华章数学译丛

43

Mathematical Modeling

(Third Edition)

数学建模方法与分析

（原书第3版）

(美) Mark M. Meerschaert 著

刘来福 杨淳 黄海洋 译

机械工业出版社
China Machine Press

华 章 数 学 译 丛

43

Mathematical Modeling (Third Edition)

数学建模方法与分析

（原书第3版）

（美）Mark M. Meerschaert 著

刘来福 杨淳 黄海洋 译

机械工业出版社
China Machine Press

本书系统介绍数学建模的理论及应用，作者将数学建模的过程归结为五个步骤（即“五步方法”），并贯穿全书各类问题的分析和讨论中．本书阐述了如何使用数学模型来解决实际问题，提出了在组建数学模型并且求解得到结论之后如何进行灵敏性和稳健性分析．此外，将数学建模方法与计算机的使用密切结合，不仅通过对每个问题的讨论给了很好的示范，而且配备了大量的习题．

本书适合作为高等院校相关课程的教材和参考书，也可供参加国内外数学建模竞赛的人员参考．

本书版权登记号：图字：01-2009-1344

图书在版编目（CIP）数据

数学建模方法与分析（原书第3版）/（美）米尔斯切特（Meerschaert，M. M.）著；刘来福等译．—北京：机械工业出版社，2009. 5
（华章数学译丛）
书名原文：Mathematical Modeling，Third Edition

ISBN 978-7-111-26640-2

Ⅰ．数…　Ⅱ．①米…②刘…　Ⅲ．数学模型　Ⅳ．O141. 4

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 041438 号

机械工业出版社（北京市西城区百万庄大街22号　邮政编码　100037）
责任编辑：迟振春
北京京师印务有限公司印刷
2009年5月第1版第1次印刷
186mm×240mm · 17 印张
标准书号：ISBN 978-7-111-26640-2
定价：39. 00 元

凡购本书，如有倒页、脱页、缺页，由本社发行部调换
本社购书热线：（010）68326294

译 者 序

在叶其孝教授和姜启源教授的推荐下，我们有幸阅读了本书英文版．不同于通常所见到的关于数学建模的书，本书使我们有一种耳目一新的感觉．

本书最显著的特点是作者将数学建模的过程，也就是解决实际问题的数学建模方法归结为五个步骤（书中称之为“五步方法”），并且贯穿全书各类问题的分析和讨论当中．它们是：1. 提出问题；2. 选择建模方法；3. 推导模型的数学表达式；4. 求解模型；5. 回答问题．这是我们在进行数学建模时的一种科学的思维方式，特别是它可以有效地帮助初学者步入数学建模的大门．第一步的“提出问题”也就是我们常说的用数学语言表述实际问题的前提，包括合理的假设、引入变量和参数（带有恰当的单位及已知的关系）、明确求解的目标．这是成功建立数学模型的关键．最后一步“回答问题”也就是我们常说的用通俗的语言表述数学结论，使得最初提出问题的人能理解你通过数学模型给出的结论．这是数学模型实现其实用价值的关键．这种数学语言与非数学语言的“双向翻译”能力是数学建模过程中的薄弱环节．为解决这个问题，书中不仅通过对每个问题的讨论给予很好的示范，而且配备了大量的习题．同一个实际问题（如鲸鱼问题）在不同章节的习题中反复出现，不断地要求应用五步方法，引导学生从不同的角度考虑，结合不同的数学模型进行讨论．所有这些对于希望提高数学建模能力的读者来说是非常有益的．

本书的第二个特点是如何使用数学模型来解决实际问题．在数学上，解决问题只需要根据问题的条件通过数学上的分析得到所需要的结论，这样工作就完成了．但是当你面对一个实际问题并使用数学模型归结为数学问题之后，通过对模型的数学分析给出解答并不意味着实际问题已经完全解决了．因为在建模的过程中通过假设问题被简化了，对参数给出的估计往往是近似的．这种简化和近似对于实际问题有多大影响？这也是数学建模工作者在解决实际问题时所必须面对的问题．本书提出了在组建数学模型并且求解得到结论之后的一项重要工作：关于模型的灵敏性和稳健性的分析，这是非常必要的．这一分析也贯穿于全书各类问题的讨论之中．这在我国现有的数学建模教材中是很少见的．实际问题的复杂性和随机因素的影响都难以保证我们所做的假设是完全正确的，观测数据存在的误差也会影响到人们对结论的信心．因此，对参数进行灵敏性分析，可以确定结论的实用范围；对模型进行稳健性分析，可以断定从一个不完全精确的模型导出的结论是否对实际问题有价值，从而提高了数学模型的结论的有效性．这些分析对于数学建模工作者来说不仅必要而且十分重要．为此作者在书中精心选择和设计了所使用的例题和习题．

