网络继续教育课程学习指导丛书

高等数学

学习与考试指导（上）

韩 华 主编

武汉理工大学出版社
WUTP

网络继续教育课程学习指导丛书

高等数学学习与考试指导(上)

(工科类专科适用)

主编 韩华

武汉理工大学出版社

内 容 提 要

本书是根据编者多年进行远程教育和教学研究的经验，针对远程教育的教与学精心设计的学习指导书。

本书分上下两册。上册包括函数、极限与连续、导数与微分、中值定理及导数的应用和不定积分。每章包括学习指导、学习内容、释疑解难和基础练习及参考答案，其中学习内容包括要点归纳、典型例题、本节小结和思考及解答。附录包括课程教学及考试大纲、模拟试卷及解答和历年试卷及解答。

本书可供远程教育的工科类专科学生使用，也可供学习高等数学课程的读者作为学习辅导书和考试复习书使用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习与考试指导/韩华主编. —武汉:武汉理工大学出版社，2009.6
ISBN 978-7-5629-2931-4

Ⅰ.高…
Ⅱ.韩…
Ⅲ.高等数学-高等学校-教学参考资料
Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 102464 号

出　版:武汉理工大学出版社(武汉市洪山区珞狮路 122 号　邮编:430070)
发　行:武汉理工大学出版社发行部
印　刷:武汉理工大印刷厂
开　本:787×960　1/16
印　张:33.75
字　数:662 千字
版　次:2009 年 7 月第 1 版　2009 年 7 月第 1 次印刷
印　数:1～3000 册
定　价:60.00 元(上、下册)
(本书如有印装质量问题，请向承印厂调换)

前　言

《高等数学学习与考试指导》是针对远程教育的工科类专科学生的教与学精心设计的学习指导书。编者根据多年进行远程教育和教学研究的经验，本着由简到繁、通俗易懂、适于远程教育和自主学习的指导思想编写此书。编写时，紧扣教学大纲要求，注重基本知识的系统讲解、典型方法的全面训练，强调对基本概念、定理、结论的理解与应用。

全书分上、下两册，全部内容共分为十一章和五个附录。每章均由四部分构成。

第一部分是学习指导，包括章节学习的重点、难点、常见题型及学习方法指导。

第二部分是学习内容，分节展开写。每一节包含要点归纳、典型例题、本节小结和思考解答。其中要点归纳是对教学重点内容进行简明扼要的归纳和说明，对难点知识进行直观通俗的解释；典型例题注重对解题思路进行指导，强调基本题型的分析和解题过程的指点；本节小结是以提纲的形式提炼本节的知识点，方便学生巩固复习；思考解答是在掌握基本知识和基本题型的基础上提供进一步思考的内容，以便学生增强分析问题的能力和解题能力。

第三部分是释疑解难。针对学生学习过程中有关概念、定理理解存在的困惑和解题过程中的难点问题有针对性地给出解释。

第四部分是基础练习。按照与例题对应、解法相同的原则挑选基础习题并且给出详细的解答。本书可以供学生平时学习和考试复习时使用。

附录包含课程教学及考试大纲、模拟试卷及解答和近几年武汉理工大学网络学院统考试卷和解答。

全书设计内容全面、重点突出，知识结构与教学录像对应，其中每章的第一部分和第二部分都由编者进行了视频讲解，方便学生自学。本书是上册，上册主要内容包括函数、极限与连续、导数与微分、中值定理、不定积分等内容，供高等数学课程第一学期使用，也可供学习高等数学的读者作为学习辅导书和考试复习书使用。

