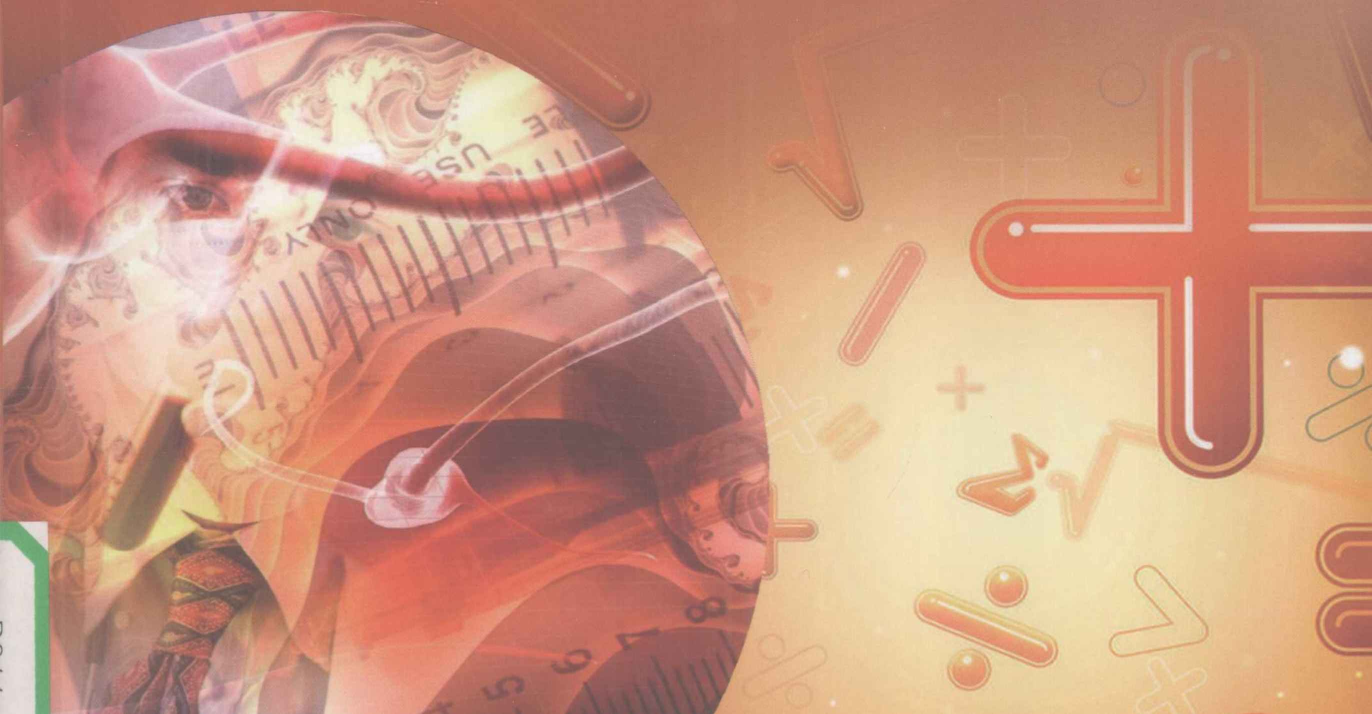
中国科学院教材建设专家委员会规划教材

全国高等医药院校规划教材

# 医学高等数学

第2版

张世强 主编



科学出版社

www.sciencep.com

# 医学高等数学

中国科学院教材建设专家委员会规划教材
全国高等医药院校规划教材

# 医学高等数学

第2版

科学出版社
北京

## 内 容 简 介

本书是在第1版的基础上,按照教育部非数学类专业数学基础课程教学指导分委员会制定的“医科类本科数学基础课程教学基本要求”(讨论稿),并根据第1版在使用过程中的反馈意见修订而成的。

本书详细阐述了函数与极限、导数与微分、中值定理和导数的应用、不定积分、定积分、多元函数微积分、微分方程、无穷级数、概率论初步和线性代数基础等方面的内容,并在每章后附习题解答与提示。

本书起点低、跨度大;主干清晰、层次分明、说理清楚、通俗易懂、便于应用。适合作为医学院校各专业本科及专科学生教材,也可作为医学院校研究生教材及医药学工作者的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

医学高等数学 / 张世强主编.—2版.—北京:科学出版社,2009
(中国科学院教材建设专家委员会规划教材)
ISBN 978-7-03-025276-0

Ⅰ.医… Ⅱ.张… Ⅲ.医用数学-教材 Ⅳ.R311

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第144021号

策划编辑:李国红 / 责任编辑:邹梦娜　李国红 / 责任校对:陈玉凤
责任印制:刘士平 / 封面设计:黄　超



科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
骏杰印刷厂 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2001年8月第　一　版　　开本:787×1092　1/16
2009年8月第　二　版　　印张:18
2009年8月第九次印刷　　字数:418 000
印数:22 001—27 000