本书的第三个特点是将数学建模方法与计算机的使用密切结合．现代计算技术的应用不仅减少了计算错误，而且加强了数学应用者解决问题的能力．解析方法只能根据模型推测将会发生什么，而计算机模拟方法不仅能通过模型的构造和运行看到将会发生什么，而且还能分析解析方法很难处理的复杂问题．在这本书中作者脱离了具体的计算机语言，以伪代码的形式给出解决问题的基本算法，使学生可以用自己掌握的计算机语言编程，尝试数值模拟方法．

目前我国多数高等院校已经开设了数学建模课程，不少重点大学更是将数学建模课程列为数学专业本科生必修的基础课程，全国的数学建模竞赛也已具有相当的规模和影响．这些变化极大地推动了我国高等院校的课程改革和数学应用教育的发展．现在我们面临的最重要问题是如何提高数学建模课程的教学水平．好的教材是解决问题的关键之一．我们读完本书英文版后，为其特色和魅力所折服．本书只要求读者具备大学一、二年级的数学基础知识（掌握一元微积分、多元微积分、线性代数和微分方程是必需的．事先接触过计算方法、概率论和统计学方面的知识是有益的，但不是必需的），特别是它注重培养数学建模的良好习惯，通过大量的习题引导读者动手去做，由浅入深、循循善诱的特点，使其适合作为高等院校数学建模课程的教材或教学参考书．因此，我们认为很有必要将英文版翻译成中文，献给广大的中国读者．鉴于我们翻译水平有限，书中涉及的内容又十分广泛，不当之处实在难免．读者的任何批评指正都将是对本书的关心和帮助，我们由衷欢迎．

本书第一部分和后记由杨淳翻译，第二部分由黄海洋翻译，第三部分和前言由刘来福翻译．最后由刘来福对全书进行了统稿．感谢叶其孝教授和姜启源教授的推荐，感谢机械工业出版社华章分社的编辑们为这本书的出版所做的努力．

刘来福
于北京师范大学数学科学学院

译者简介

刘来福 北京师范大学数学科学学院教授，博士生导师．北京数学会副理事长，全国大学生数学建模竞赛北京赛区组织委员会副主任．从事应用数学方面的教学和科学研究工作．著有《作物数量遗传》、《生物统计》、《数学模型与数学建模》、《问题解决的数学模型方法》等书．译著：《用 Maple 和 Matlab 解决科学计算问题》（W. Gander）．在国内外发表研究论文 80 余篇．

黄海洋 北京师范大学数学科学学院教授，博士生导师．北京师范大学数学科学学院副院长，全国大学生数学建模竞赛北京赛区组织委员会副秘书长．从事基础数学和应用数学方面的教学和科学研究工作．译著：《用 Maple 和 Matlab 解决科学计算问题》（W. Gander）．在国内外发表研究论文 30 余篇．

杨　淳 北京师范大学数学科学学院副教授．从事计算数学和应用数学方面的教学和科学研究工作．在国内外发表研究论文 40 余篇．

前言

数学建模是连接数学和现实世界的桥梁. 从提出问题，思考、提炼问题，到用精确的数学语言叙述问题，一旦问题变成数学问题，就可以使用数学知识去求解. 最后，需要倒转这个过程，把数学的解答翻译成对于原问题来说易于理解的、有意义的答案（这是很多的人经常忽略的部分）. 有些人擅长语言，而另一些人则擅长计算，我们拥有许多具备这两种能力之一的人. 但是，我们需要更多的人既擅长语言又擅长计算，并且愿意和能够进行翻译. 这些人就是对解决将来的问题有影响力的人.

本书是为数学专业及相关专业大学高年级的学生或刚入学的研究生提供的一本数学建模领域的入门读物. 通常大学一、二年级数学课程中学习的一元微积分、多元微积分、线性代数和微分方程是必需的. 事先接触过计算方法、概率论和统计学方面的知识是有益的，但不是阅读本书的前提.

本书与某些专注于某一类数学模型的教科书不同，覆盖了从最优化到动力系统到随机过程中有关建模问题的广泛领域. 本书与另外一些仅仅讲授一学期微积分知识的书籍也不同，它要求学生使用他们所学的全部数学知识来解决问题（因为这些都是解决实际问题时需要的）.