目　录

1　函数 …… (1)
1.1　集合与函数 …… (1)
1.1.1　要点归纳 …… (1)
1.1.2　典型例题 …… (5)
本节小结 …… (7)
思考及解答 …… (7)
1.2　初等函数 …… (7)
1.2.1　要点归纳 …… (7)
1.2.2　典型例题 …… (12)
本节小结 …… (13)
思考及解答 …… (13)
释疑解难 …… (14)
基础练习 …… (16)
参考解答 …… (17)
2　极限与连续 …… (19)
2.1　数列的极限 …… (19)
2.1.1　要点归纳 …… (19)
2.1.2　典型例题 …… (21)
本节小结 …… (21)
思考及解答 …… (21)
2.2　收敛数列的性质 …… (22)
2.2.1　要点归纳 …… (22)
2.2.2　典型例题 …… (23)
本节小结 …… (24)
思考及解答 …… (24)
2.3　函数的极限 …… (25)

2.3.1 要点归纳…………………………………………………………（25）
2.3.2 典型例题…………………………………………………………（27）
本节小结 …………………………………………………………………（28）
思考及解答 ………………………………………………………………（28）
2.4 无穷小与无穷大……………………………………………………（29）
2.4.1 要点归纳…………………………………………………………（29）
2.4.2 典型例题…………………………………………………………（32）
本节小结 …………………………………………………………………（32）
思考及解答 ………………………………………………………………（32）
2.5 极限运算(一)………………………………………………………（33）
2.5.1 要点归纳…………………………………………………………（33）
2.5.2 典型例题…………………………………………………………（33）
本节小结 …………………………………………………………………（36）
思考及解答 ………………………………………………………………（37）
2.6 极限运算(二)………………………………………………………（37）
2.6.1 要点归纳…………………………………………………………（37）
2.6.2 典型例题…………………………………………………………（39）
本节小结 …………………………………………………………………（41）
思考及解答 ………………………………………………………………（41）
2.7 极限运算(三)………………………………………………………（41）
2.7.1 要点归纳…………………………………………………………（41）
2.7.2 典型例题…………………………………………………………（43）
本节小结 …………………………………………………………………（44）
思考及解答 ………………………………………………………………（44）
2.8 函数的连续性………………………………………………………（45）
2.8.1 要点归纳…………………………………………………………（45）
2.8.2 典型例题…………………………………………………………（47）
本节小结 …………………………………………………………………（49）
思考及解答 ………………………………………………………………（49）
2.9 有关连续函数的性质………………………………………………（50）
2.9.1 要点归纳…………………………………………………………（50）
2.9.2 典型例题…………………………………………………………（52）
本节小结 …………………………………………………………………（53）
思考及解答 ………………………………………………………………（53）

释疑解难 …………………………………………………………………… (54)
基础练习 …………………………………………………………………… (57)
参考解答 …………………………………………………………………… (58)
3 导数与微分……………………………………………………………… (61)
3.1 导数的概念(一)…………………………………………………… (61)
3.1.1 要点归纳…………………………………………………… (61)
3.1.2 典型例题…………………………………………………… (63)
本节小结 …………………………………………………………… (64)
思考及解答 ………………………………………………………… (64)
3.2 导数的概念(二)…………………………………………………… (65)
3.2.1 要点归纳…………………………………………………… (65)
3.2.2 典型例题…………………………………………………… (67)
本节小结 …………………………………………………………… (68)
思考及解答 ………………………………………………………… (68)
3.3 导数计算(一)……………………………………………………… (69)
3.3.1 要点归纳…………………………………………………… (69)
3.3.2 典型例题…………………………………………………… (70)
本节小结 …………………………………………………………… (72)
思考及解答 ………………………………………………………… (72)
3.4 导数计算(二)……………………………………………………… (73)
3.4.1 要点归纳…………………………………………………… (73)
3.4.2 典型例题…………………………………………………… (74)
本节小结 …………………………………………………………… (75)
思考及解答 3.5 高阶导数(一)………………………………………… (76)
3.5.1 要点归纳…………………………………………………… (76)
3.5.2 典型例题…………………………………………………… (77)
本节小结 …………………………………………………………… (79)
思考及解答 ………………………………………………………… (79)
3.6 高阶导数(二)……………………………………………………… (79)
3.6.1 要点归纳…………………………………………………… (79)
3.6.2 典型例题…………………………………………………… (80)
本节小结 …………………………………………………………… (82)
思考及解答 ………………………………………………………… (82)
3.7 隐函数的导数……………………………………………………… (83)