定价:35.00元
(如有印装质量问题,我社负责调换)

# 第2版前言

本教材第2版是在第1版的基础上，按照教育部非数学类专业数学基础课程教学指导分委员会制定的“医科类本科数学基础课程教学基本要求”（讨论稿），并根据九年来的教学改革实践，全面修订而成。在修订过程中，保留了原教材起点低、跨度大的体系与风格，继承并发扬了原教材概念准确、脉络清晰、简明实用和方便教学等特点，同时亦吸收了一些优秀教材的改革成果，使得新版教材更适应医科院校教学改革的需要。

新版教材增补了部分内容，如微分中值定理的证明，拉格朗日中值定理的推论，积分上限函数，二阶线性微分方程解的结构，$n$ 维向量等。新版教材也按照“医科类本科数学基础课程教学基本要求”（讨论稿）精简了部分内容，同时对初版教材中存在的个别问题进行了修订。

在本次的教材修订过程中，参考了一些优秀教材，使用过教材的医科院校的教师提出了不少中肯的意见和有益的建议，在此表示诚挚的谢意。但愿新版教材仍然会让读者开卷有益。编者亦真诚且虚心地期待着读者的悉心指教。

编　者

2009年2月

# 第 1 版前言

从培养 21 世纪医学人才的角度看，进一步拓宽医学院校大学生的知识面，增强其创新能力是非常必要的。其中提高医学院校大学生的数学素质应引起重视。在美、英、法等发达国家，理工科大学二年级的优秀生才能进入医学院校；在国内，北京大学医学院从 1950 年开始即把高等数学定为医学院校学生的必修课。

为了提高医学院校大学生的数学素质，在多年教学经验的基础上，我们编写了这本“医学高等数学”教材。在教材结构上，我们大胆创新，对高等数学的内容进行了大量的精选、优化及浓缩工作。并结合我国国情，将编书的指导思想定为：起点低，跨度大。起点低是指注重内容的实用性，适当兼顾理论体系。对于医药学大学生来说，学习内容的实用性显得更加重要，因此，在选择题材和叙述重点上我们都把实用性放在首位。跨度大是指尽量覆盖医药学领域中常常涉及到的数学知识，让读者能在较少的时间内获得尽可能多的信息量。因此，我们将线性代数、微积分、微分方程、概率论、无穷级数融为一体，着眼于理解概念、掌握方法、学会运用，而且能举一反三。

教材编写的具体分工如下：

主　编　张世强

副主编　姚　莉，罗亚玲

编　委　陆洪娣，罗亚玲，姚　莉，张世强

其中第 1 章、第 2 章由罗亚玲执笔；第 4 章、第 7 章、第 9 章由陆洪娣执笔；第 5 章、第 6 章由姚莉执笔；第 3 章、第 8 章、第 10 章由张世强执笔。

在本书编写和出版过程中承蒙重庆医科大学教务处、教材科、基础医学院及科学出版社的鼎力支持，在此谨致谢意。

一本好教材理应经得起时间的考验、实践的考验和读者的考验。但愿这本教材会使读者开卷有益。本书的编者也期待得到读者的悉心指教。

编　者

2000 年 12 月

# 目　　录

# 第 1 章　函数、极限与连续

现代科学的发展已使各门学科的研究从定性分析发展到定量研究阶段. 当人们从量的角度来描述事物的变化及其规律时,就产生了函数概念. 函数关系即是变量间的依赖关系,它是微积分学的主要研究对象. 极限则是微积分学研究函数的重要方法,即研究变化着的量的方法. 有了它,人们才能够以高于初等数学的观点和技术来研究函数,从而引出了从常量数学到变量数学的飞跃. 而实际问题中出现的函数大多是具有连续性的连续函数.

本章介绍极限的概念及其运算规则,连续函数的概念及其性质.

## 1.1　函　　数

### 1.1.1　区间及邻域

本节首先扼要地介绍一下本书常用的一类数集——区间及其特例邻域.

设 $a$、$b$ 为实常数,且 $a<b$,则定义如下**区间**(*interval*)概念:

开区间:　　$(a,b)=\{x\,|\,a<x<b,x\in\boldsymbol{R}\}$;

闭区间:　　$[a,b]=\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b,x\in\boldsymbol{R}\}$;

半开半闭区间:　$[a,b)=\{x\,|\,a\leqslant x<b,x\in\boldsymbol{R}\}$;　$(a,b]=\{x\,|\,a<x\leqslant b,x\in\boldsymbol{R}\}$.