绝大多数数学模型可以归为三大类型：最优化模型、动态模型和概率模型. 在实际应用中模型的类型可能由所遇到的问题决定，但更多的是与使用者对模型的选择有关. 在许多实例中都可以使用一类以上的模型. 例如：一个大规模的蒙特卡罗模拟模型也可能会与一个小的易于掌握的基于期望值的确定性模型结合起来使用.

与三类主要数学模型相对应，本书题材的组织分为三个部分. 我们从最优化模型开始. 第 1 章以单变量的最优化问题为主题，在 1.1 节介绍了数学建模的五步方法，在这一章的其余部分介绍了灵敏性分析和稳健性分析. 全书贯穿使用了这些数学建模的基本材料. 每一章后面的习题最好也要求学生完成. 第 2 章讨论多变量最优化问题，介绍了决策变量、可行解、最优解和约束条件. 这一章复习拉格朗日乘子法是为了没有接触过多元微积分中这一重要方法的学生. 在关于带约束条件问题的灵敏性分析一节中，我们会了解到拉格朗日乘子可用来表示影子价格（有些作者称它们为对偶变量）. 这些成为第 3 章稍后关于线性规划讨论的内容. 第 3 章的结尾是关于离散最优化的一节，它是在第 2 版中加进来的. 这里我们给出了整数规划的分支定界方法的实用介绍. 我们还探讨了线性规划和整数规划之间的联系，这样较早地引入了对连续模型离散化的重要论题. 第 3 章还包含了一些重要的计算方法，包括单个和多个变量的牛顿法以及线性规划和整数规划.

本书的第二部分是关于动态模型的，介绍状态和平衡态的概念，随后的关于状态空间、状态变量和随机过程的平衡态的讨论都与这些概念密切相关．此外，还讨论了离散和连续时间的非线性动力系统．书中的这一部分很少强调严格的解析解，因为绝大多数这些模型不存在解析解．在第6章的结尾是关于混沌和分形的一节，它是在第2版中加进来的．我们应用解析和模拟两种方法探讨了离散的和连续的动力系统的行为，以便理解在某些条件下它们如何变成混沌．这一节为这个主题提供了一个实际的易于理解的介绍．学生获得了关于对初始条件的敏感依赖性、周期的加倍以及奇怪吸引子这些构成分形集合的概念的体验．最重要的是，这些数学上的珍奇是在研究现实世界的问题中浮现出来的．

在书的最后一部分我们介绍了概率模型．学习这部分内容不需要事先具备概率论的知识．我们是以本书前两部分为基础，在现实问题中涉及概率论时以自然和直观的方式介绍．

本书的每一章都配有挑战性的习题．对部分学生而言，这些习题不但要求他们付出巨大的努力还需要一定的创造性．书中的问题不是编造的，它们都是现实的问题．不是把这些问题设计成为说明任何特定数学方法的应用，相反，由于问题的需要，我们将会偶尔绕过本书中新的数学方法．我认为本书任何地方不会引起学生的疑问：这究竟是为什么？尽管虚构的问题通常过分简化或严重地不切实际，但是虚构的问题还是体现了应用数学知识去解决实际问题时的基本任务．对于大多数学生来说，虚构的问题提出许多挑战．本书教授学生如何去解决这些虚构的问题．本书提供了一种通用方法，可以使得有能力的学生成功地运用它去解决任何虚构的问题．这种方法在1.1节提出．这种方法同样可用于全书所有类型的问题．

每一章的习题的后面列出了进一步阅读文献．其中包括若干与本章内容有关的应用数学的UMAP模块．UMAP模块能够提供对本书材料的有益补充．所有的UMAP模块可以从数学及数学应用协会（www. comap. com ）得到．

本书的主要论题之一是使用适当的技术去解决数学问题．计算机代数系统、图形工具和数值方法在解决数学问题中都有用武之地，许多学生还没有接触到这些工具．我们把现代的技术引入了本书，因为这些新技术更加便于解决现实世界中的问题，从而激励学生去学习．计算机代数系统和二维图形工具在全书中都会用到，第2、3章关于多变量最优化的问题会涉及三维图形工具，接触过三维图形工具的学生可以尝试使用已掌握的知识．书中的数值方法包括牛顿方法、线性规划、欧拉方法和线性回归．

书中除了介绍绘图工具在数学中的专门使用之外，还包括大量用计算机绘制的图形．计算机代数系统广泛地用于明显地需要代数计算的那些章节．第2、4、5章包含了从计算机代数系统Maple和Mathematica得到的计算机输出．关于计算技术的几章（第3、6、9章）讨论了数值算法在求解不存在解析解的问题时的专

门使用. 关于线性规划的 3.3 节和 3.4 节中包括了从流行的线性规划软件包 LINDO 得到的计算机输出. 关于线性回归和时间序列的 8.3 节和 8.4 节包括了从通用的统计软件包 Minitab 得到的输出.