3.7.1 要点归纳……………………………………………………………………(83)
3.7.2 典型例题……………………………………………………………………(83)
本节小结 ……………………………………………………………………(86)
思考及解答 ……………………………………………………………………(86)
3.8 参数方程的导数……………………………………………………………(87)
3.8.1 要点归纳……………………………………………………………………(87)
3.8.2 典型例题……………………………………………………………………(87)
本节小结 ……………………………………………………………………(90)
思考及解答 ……………………………………………………………………(90)
3.9 函数的微分(一)……………………………………………………………(91)
3.9.1 要点归纳……………………………………………………………………(91)
3.9.2 典型例题……………………………………………………………………(93)
本节小结 ……………………………………………………………………(94)
思考及解答 ……………………………………………………………………(94)
3.10 函数的微分(二) ……………………………………………………………(94)
3.10.1 要点归纳 ……………………………………………………………………(94)
3.10.2 典型例题 ……………………………………………………………………(95)
本节小结 ……………………………………………………………………(96)
思考及解答 ……………………………………………………………………(96)
释疑解难 ……………………………………………………………………(96)
基础练习 ……………………………………………………………………(98)
参考解答 ……………………………………………………………………(99)
4 中值定理及导数的应用 ……………………………………………………(102)
4.1 中值定理(一) ……………………………………………………………(102)
4.1.1 要点归纳 ……………………………………………………………………(102)
4.1.2 典型例题 ……………………………………………………………………(103)
本节小结……………………………………………………………………(104)
思考及解答……………………………………………………………………(104)
4.2 中值定理(二) ……………………………………………………………(105)
4.2.1 要点归纳 ……………………………………………………………………(105)
4.2.2 典型例题 ……………………………………………………………………(106)
本节小结……………………………………………………………………(107)
思考及解答……………………………………………………………………(107)
4.3 洛必达法则(一) ……………………………………………………………(107)

4.3.1　要点归纳 …………………………………………………… (107)
4.3.2　典型例题 …………………………………………………… (108)
本节小结…………………………………………………………… (110)
思考及解答………………………………………………………… (110)
4.4　洛必达法则(二) ………………………………………………… (111)
4.4.1　要点归纳 …………………………………………………… (111)
4.4.2　典型例题 …………………………………………………… (111)
本节小结 …………………………………………………………… (113)
思考及解答………………………………………………………… (114)
4.5　函数的单调性 …………………………………………………… (115)
4.5.1　要点归纳 …………………………………………………… (115)
4.5.2　典型例题 …………………………………………………… (115)
本节小结…………………………………………………………… (117)
思考及解答………………………………………………………… (117)
4.6　函数的极值和运用 ……………………………………………… (118)
4.6.1　要点归纳 …………………………………………………… (118)
4.6.2　典型例题 …………………………………………………… (120)
本节小结…………………………………………………………… (122)
思考及解答………………………………………………………… (123)
4.7　凹凸性与拐点 …………………………………………………… (123)
4.7.1　要点归纳 …………………………………………………… (123)
4.7.2　典型例题 …………………………………………………… (125)
本节小结…………………………………………………………… (127)
思考及解答………………………………………………………… (127)
4.8　函数图形的描述 ………………………………………………… (127)
4.8.1　要点归纳 …………………………………………………… (127)
4.8.2　典型例题 …………………………………………………… (129)
本节小结…………………………………………………………… (132)
思考及解答………………………………………………………… (132)
4.9　函数的最大值和最小值及其应用 ……………………………… (132)
4.9.1　要点归纳 …………………………………………………… (132)
4.9.2　典型例题 …………………………………………………… (133)
本节小结…………………………………………………………… (134)
思考及解答………………………………………………………… (134)

