作业也无法下手。对例題，要仔細钻研，应当自已設法举出类似的例題。

3. 对于类似的理論、概念、公式多作比較。这样，学习才能深入，理論才会徹底，記忆才能巩固。

4. 学完一講必須作笔記，这样做对学习下一章是有很大帮助的。

II 笔 記

1. 練习記笔記，做摘要，对培养独立工作能力有很大的意义。建議在学完一講后，經过自已的思索，写下定义，定理的敍述、定理的証明、及公式的导来；最好用自已的体会写出这一講的总結。

在笔記本的边上留着空白，以便标出疑問，供复习时思考。

2.笔記要記得清楚、整洁、并有条理。这不仅使自己习惯于有秩序的工作，并且还可以避免很多錯誤。

3.建議作笔記时，在自己認为重要的結論下，划綫条，或画小点，以便复习时一望而知。

Ⅲ 作 业

1.解題前，应当对指定的學习內容及例題能彻底的理解，然后訂解題的簡单計划，最后动手解題。

2.解題必須做在練习本上，推理必需有根据，这些根据要确实知道它是正确的；不应該应用理論根据不清楚或結果不知道的公式。

3.計算要詳細，要有耐心，不应粗枝大叶，潦草完事。每个題目应当做到要求的最終答案。

4.选擇比較容易的題先解，假如碰到困难，必須反复钻研教材及例題。

5.在解題过程中，不要引入 π 及 $\sqrt{2}$ 等的近似值，以免繁复的数字运算。

6.解答不要早看，一定要在做完后才用来核对。不过有些比較复杂的习題，可以看了書后的提示再做。碰到自己的解答与标准答案不符合时，首先要找出自己的錯誤来源，然后改正。

7."熟能生巧"，不要怕多做題，題做得愈多，解題的技巧愈熟練，而且理論也容易消化和巩固，公式也自然地記住了。

目　录

第一部分　平面解析几何学

第二部分 空間解析几何学

第一部分　平面解析几何学

第一講　行列式理論初步

行列式在解析几何學里用途很大，象求三角形的面积，三点共綫以及三綫共点等問題，用了行列式就非常方便。現在只講它应用于解析几何方面的初步理論，即从綫性方程組的求解，引进二阶行列式的一些基本性质，推广再得三阶行列式的一些基本性质及应用。

学习指示：(i)弄清楚行列式的定义和特性，

(ii)掌握二阶及三阶行列式的运算方法，

(iii)反复思考三元性齐次方程組有非0解的意义和条件，这条件对解析几何用处很大。

§1.1　二阶行列式

在初等代数里已講过关于一次方程組的問題，現在我們要講比初等代数中所講过更加方便的方法。

設有二元綫性方程組：

$$\left.\begin{array}{ll} a_1x+b_1y=c_1 & \text{(i)} \\ a_2x+b_2y=c_2 & \text{(ii)} \end{array}\right\} \qquad (1)$$

初等代数里用消去法求解，就是以 b_2 乘(i)式，b_1 乘(ii)式然后相减，得

$$(a_1b_2-a_2b_1)x=c_1b_2-c_2b_1 \qquad \text{(iii)}$$

同样以 a_1 乘(ii)式，以 a_2 乘(i)式，相减得

$$(a_1b_2-a_2b_1)y=c_2a_1-c_1a_2 \qquad \text{(iv)}$$

如果 $a_1b_2-a_2b_1\neq0$，我們就把 $(a_1b_2-a_2b_1)$ 来除(iii)及(iv)，得

$$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1},\quad y=\frac{c_2a_1-c_1a_2}{a_1b_2-a_2b_1} \qquad (2)$$

(2)的分子和分母是形式相同的代数式：两个因数的乘积减去另二

个因数的乘积，这种形式的代数式，例如 $a_1b_2-a_2b_1$，叫做二阶行列式，記作：

$$a_1b_2-a_2b_1=\begin{vmatrix} (\text{左上角}) & (\text{右上角}) \\ a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ (\text{左下角}) & (\text{右上角}) \end{vmatrix}$$

行列式的計算方法就是左上角的数乘以右下角的数的乘积，減去左下角的数乘以右上角的数的乘积。

例如：$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}=3\times 8-1\times 5=24-5=19$，$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$.