以上区间统称为**有限区间**,以下一类区间统称为**无穷区间**:

$(a,+\infty)=\{x\,|\,x>a,x\in\boldsymbol{R}\}$;　$(-\infty,a]=\{x\,|\,x\leqslant a,x\in\boldsymbol{R}\}$;　$(-\infty,+\infty)=\boldsymbol{R}$ 等.

邻域是区间的特例. 设 $a$ 为数轴上的某定点,实数 $\delta>0$,则:

**点 $a$ 的 $\delta$ 邻域**(neighborhood)指的是数集

$$\{x\,|\,|x-a|<\delta,x\in\boldsymbol{R}\},$$

记为 $\mathrm{U}(a,\delta)$,简记为 $\mathrm{U}(a)$. 可见,点 $a$ 的 $\delta$ 邻域就是区间 $(a-\delta,a+\delta)$,几何上讲是以点 $a$ 为中心、以 $\delta$ 为半径的开区间;

**点 $a$ 的空心 $\delta$ 邻域**指的是数集

$$\{x\,|\,0<|x-a|<\delta,x\in\boldsymbol{R}\},$$

记为 $\mathrm{U}^{\circ}(a,\delta)$,简记为 $\mathrm{U}^{\circ}(a)$. 它与 $\mathrm{U}(a,\delta)$ 的区别仅在于 $\mathrm{U}^{\circ}(a,\delta)$ 是区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 中去掉中心点 $a$ 后所剩下的部分.

**点 $a$ 的右 $\delta$ 邻域**指的是数集

$$\mathrm{U}^{+}(a,\delta)=\{x\,|\,0<x-a<\delta,x\in\boldsymbol{R}\};$$

类似地,读者不难自行定义**点 $a$ 的左 $\delta$ 邻域** $\mathrm{U}^{-}(a,\delta)$.

### 1.1.2　函数的定义

**定义 1.1(函数)**　设某一变化过程中存在两个变量 $x$、$y$,若对于变量 $x$ 在其变化范围 $D$ 内的每一个值,按照某个对应法则 $f$,变量 $y$ 都有唯一确定的值与之对应,则称在法则 $f$

下，变量 $y$ 是确定在 $D$ 上的**函数**(function). 记为：

$$y=f(x),x\in D$$

其中，称变量 $x$ 为函数的**自变量**，变量 $y$ 为函数的**因变量**或**函数变量**. 称 $D$ 为函数的**定义域**. 当 $x$ 任取 $D$ 中某个值时，与之对应的 $y$ 值称为**函数值**. 当 $x$ 遍取 $D$ 中各值时，相应的 $y$ 值构成的集合 $\{y|y=f(x),x\in D\}$ 称为函数的**值域**，记为 $f(D)$.

决定一个函数的因素是其对应法则 $f$ 及函数的定义域 $D$. 一般地，函数的定义域由数学上函数有无意义来确定. 当函数关系由实际问题给出时，定义域应由实际问题本身来确定.

**例 1.1** 求函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}$ 的定义域.

**解** 欲使函数有定义，必有 $x^2-4>0$，即 $x<-2$ 或 $x>2$. 故该函数的定义域为 $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$.

**例 1.2** 有人研究 20～90 岁之间，年龄对肾功能的影响，得出如下经验公式：

$$y=153.2-0.96x$$

其中 $x$ 表示年龄(岁)，$y$ 表示菊粉清除率[ml/(1.73m · min)]. 则该函数的定义域是[20,90].

### 1.1.3 函数的表示法

常用的表示函数的方法有 3 种：

**1. 解析法**

**解析法**即用数学式子表示函数的方法，又称**公式法**. 解析法是函数表示法中最重要的一种. 其优点在于形式简明，便于用数学分析的方法从理论上研究函数特性，并且可由此得出函数表、函数图形. 但遗憾的是对很多实际问题，要想得到变量间的函数关系并非易事.

有些函数在其定义域的不同范围内需要用不同的数学式子表示，称这种函数为**分段函数**.

**例 1.3** 静脉注射 $G$ 钠盐 100 000 单位后，血清中的药物浓度 $C$ 为时间 $t$ 的函数 $C(t)$：

$$C(t)=\begin{cases}14.38t, & 0\leqslant t<0.25\\ 4.66-4.26t, & 0.25\leqslant t<1\\ 0.6-0.2t, & 1\leqslant t\leqslant 3\end{cases}$$

其中，时间 $t$ 的单位为 h，$C(t)$ 的单位为：单位/ml.

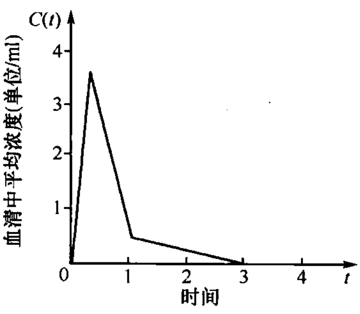



图 1.1

例 1.3 中，$C(t)$ 即为一典型的分段函数，它的定义域为[0,3].