4.10 泰勒公式…… (135)
4.10.1 要点归纳…… (135)
4.10.2 典型例题…… (136)
本节小结…… (138)
思考及解答…… (138)
释疑解难…… (138)
基础练习…… (141)
参考解答…… (142)
5 不定积分 …… (146)
5.1 不定积分的概念 …… (146)
5.1.1 要点归纳 …… (146)
5.1.2 典型例题 …… (148)
本节小结…… (149)
思考及解答…… (149)
5.2 不定积分的性质 …… (149)
5.2.1 要点归纳 …… (149)
5.2.2 典型例题 …… (150)
本节小结…… (151)
思考及解答…… (151)
5.3 第一类换元积分法 …… (152)
5.3.1 要点归纳 …… (152)
5.3.2 典型例题 …… (152)
本节小结…… (157)
思考及解答…… (157)
5.4 第二类换元积分法 …… (158)
5.4.1 要点归纳 …… (158)
5.4.2 典型例题 …… (159)
本节小结…… (163)
思考及解答…… (163)
5.5 分部积分法 …… (164)
5.5.1 要点归纳 …… (164)
5.5.2 典型例题 …… (164)
本节小结…… (167)
思考及解答…… (167)

5.6 有理函数的积分 …………………………………………………………………… (168)
5.6.1 要点归纳 …………………………………………………………………… (168)
5.6.2 典型例题 …………………………………………………………………… (169)
本节小结……………………………………………………………………………… (171)
思考及解答…………………………………………………………………………… (171)
释疑解难……………………………………………………………………………… (171)
基础练习……………………………………………………………………………… (174)
参考解答……………………………………………………………………………… (175)
附录一 高等数学(网络专科)教学大纲……………………………………………… (178)
附录二 高等数学上(网络专科)模拟试卷…………………………………………… (184)
附录二 高等数学上(网络专科)历年试卷…………………………………………… (202)

1 函　　数

函数是数学中最重要的基本概念之一，本章在中学已学知识的基础上，就有关函数的知识做系统的阐述．由于在中学已经学过初等函数的基本知识，因此，大家在学习时可以较快地阅读本章内容，直接去做习题，不会的时候，再去查相应的知识点，这样才会加深对函数的理解；函数的几何表示十分重要，要试着对每一个函数画出其草图，以加深对该函数性质的理解；六种基本初等函数的定义域、对应规则、图形都必须记住，本课程的大多数例题都是以基本初等函数为对象说明的.

学习重点：区间、邻域，函数的定义域，函数的性质，复合函数、分段函数．

学习难点：建立函数关系．

常见题型：确定函数的定义域，判断函数的奇偶性，函数的复合运算，分段函数的赋值运算.

1.1　集合与函数

1.1.1　要点归纳

1.1.1.1　集合

(1)集合的定义

具有确定性质的对象的总体称为**集合**．组成集合的每一个对象称为该集合的**元素**．例如：太阳系的九大行星组成一个集合，而每个行星都是这个集合中的一个元素；教室里的所有同学组成一个集合，每一位同学都是该集合中的一个元素．

(2)集合的分类

由有限个元素组成的集合称为有限集；由无限个元素组成的集合称为无限集.

(3)集合的表示方法

①列举法 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$；

②描述法 $M=\{x\mid x所具有的特征\}$.

(4)集合的子集

若 $x\in A$ 必有 $x\in B$,则称 A 为 B 的**子集**($A\subset B$).

不含任何元素的集合称为**空集**,记作$\varnothing$. 规定空集为任何集合的子集.

(5)数集分类

N——自然数集;Z——整数集;Q——有理数集;R——实数集;N^{+}——正整数集.

(6)集合的运算

并集:$A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$;

交集:$A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$;

差集:$A\backslash B=\{x|x\in A$ 但 $x\notin B\}$;

余集:研究某一问题时所考虑的对象的全体称为全集,用 I 表示,把差集 $I\backslash A$ 特别称为**余集或补集**,记作 A^{C}.

1.1.1.2 区间和邻域

(1)**区间**是指介于某两个实数之间的全体实数,这两个实数叫做区间的**端点**.