注意下列的名称：

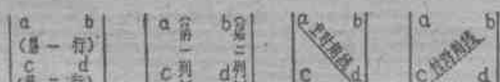
（1）行列式的元素：組成二阶行列式的数或文字叫做行列式的元素。例如 a, b, c, d 就叫做行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 的元素，3,5,1,8 叫做行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}$ 的元素，二阶行列式共有四个元素。

（2）行列式的項：計算行列式时所得的乘积，叫做行列式的項。例如 ad 和 bc 就是行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 的項，二阶行列式共有二項。

（3）行：横排叫做行。例如 a 和 b 組成行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 的第一行，c 和 d 組成行列式的第二行，二阶行列式共有二行。

（4）列：縱排叫做列。例如 a 和 c 組成行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 的第一列，b 和 d 組成行列式的第二列，二阶行列式共有二列。

（5）对角綫：在行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 中，有两对角綫 a 和 d 組成行列式的主对角綫，c 和 b 組成行列式的付对角綫。



利用这些术語，可得下列結論：

二阶行列式等于它主对角綫上两元素的乘积，减去它付对角綫上两元素的乘积。

根据上面的方法，可以寻出二阶行列式的几个基本性质：

i) 行列式里，行与列对調，它的数值不变。

例如：$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}$ 即 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$

ii) 行列式里，两行（或二列）对調，它的符号要改变。

例如：$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$（第一行与第二行对調），

$\because \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 3\times8-5\times1=19, \quad \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1\times5-3\times8=-19$

即 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$ 或 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$

iii) 行列式里，倘若一行（或一列）的元素全为 0 时，它的数值显然为 0。

例如：$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 0\times8-0\times1=0$，或 $\begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{vmatrix} = 0$

iv) 行列式里，倘若二行（或二列）相同，它的数值为 0。

例如：$\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3-3=0$，或 $\begin{vmatrix} a & a \\ c & c \end{vmatrix} = 0$，及 $\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = 0$.

v) 行列式里，倘若那一行（或那一列）的元素有公因子时，这个公因子可以提到行列式的外面。

例如：$\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\cdot3 & 5 \\ 2\cdot1 & 8 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}$,

$\because \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 6\times8-2\times5=38$

$2\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 2(24-5)=38$

或：$\begin{vmatrix} ma & b \\ mc & d \end{vmatrix} = m\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} ma & mb \\ c & d \end{vmatrix} = m\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

vi) 行列式里，倘若二行(或二列)的元素都成比例，它的数值为 0，由性质 iv) 及 v) 便可知道。

采用了行列式的記号后，方程組(1)的解可写成

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}},\qquad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

观察上式 x 和 y 的值，都是由分式表示。两分式的分母是相同的，分子是不同的。在表示 x 的分式中，只要把分母的第一列(即 x 的系数)a_1，a_2，換为常数項 c_1，c_2，就得它的分子。同樣，在表示 y 的分式中，只要把分母的第二列(即 y 的系数) b_1，b_2，換为 c_1，c_2，就得到它的分子。

例1. $\begin{cases} 5x+2y=5 & (1) \\ x-3y=18 & (2) \end{cases}$ $\quad a_1=5,\ b_1=2,\ c_1=5,$ $\quad a_2=1,\ b_2=-3,\ c_2=18.$

解 x：分母：$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-15-2=-17$，分子：以 5，18 代 5，1；

得 $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 18 & -3 \end{vmatrix}=-15-36=-51$，$\therefore\ x=\dfrac{-51}{-17}=3$。

解 y：分母：$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-17$，分子：以 5，18 代 2，$-3$，

得 $\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 1 & 18 \end{vmatrix}=5\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 18 \end{vmatrix}=5(18-1)=85$，

$$\therefore\ y=\frac{85}{-17}=-5。$$

$$\therefore\ \begin{cases} x=3 \\ y=-5 \end{cases}\qquad (3)$$

驗算：以(3)代入(1)得 $5\times3+2(-5)=15-10=5$。

$$\therefore\ \begin{cases} x=3 \\ y=-5 \end{cases}\qquad \text{正确。}$$

注意：如果常数项 c_1，c_2 在方程式左边。解 x，y 时必须在分子行列式的前加“—”号，或者把它搬到方程式的右边去再解。同时要注意含有 x 的项必须放在第一项，含有 y 的项放在第二项。