分段函数在求函数值时，应将不同范围的自变量代入相应范围的数学表达式计算；作图时，应在不同分段上根据相应数学表达式作出相应的图形. 例 1.3 中，可分别计算 $t=0.5$h 及 $t=2$h 时的血药浓度为：$C(0.5)=4.66-4.26\times0.5=2.53$ 单位/ml，$C(2)=0.6-0.2\times2=0.2$ 单位/ml.

$C=C(t)$ 的图像如图 1.1 所示.

**2. 列表法**

**列表法**是指用表格列出一系列自变量值及其所对应的函数值，以直接显示函数的对应关系的方法. 其特点是简明直接，但难以直接反映出变量间的内在规律. 医学等实验科学中

常用此法.

**例 1.4**　葡萄糖耐糖试验. 对正常人、轻度糖尿病人及重度糖尿病人，都按 1.75g/kg 体重的量口服葡萄糖. 服糖前($t=0$ 时刻)及服糖后 0.5,1,2,3 小时各测一次血糖，有下面数据(表 1.1)：

**表 1.1**

| | 口服葡萄糖后时刻 $t$(h) | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 0.5 | 1 | 2 | 3 |
| 正常人血糖水平 $y_1$(mg%) | 95 | 135 | 150 | 100 | 88 |
| 轻度糖尿病人血糖水平 $y_2$(mg%) | 115 | 150 | 175 | 165 | 120 |
| 重度糖尿病人血糖水平 $y_3$(mg%) | 200 | 230 | 250 | 255 | 260 |

**3. 图像法**

**图像法**是把变量之间的函数关系借助图形表示出来的方法，可形象地表示出函数变化的性状.

由图 1.1 可分析出，静脉注射使血液中的药物浓度迅速升高(呈直线增加)，在 0.25h 左右，血清中的药物浓度达到高峰，但很快消失，3h 后就很难测到了.

图像法在医学上亦经常使用，例如心电图、脑电图等.

### 1.1.4　函数的几种特性

**1. 奇偶性**

设函数 $y=f(x)$的定义域为 $D$,$D$ 是对称于原点的数集. 如果对任何 $x\in D$,有 $f(-x)=-f(x)$,则称函数 $f(x)$为**奇函数**；如果对任何 $x\in D$,有 $f(-x)=f(x)$,则称函数 $f(x)$为**偶函数**.

几何上，奇函数的图形关于原点对称，偶函数的图形关于 $y$ 轴对称.

例如，函数 $y=x$ 是奇函数，函数 $y=x^2$ 是偶函数. 但函数 $y=x+x^2$ 既不是奇函数，也不是偶函数.

**2. 单调性**

设函数 $y=f(x)$的定义域为 $D$,区间 $I\subset D$. 如果对区间 $I$ 中任意两个数 $x_1,x_2$,当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在区间 $I$ 上是**单调递增**的；如果对区间 $I$ 中任意两个数 $x_1,x_2$,当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在区间 $I$ 上是**单调递减**的. 单调递增和单调递减的函数统称为**单调函数**. 如果函数 $f(x)$在区间 $I$ 内是单调的，则称区间 $I$ 为函数 $f(x)$的**单调区间**.

例如函数 $y=x^2$ 在区间$[0,+\infty)$上是单调递增的，在区间$(-\infty,0]$上是单调递减的；在区间$(-\infty,+\infty)$内不是单调的.

**3. 周期性**

设函数 $y=f(x)$的定义域为 $D$. 如果存在某个正数 $T$,使得对任何 $x\in D$,都有 $x\pm T\in D$,并且 $f(x\pm T)=f(x)$总成立，则称函数 $f(x)$为**周期函数**，并称 $T$ 为 $f(x)$的**周期**.

显然，若 $T$ 为函数 $f(x)$的周期，则 $2T$、$3T$、…也都为 $f(x)$的周期，故周期函数一定有无限多个周期. 若在周期函数 $f(x)$的所有周期中有一个最小正周期 $T$,则称 $T$ 为 $f(x)$的**基本周期**. 一般说到周期函数的周期时，指的都是基本周期.

例如，函数 $y=\sin x$ 为周期函数，其周期为 $2k\pi, k\in \mathbf{Z}^{+}$，基本周期为 $2\pi$.

**4. 有界性**

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $D$，数集 $I\subset D$. 如果存在某正数 $K_1$，使得对任意 $x\in I$，都有 $f(x)\leqslant K_1[f(x)\geqslant K_2]$，则称函数 $f(x)$ 在 $I$ 上**有上界(下界)**，并称 $K_1(K_2)$ 为函数 $f(x)$ 的一个**上界(下界)**. 如果 $K_1$ 是 $f(x)$ 在 $I$ 上的一个上界，则任何大于 $K_1$ 的数都是 $f(x)$ 在 $I$ 上的上界；如果 $K_2$ 是 $f(x)$ 在 $I$ 上的一个下界，则任何小于 $K_2$ 的数都是 $f(x)$ 在 $I$ 上的下界.