学生需要具备这些专用的技术以便充分地利用本书. 我尽量为各种学院的教师使用本书提供方便. 有些教师有办法使学生接触这些复杂的计算工具，但有些人办法较少. 最起码的需要包括：（1）绘制二维图形的软件工具，（2）一台能使学生执行简单的数值算法的计算机. 计算机电子表格软件或者可编程的图形计算器都可以做这些事情. 理想的状况是为学生提供机会接触较好的计算机代数系统、线性规划软件包和统计计算软件包. 下面列出了可以结合本书使用的部分专用软件包.

计算机代数系统：

- Derive, Soft Warehouse, Inc., www.derive.com
- Maple, Waterloo Maple, Inc., www.maplesoft.com
- Mathcad, Mathsoft, Inc., www.mathsoft.com
- Mathematica, Wolfram Research, Inc., www.wolfram.com
- MATLAB, The MathWorks, Inc., www.mathworks.com

统计软件包：

- Minitab, Minitab, Inc., www.minitab.com
- SAS, SAS Institute, Inc., www.sas.com
- SPSS, SPSS Inc., www.spss.com
- S-PLUS, Insightful Corp., www.insightful.com
- R, R Foundation for Statistical Computing, www.r-project.org

线性规划软件包：

- LINDO, LINDO Systems, Inc., www.lindo.com
- MPL, Maximal Software, Inc., www.maximal-usa.com
- AMPL, AMPL Optimization, LLC, www.ampl.com
- GAMS, GAMS Development Corp., www.gams.com

本书中的数值算法是以伪代码的形式表示的. 有些教师喜欢让学生自己实现这些算法. 另一方面，如果不打算要求学生去编写程序，我们希望使教师容易为学生提供专用的软件. 本书中所有的算法都在各种计算机的平台上实现过，本书的使用者可以利用而无须付附加的费用. 如果你想得到这些算法的拷贝，请与作者联系或者访问网站 www. stt. msu. edu/ ~ mcubed/modeling. html. 同样，如果你愿意与另外的教师和学生共享你的算法实现，请送一份你的拷贝给我. 如果你允许的话，我将免费将它拷贝给其他的人.

本书第 3 版采纳了部分学生和教师的十分有见解的提议．最重要的是根据读者的广泛要求增加了新的两节．在第 7 章的最后新增了关于扩散的一节．这里我们以扩散方程为重点简单地介绍了偏微分方程．我们使用傅里叶解析方法对这个偏微分方程的点源解进行简单推导，得到了正态分布密度，这样就把扩散模型与 7.3 节介绍的中心极限定理联系了起来．关于扩散的新的这一节源于内华达大学为地球科学系低年级研究生讲授的课程，它应用于污染物在大气和地表水中的迁移．在第 8 章的最后增加了关于时间序列的新的一节．这一节也是对具有一个以上预报因子的多元回归模型的引言．关于 8.3 节所讨论的内容的自然延续，时间序列这一节介绍了重要的相关思想．它也说明了如何识别相关变量，如何包括时间序列模型中的相关结构．这里的讨论集中在自回归模型上，因为它们通常是最有用的时间序列模型．因为自回归模型可以使用到处可见的线性回归软件进行处理，所以使用这个模型也是非常方便的．为了方便学生使用统计软件包，这一节通过适当的应用例子对自相关图像和序贯平方和等高级的方法做出了解释．然而，这一节也可以仅用回归的一种基本实现来讲述，这种实现允许多个预报因子以及输出两个基本统计量 R^2 和残差标准差 s．这可以用较好的电子表格软件和计算器实现．

第 3 版也反映了技术上的进步．书中包含了从最新版本的计算机代数系统 Maple 和 Mathematica 输出的结果．在第 3 章，还介绍了线性规划和整数规划求解器的电子表格的实现以及流行的线性规划软件包 LINDO 的输出．线性回归和时间序列这两节包含了流行的统计软件包 Minitab 的输出．关于所有的计算机图像和技术的讨论都已更新．