例2. $\begin{cases} y+3x-2=0 & (1) \\ 4x-5y-8=0 & (2) \end{cases}$

整理：$\begin{cases} 3x+y=2 & a_1=3, & b_1=1, & c_1=2 \\ 4x-5y=8 & a_2=4, & b_2=-5, & c_2=8 \end{cases}$

解 x $$x=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}}=\frac{-10-8}{-15-4}=\frac{18}{19}。$$

解 y $$y=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}}=\frac{24-8}{-19}=-\frac{16}{19}。$$

倘若常数项不搬到方程式的右边去，例如

$\begin{cases} 3x+y-2=0 & a_1=3, & b_1=1, & c_1=-2, \\ 4x-5y-8=0 & a_2=4, & b_2=-5, & c_2=-8, \end{cases}$

$$x=\frac{-\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -8 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}}=\frac{-(10+8)}{-19}=\frac{-18}{-19}=\frac{18}{19};$$

$$y=\frac{-\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}}=\frac{-(-24+8)}{-19}=-\frac{16}{19}。$$

討論：方程組 $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ （1）

解 $x=\dfrac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$ $y=\dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$

現在分三种情形来討論：

i) 当 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$ 时，方程（1）有唯一的解，如例1．例2.

ii) 当 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$ 时，而 $\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$ 或 $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$ 中有一个不等于0，則无解。

例3. $\begin{cases} 3x-2y=5 & a_1=3,\ b_1=-2,\ c_1=5, \\ 6x-4y=7, & a_2=6,\ b_2=-4,\ c_2=7, \end{cases}$

$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{vmatrix}=0$， 而 $\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 7 & -7 \end{vmatrix}\neq 0$。

解：

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 7 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{vmatrix}}=\frac{-20+14}{0}=\frac{-6}{0}\ \text{（无意义）} \\ y&=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{vmatrix}}=\frac{21-30}{0}=\frac{-9}{0}\ \text{（无意义）} \end{aligned}\right\}\longrightarrow \text{无解。}$$

注意："0"不能除任何数，倘若以"0"来做除数，我們不能确定它的数值。

iii) 当 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$， $\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$， $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}=0$ 时，就是

$$a_1b_2-a_2b_1=0,\ c_1b_2-c_2b_1=0,\ a_1c_2-a_2c_1=0$$

即 $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}$， $\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$， $\dfrac{c_1}{c_2}=\dfrac{a_1}{a_2}$， 即 $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$

上面最后式子的意义，就是两个方程的各項系数（連常数項在內）都

成比例，所以这时方程組(1)变成一个方程了。

因为倘若 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}=r\neq 0$ (假定)， 則 $a_1=ra_2$， $b_1=rb_2$，$c_1=rc_2$，代入(1)

得 $ra_2+rb_2y=rc_2$。$\because r\neq 0$，所以可以把 r 除去，得 $a_2x+b_2y=c_2$。

所以第一个方程可以化为第二个方程，就是說 iii)的条件成立时，方程組(1)的两个方程可以化为一个方程，根据初等代數知識，我們知道，含有两个变數的一个方程，它的解有无穷多組。

例4. $\begin{cases}2x-3y=1 & a_1=2, \quad b_1=-3, \quad c_1=1\\ 4x-6y=2 & a_2=4, \quad b_2=-6, \quad c_2=2\end{cases}$

$\because \quad \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$

$\therefore$ 把第二个方程各項系數除2，便得第一个方程，所以这組方程可以用 $2x-3y=1$ 表示，因此有无穷多組解。

§1.2 三阶行列式及它的主要性質

用二阶行列式来解二元綫性方程組的方程，可以推广到用三阶行列式来解三元綫性方程組，現在先引进三阶行列式的概念。

$a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$，九个元素所做成的三阶行列式用記号 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$ 表示。

它的定义就是：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1$$

关于三阶行列式的一些名称，与二阶行列式完全相同。三阶行列式有三行三列；$a_1b_2c_3$ 組成行列式的主对角綫；$c_1b_2a_3$ 組成付对角綫。

据上面的定义，我們得三阶行列式的計算法则：

i) 首先把行列式的三列元素写出。再添上第一列及第二列的元素，成下面的表。