如果函数 $y=f(x)$ 在 $I$ 上既有上界，又有下界，则称函数 $f(x)$ 在 $I$ 上**有界**，并称函数 $f(x)$ 为集合 $I$ 上的**有界函数**. 不难看到，如果 $f(x)$ 在集合 $I$ 上有界，则必然存在某正数 $K$，使得对任何 $x\in I$，都有

$$|f(x)|\leqslant K.$$

几何上，有界函数的图像必落在直线 $y=K$ 与 $y=-K$ 之间的带形区域内.

例如，三角函数 $y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 在整个数轴上是有界的，因为对一切 $x\in(-\infty, +\infty)$，有 $|\sin x|\leqslant 1$ 和 $|\cos x|\leqslant 1$. 它们的图像均落在 $y=1$ 与 $y=-1$ 之间的带形区域内.

函数 $y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界；函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内仅有下界，没有上界，$y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界.

不难证明，**函数 $f(x)$ 在 $I$ 上有界的充分必要条件是它在 $I$ 上既有上界又有下界.**

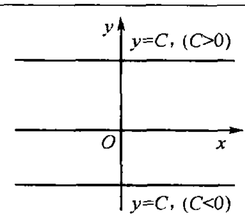
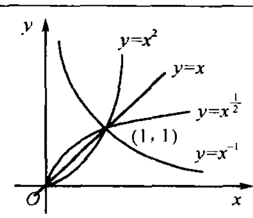
# 1.2 初等函数

实际问题中常见的函数基本上是初等函数. 初等函数是以基本初等函数为基础按一定方式构成的. 本节介绍基本初等函数及它们构成初等函数的方式，最后给出初等函数的定义.

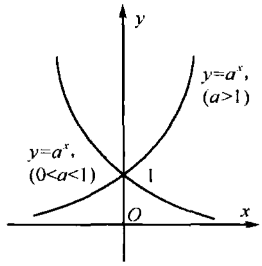
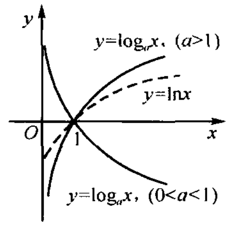
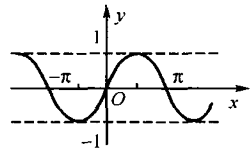
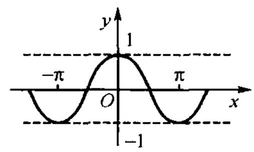
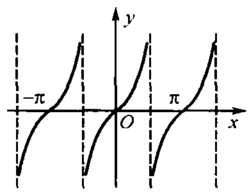
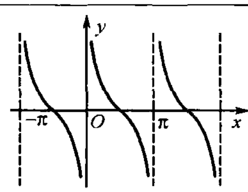
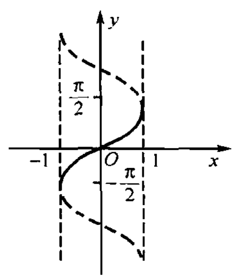
## 1.2.1 基本初等函数

常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数这六类函数统称为**基本初等函数**(basic elementary function). 它们的表达式、定义域、值域、特性及图形详见表 1.2.

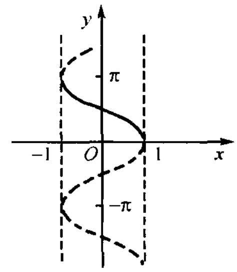
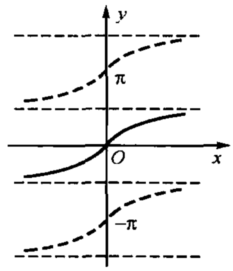
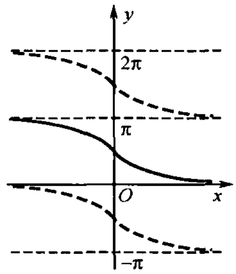
**表 1.2 基本初等函数**

| 函数名称 | 表达式 | 定义域和值域 | 特性 | 图形 |
|---|---|---|---|---|
| 常量函数 | $y=C$ | 定义域：<br>$(-\infty,+\infty)$<br>值域：<br>$\{y\mid y=C\}$ | 偶函数；<br>不存在基本周期的周期函数. |  |
| 幂函数 | $y=x^{\alpha}$<br>($\alpha$ 为非零实数) | 定义域和值域视 $\alpha$ 的取值而定. | 奇偶性视 $\alpha$ 的取值而定.<br>图像均过(1,1)点. |  |