①有限区间

$\forall a,b\in R$,且 $a<b$. 称$\{x|a<x<b\}$为开区间,记作(a,b)(图 1-1);称$\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$为闭区间,记作$[a,b]$(图 1-2);称$\{x|a\leqslant x<b\}$为半闭半开区间,记作$[a,b)$;称$\{x|a<x\leqslant b\}$为半开半闭区间,记作$(a,b]$.

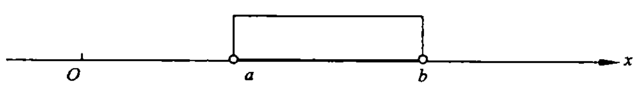

图 1-1

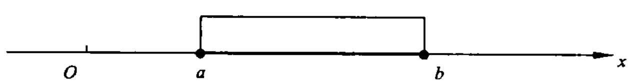

图 1-2

②无限区间$[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\}$(图 1-3);$(-\infty,b)=\{x|x<b\}$(图 1-4).

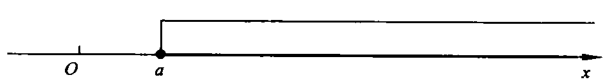

图 1-3

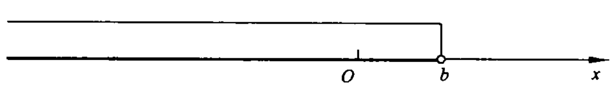

图 1-4

③区间长度的定义：两端点间的距离（线段的长度）称为**区间的长度**.

(2)邻域：设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta>0$. 数集 $\{x \mid |x-a|<\delta\}$ 称为点 a 的 **δ 邻域**，点 a 叫做这个**邻域的中心**，δ 叫做这个**邻域的半径**（图 1-5）. 记作 $U(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}$.

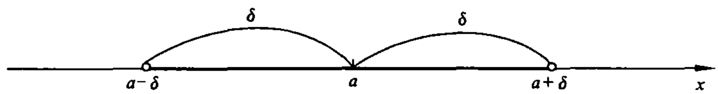

图 1-5

点 a 的去心 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，$\mathring{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$.

把开区间 $(a-\delta,a)$ 称为点 a 的左 δ 邻域；把开区间 $(a,a+\delta)$ 称为点 a 的右 δ 邻域.

1.1.1.3　函数的概念

(1)函数的定义：设数集 $D \subset R$，则称影射 $f: D \to R$ 为定义在 D 上的函数，记为 $y=f(x)$，其中 x 为自变量，y 为因变量.

(2) 函数的两要素：定义域与对应法则 .

定义域 D：使表达式有意义的自变量能取的一切实数值构成的数集.

值域 R：由函数值的全体构成的数集 .

$$R_f = f(X) = \{y \mid y = f(x), x \in D_f\}.$$

(3)几个特殊的函数举例.

①符号函数：$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -1 & x<0\end{cases}$（图 1-6）.

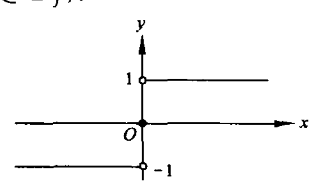

图 1-6

显然：$x=\operatorname{sgn}x \cdot |x|$.

②取整函数 $y=[x]$：不超过 x 的最大整数（图 1-7）.

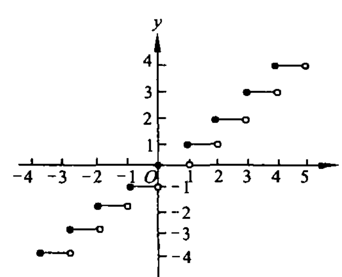

图 1-7

显然：$x-1<[x] \leqslant x$.

③取最值函数.

$y=\max\{f(x),g(x)\}$（图 1-8）；

$y=\min\{f(x),g(x)\}$（图 1-9）.

④分段函数：在自变量的不同范围中，对应法则用不同的式子来表示的函数.