续表

| 函数名称 | | 表达式 | 定义域和值域 | 特性 | 图形 |
|---|---|---|---|---|---|
| 指数函数 | | $y=a^x$ $(a>0,a\neq 1)$ | 定义域：$(-\infty,+\infty)$<br>值域：$(0,+\infty)$. | $a>1$ 时，图像单调递增；<br>$0<a<1$ 时，图像单调递减.<br>图像过$(0,1)$点. |  |
| 对数函数 | | $y=\log_a x$ $(a>0,a\neq 1)$ | 定义域：$(0,+\infty)$<br>值域：$(-\infty,+\infty)$. | $a>1$ 时，图像单调递增；<br>$0<a<1$ 时，图像单调递减.<br>图像过$(1,0)$点. |  |
| 三角函数 | 正弦函数 | $y=\sin x$ | 定义域：$(-\infty,+\infty)$<br>值域：$[-1,1]$ | 奇函数；<br>有界函数；<br>周期函数（基本周期为 $2\pi$）. |  |
| | 余弦函数 | $y=\cos x$ | 定义域：$(-\infty,+\infty)$<br>值域：$[-1,1]$ | 偶函数；<br>有界函数；<br>周期函数（基本周期为 $2\pi$）. |  |
| | 正切函数 | $y=\tan x$ | 定义域：$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z$<br>值域：$(-\infty,+\infty)$ | 奇函数；<br>周期函数（基本周期为 $\pi$）. |  |
| | 余切函数 | $y=\cot x$ | 定义域：$x\neq k\pi,k\in Z$<br>值域：$(-\infty,+\infty)$ | 奇函数；<br>周期函数（基本周期为 $\pi$）. |  |
| 反三角函数 | 反正弦函数 | $y=\arcsin x$ | 定义域：$[-1,1]$<br>主值域：$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ | 主值范围 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 内单调递增. |  |

续表

| 函数名称 | | 表达式 | 定义域和值域 | 特性 | 图形 |
|---|---|---|---|---|---|
| 反三角函数 | 反余弦函数 | $y=\arccos x$ | 定义域：<br>$[-1,1]$<br>主值域：<br>$[0,\pi]$ | 主值范围$[0,\pi]$内单调递减. |  |
| | 反正切函数 | $y=\arctan x$ | 定义域：<br>$(-\infty,+\infty)$<br>主值域：<br>$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ | 主值范围$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内单调递增. |  |
| | 反余切函数 | $y=\text{arccot}\, x$ | 定义域：<br>$(-\infty,+\infty)$<br>主值域：<br>$(0,\pi)$ | 主值范围$(0,\pi)$内单调递减. |  |

## 1.2.2 复合函数

常见函数是由基本初等函数按一定方式构成的，其中最基本的构成方式之一是函数的复合.

**定义 1.2(复合函数)** 设函数 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，$D^*$ 表示 $u=\varphi(x)$的定义域 $D$ 中使得 $u=\varphi(x)$有意义的全体 $x$ 的非空集合. 若对于函数 $u=\varphi(x)$，当 $x$ 在 $D^*$ 内取值时，所对应的 $u$ 值使得函数 $y=f(u)$有定义，从而得到一个以 $x$ 为自变量、$y$ 为因变量的函数，称之为由 $y=f(u)$与 $u=\varphi(x)$复合而成的**复合函数**(composite function)，记为

$$y=f[\varphi(x)],x\in D^*$$

称 $y=f(u)$为**外函数**，$u=\varphi(x)$为**内函数**，$u$ 为**中间变量**.

**例 1.5** 设 $y=\sqrt{u}$，$u=1-x^2$，求 $y$ 关于 $x$ 的复合函数.

**解** $y=\sqrt{u}$的定义域是$[0,+\infty)$；$u=1-x^2$的定义域是$(-\infty,+\infty)$. 其中，当且仅当 $x\in[-1,1]$时，$u=1-x^2\in[0,+\infty)$. 故 $y$ 关于 $x$ 的复合函数为：$y=\sqrt{1-x^2}$，$x\in[-1,1]$.

复合函数概念是为了微积分学中技术上的需要而提出的一个结构性概念. 分清复合函数的结构是今后复合函数求导、换元积分的重要基础，也是本门课程的基本功之一.

**例 1.6**　分析函数 $y=a^{x^2}(a>0,a\neq1)$ 的复合结构.

**解**　令中间变量 $u=x^2$，则函数 $y=a^{x^2}$ 由外函数 $y=a^u$ 和内函数 $u=x^2$ 复合而成.

函数的复合不仅限于两个函数，有时可以由两个以上的函数经过多次复合而构成一个复合函数. 请读者参照定义 1.2 自行描述由 3 个函数复合成一个函数的情形.

**例 1.7**　试分析下列函数的复合结构：

(1) $y=\sqrt[3]{\lg(2x+1)}$；　　(2) $y=\log_a \sin e^{x^2+1}$.

**解**　(1) 函数 $y=\sqrt[3]{\lg(2x+1)}$ 可分解为：$y=\sqrt[3]{u}$，$u=\lg v$，$v=2x+1$；

(2) 函数 $y=\log_a \sin e^{x^2+1}$ 分解为：$y=\log_a u$，$u=\sin v$，$v=e^t$，$t=x^2+1$.

**例 1.8**　设 $y=f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，问复合函数 (1) $f(\sin x)$，(2) $f(x+a)$，$(a>0)$ 的定义域各是什么？

**解**　(1) 要使函数 $f(\sin x)$ 有意义，必须 $\sin x\in[0,1]$，则 $x\in[2k\pi,(2k+1)\pi]$，$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$. 故 $f(\sin x)$ 的定义域是 $[2k\pi,(2k+1)\pi]$，$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

(2) 要使函数 $f(x+a)$ 有意义，必有 $x+a\in[0,1]$，$x\in[-a,1-a]$. 所以 $f(x+a)$ 的定义域是 $[-a,1-a]$.

**例 1.9**　设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 0, & |x|=1,\\ -1, & |x|>1.\end{cases}$　$g(x)=e^x$. 求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$.

**解**　当 $x<0$ 时，$0<e^x<1$，$f[g(x)]=f(e^x)=1$；当 $x=0$ 时，$e^x=1$，$f[g(x)]=f(e^x)=0$；当 $x>0$ 时，$e^x>1$，$f[g(x)]=f(e^x)=-1$. 故

$$f[g(x)]=\begin{cases}1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x>0.\end{cases}$$

又当 $|x|<1$ 时，$f(x)=1$，$g[f(x)]=g(1)=e$；当 $|x|=1$ 时，$f(x)=0$，$g[f(x)]=g(0)=1$；当 $|x|>1$ 时，$f(x)=-1$，$g[f(x)]=g(-1)=e^{-1}$. 故

$$g[f(x)]=\begin{cases}e, & |x|<1,\\ 0, & |x|=1,\\ e^{-1}, & |x|>1.\end{cases}$$

### 1.2.3　隐函数

在所讨论的函数中，自变量 $x$ 与函数变量 $y$ 之间的函数关系通常表示为 $y=f(x)$ 的形式，表达式 $f(x)$ 中不含变量 $y$，我们称这种形式的函数为**显函数**. 但是，在医学实践中，有时还会遇到函数关系不是用显函数形式表示，而是由以下方式给定的：

$$F(x,y)=0 \tag{1.1}$$

若对 $x$ 取的每一个值，代入方程(1.1)，可解出确定的 $y$ 值，令这些 $y$ 值与之对应，则由方程(1.1)便定义了 $y$ 为 $x$ 的函数. 称这种由方程确定的函数为**隐函数**，称方程(1.1)为 $y$ 的**隐函数方程**.

在有些函数关系中，函数 $y$ 是无法表示成显式的. 例如由方程 $y-x-a\sin y=0$ 所确定的函数；而在另一些函数关系中，则不必将函数 $y$ 显表示. 例如由圆的方程 $x^2+y^2=r^2$ 所确定的函数，对其隐函数方程的研究更为方便.

### 1.2.4 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算与有限次复合运算步骤而构成的，可用一个解析式表示的函数，叫**初等函数**(elementary function).

如 $\sin 2x$，$\arcsin 2x+\dfrac{\tan^2 x}{x}$，$\ln(1+\sqrt{1+x^2})\cos x$ 等都是初等函数.

初等函数以其存在域为定义域. 确定初等函数的存在域可由下列步骤进行：

(1) 分析所给初等函数是由哪几个基本初等函数经过哪几个运算步骤而得到的；

(2) 定出这些基本初等函数的定义域，并弄清每次运算对它们的存在域所加的限制；

(3) 把全部限制条件综合起来就能确定出函数的存在域.

本教材所讨论的函数主要是初等函数. 那些不是初等函数的函数，统称为**非初等函数**，即不能由基本初等函数经过有限次四则运算与有限次复合步骤而得，或不能用一个数学式子表示的函数. 某些分段函数就其整体来讲就不是初等函数，但它的每一段都是初等函数.

## 1.3 极限概念

微积分的研究对象是变量. 研究变化着的量，初等数学的方法已无能为力. 为了进一步研究函数在变化过程中的性态，我们引入极限概念. 极限概念是微积分的基本概念，极限运算是一种非初等运算，也是微积分学研究函数的基本工具，后面将要介绍的函数的连续性、导数、积分等重要概念，都是以极限为基础的. 不仅如此，极限方法也是一种辩证的思维方法，通过极限我们可以深入到函数的局部去了解函数，并且体会如何在运动的过程中把握变化的事物，从而深化对客观世界的认识.