1.1.1.4　函数的几种特性

(1)函数的奇偶性

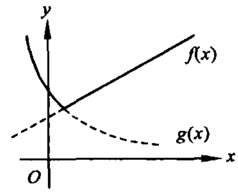

图 1-8

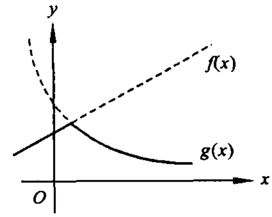

图 1-9

设 D 关于 y 轴对称，对于 $\forall x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**偶函数**（图 1-10）；设 D 关于原点对称，对于 $\forall x\in D$，有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**（图 1-11）.

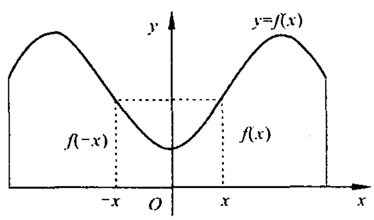

图 1-10

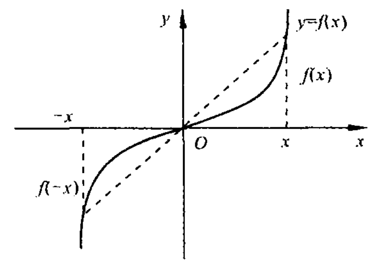

图 1-11

(2)函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个不为零的数 l，使得对于 $\forall x\in D$，$(x\pm l)\in D$，且 $f(x+l)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为**周期函数**，l 为 $f(x)$ 的**周期**（图 1-12）.

通常所说的周期函数的周期是指最小正周期.

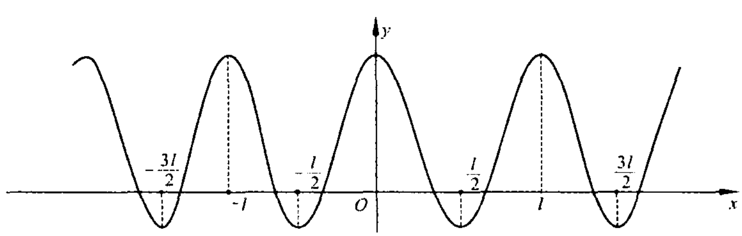

图 1-12

(3)函数的单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$，如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，均有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上**单调增加**. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时均有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 上严

格单调增加(图 1-13).

设函数 $f(x)$的定义域为 D,区间 $I\subset D$,如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在区间 I 上单调减少. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,均有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在 I 上严格单调减少(图 1-14).

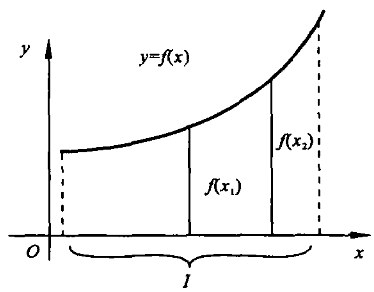

图 1-13

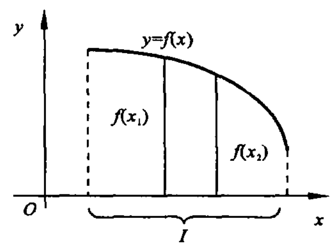

图 1-14

(4)函数的有界性

若 $X\subset D$, $\exists M>0$, $\forall x\in X$,有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立,则函数 $f(x)$在 X 上**有界**(图 1-15),否则称为**无界**(图 1-16).

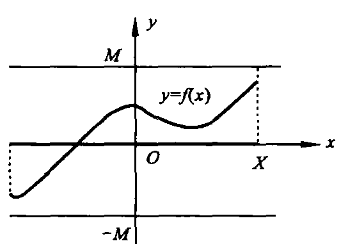

图 1-15

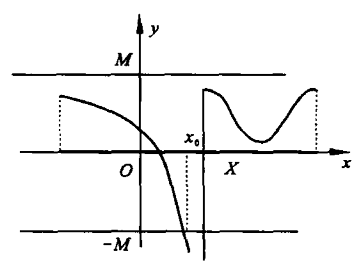

图 1-16

1.1.2 典型例题

[例 1] 求以下函数的定义域:

(1)$y=\sqrt{3-x}$; (2)$y=\dfrac{2x}{x^2-3x+2}$;

(3)$y=\arcsin(2x+1)$; (4)$y=\ln(1+3x)$.