我们不妨先从极限的特殊情况——数列极限去认识极限概念，再依次介绍函数极限、单侧极限.

### 1.3.1 数列极限

若函数 $y=f(n)$，$n\in Z^+$，则称该函数为**数列**(sequence). 因正整数集 $Z^+$ 的元素可按顺序排列，故若令 $x_n=f(n)$，则数列 $f(n)$ 也可写作：

$$x_1, x_2, \cdots x_n, \cdots$$

从而数列有时也称作**序列**. 其中第 $n$ 项 $x_n$ 叫做数列的**通项**或**一般项**. 几何上，数列表现为数轴上的一系列点. 观察几个数列：

**例 1.10** 数列 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$： $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \cdots, \dfrac{1}{n}, \cdots$ (1.2)

数列 $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$： $\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \cdots, \dfrac{n}{n+1}, \cdots$ (1.3)

数列 $\{n\}$： $1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$ (1.4)

数列 $\{(-1)^{n+1}+1\}$： $2, 0, 2, \cdots, (-1)^{n+1}+1, \cdots$ (1.5)

以上数列均为无穷数列. 其中 $n$ 的变化趋势显然是趋于无穷大(记 $n\to+\infty$). 观察上面的例子可以看出，当数列的项数 $n$ 越来越大时，数列 $\{x_n\}$ 的变化情况不同，大体可归纳为以下三种情况：

(1) 数列的项与某常数无限接近，如数列(1.2)、(1.3).

(2) 数列的项趋于无穷，如数列(1.4).

(3) 数列各项无固定趋势，如数列(1.5)，其项 $x_n$ 在 2 与 0 之间无限摆动.

数列的极限问题，就是要讨论在自变量 $n\to+\infty$ 的过程中，数列各项的变化趋势. 观察数列(1.2)(图 1.2)，它的第 $n$ 项 $x_n$ 对应于数轴上第 $n$ 个点 $x_n=\frac{1}{n}$. 可见 $n\to+\infty$ 时，$x_n$ 与 0 点的距离无限减小，或称任意小. 即

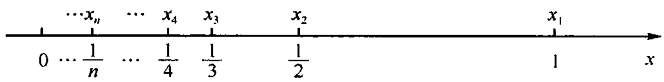



图 1.2

$$|x_n-0|=\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}$$

在 $n\to+\infty$ 时任意小，记为：$|x_n-0|\to0(n\to+\infty)$. 这时称数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 在 $n$ 趋于无穷大时以 0 为极限.

再观察数列(1.3)(图 1.3)，

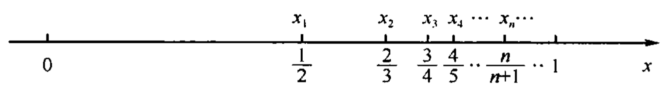



图 1.3

当 $n$ 无限增大时，$x_n=\frac{n}{n+1}$ 与常数 1 的距离

$$|x_n-1|=\left|\frac{n}{n+1}-1\right|=\frac{1}{n+1}$$

任意小，称数列 $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ 以 1 为极限. 一般地，数列极限的定义如下：

**定义 1.3(数列极限)**　已知数列 $\{x_n\}$，$A$ 是某确定常数. 当项数 $n$ 无限增大时，数列的项 $x_n$ 与常数 $A$ 的距离 $|x_n-A|$ 任意小，则称**数列 $\{x_n\}$ 以常数 $A$ 为极限**(limit)，记为：

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=A \quad 或 \quad x_n\to A(n\to+\infty)$$

这时，称数列 $\{x_n\}$ **收敛**(converge)；否则，称数列 $\{x_n\}$ **发散**(diverge).

根据定义 1.3，例 1.10 的数列(1.2)、(1.3)都是收敛的，分别记为

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0,\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}=1.$$

且称数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 收敛于 0，数列 $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ 收敛于 1. 而数列 $\{n\}$ 与 $\{(-1)^{n+1}+1\}$ 在 $n$ 趋于无穷大时是发散的.

定义 1.3 是在动态的基础上，从几何直观的角度对极限概念的定性描述. 定义 1.3 指出，$|x_n-A|$ 任意小是在 $n\to+\infty$ 这一无穷过程中实现的，它恰好反映了在 $n\to+\infty$ 时，数列的几乎所有项 $x_n$ 与常数 $A$ 无限接近这种使整个数列渐趋稳定的性态. 这种稳定性是运动之中的稳定性，它是初等数学的任何语言所无法描述的. 而此时极限语言的应运而生，正是对这种无限过程中的稳定性态的恰到好处的刻画.

但是，作为微积分逻辑演绎基础的极限概念，仅有直观的定性描述是不够的，需要将其