指导:此题要求根据数学公式的含义,求出使公式有意义的 x 的全体. 凡是遇到偶次方根函数,如 $y=\sqrt{u}$,$\sqrt[4]{u}$等,应当要求 $u\geqslant 0$;遇到分式函数,如 $y=\dfrac{v}{u}$,则要求 $u\neq 0$;遇到反三角函数 $\arcsin u$ 或 $\arccos u$,则要求 $|u|\leqslant 1$;遇到对数函数 $y=\ln u$,

则要求 $u>0$ 等等.

解:(1)由 $3-x\geqslant0$ 得 $x\leqslant3$.

(2)由 $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)\neq0$ 得 $x\neq1$ 且 $x\neq2$.

(3)由 $|2x+1|\leqslant1$ 得 $-1\leqslant2x+1\leqslant1$,亦即 $-1\leqslant x\leqslant0$.

(4)由 $1+3x>0$ 得 $x>-\dfrac{1}{3}$.

[例 2] 判定下列函数的奇偶性.

(1)$f(x)=x^4+1$; (2)$f(x)=x^3-x$;

(3)$f(x)=x\cos x$; (4)$f(x)=e^x$.

指导:有两种方法判定函数的奇偶性. 一是直接应用奇偶函数的定义判定:即当 $f(-x)=f(x)$时,$f(x)$为偶函数;$f(-x)=-f(x)$时,$f(x)$为奇函数. 二是利用奇偶函数的运算性质判定:两个偶函数之乘积、和、复合都是偶函数等等.

解:(1)$f(-x)=(-x)^4+1=x^4+1=f(x)$,故 $f(x)$是偶函数.

(2)$f(-x)=(-x)^3-(-x)=-x^3+x=-(x^3-x)=-f(x)$,故 $f(x)$是奇函数.

(3)$f(-x)=-x\cos(-x)=-x\cos x=-f(x)$,故 $f(x)$是奇函数.

(4)$f(-x)=e^{-x}$与$\pm f(x)=\pm e^x$ 都不可能相同,故 $f(x)$是非奇非偶函数.

[例 3] 设 $f(x)$于$(-\infty,+\infty)$上有定义,证明 $F(x)=f(x)+f(-x)$是偶函数,$G(x)=f(x)-f(-x)$是奇函数.

指导:验证函数是偶函数,只要依据定义验证 $F(-x)=F(x)$;验证函数是奇函数,只要依据定义验证 $G(-x)=-G(x)$.

证:$F(-x)=f(-x)+f(x)=F(x)$,$G(-x)=f(-x)-f(x)=-G(x)$,证毕.

[例 4] 设 $f(x)$以 T 为周期,证明复合函数 $h(x)=f(x+a)$以 T 为周期;$g(x)=f(ax)(a\neq0)$以$\dfrac{T}{a}$为周期.

指导:验证一个函数 $h(x)$是否以 T 为周期,只要看 $h(x+T)=h(x)$是否成立.

解:因为 $f(x)$以 T 为周期,故 $f(x+T)=f(x)$,于是

$$h(x+T)=f[(x+T)+a]=f(x+a+T)=f(x+a)=h(x)$$

$$g\left(x+\frac{T}{a}\right)=f\left[a\left(x+\frac{T}{a}\right)\right]=f(ax+T)=f(ax)=g(x)$$

故所证结果成立.

[例 5] 设 $f(x)=\begin{cases}x+1 & -1\leqslant x\leqslant0\\ e^x-1 & 0<x\leqslant2\end{cases}$,求 $f(0)$、$f(1)$及 $f(x)$的定义域.