第 3 版对教师的支持比以往更强．对采用本书作为教材的老师，提供了完整、详细的解题手册．本书算法的各种平台的计算机实现以及产生全部图形和计算机输出的计算机文件可以从 www. stt. msu. edu/ ~ mcubed/modeling. html 下载．

对本书前两版的反映是令人满意的．这项工作最富吸引力的地方莫过于同使用本书的学生和教师交流．非常愿意听到对本书的任何评论和建议．

Mark M. Meerschaert
密歇根州立大学概率统计系主任
A413 Wells Hall
East Lansing, MI 48824 - 1027 USA
内华达大学物理学副教授
Reno NV 89557 USA
电话：(517) 355 - 9589
传真：(517) 432 - 1405
E-mail：mcubed@ stt. msu. edu
主页：www. stt. msu. edu/ ~ mcubed

目录

第一部分　最优化模型

第 1 章　单变量最优化

解决最优化问题是数学的一些最为常见的应用．无论我们进行何种工作，我们总是希望达到最好的结果，而使不好的方面或消耗等降到最低．企业管理人员试图通过对一些变量的控制使收益达到最大，或在达到某一预期目标的前提下使成本最低．经营渔业及林业等可更新资源的管理者要通过控制收成率来达到长期产量的最大化；政府机构需要建立一些标准，使生产生活消费品的环境成本降到最低；计算机的系统管理员要使计算机的处理能力达到最大，而使作业的延迟最少；农民会尽量调整种植空间从而使收获最高；医生则要合理使用药物使其副作用降到最低．这些以及许多其他的应用都有一个共同的数学模式：有一个或多个可以控制的变量，它们通常要受一些实际中的限制，通过对这些变量的控制，使某个其他的变量达到最优的结果．最优化模型的构思正是给定问题的约束条件，确定受约束的可控变量的取值，以达到最优结果．

我们对最优化模型的讨论从单变量最优化问题开始．大多数学生对此已经有了一些实际的经验．单变量最优化问题又称为极大-极小化问题，通常在大学第一学期的微积分课程中介绍．很多方面的实际应用问题仅用这些方法就可以处理．本章的目的一方面是对这些基本方法进行回顾，另一方面是以一种熟悉的构架介绍数学建模的基础知识．

1.1　五步方法

本节概要地介绍用数学建模解决问题的一般过程，我们称之为五步方法．我们以解决一个典型的单变量极大-极小化问题为例来介绍这个过程．大多数学生在第一学期的微积分课程中都接触过这类问题．

例 1.1　一头猪重 200 磅㊀，每天增重 5 磅，饲养每天需花费 45 美分．猪的市场价格为每磅 65 美分，但每天下降 1 美分，求出售猪的最佳时间．

解决问题的数学建模方法包括五个步骤：

㊀ 1 磅 = 0.454kg.

1. 提出问题
2. 选择建模方法
3. 推导模型的数学表达式
4. 求解模型
5. 回答问题

第一步是提出问题，而问题需要用数学语言表达，这通常需要大量的工作．在这个过程中，我们需要对实际问题做一些假设．在这个阶段不必担心需要做出推测，因为我们总可以在后面的过程中随时返回和做出更好的推测．在用数学术语提出问题之前，我们要定义所用的术语．首先列出整个问题涉及的变量，包括恰当的单位，然后写出关于这些变量所做的假设，列出我们已知的或假设的这些变量之间的关系式，包括等式和不等式．这些工作做完后，就可以提出问题了．用明确的数学语言写出这个问题的目标的表达式，再加上前面写出的变量、单位、等式、不等式及所做假设，就构成了完整的问题．

在例 1.1 中，全部的变量包括：猪的重量 w(磅)，从现在到出售猪期间经历的时间 t(天)，t 天内饲养猪的花费 C(美元)，猪的市场价格 p(美元/磅)，售出生猪所获得的收益 R(美元)，我们最终获得的净收益 P(美元)．这里还有一些其他的有关量，如猪的初始重量(200 磅)等，但它们不是变量．把变量和那些保持常数的量区分开是很重要的．

下面我们要列出对步骤 1 中所确定的这些变量所做的假设．在这个过程中我们要考虑问题中常量的作用．猪的重量从初始的 200 磅按每天 5 磅增加，我们有

$$(w\ 磅) = (200\ 磅) + \left(\frac{5\ 磅}{天}\right)(t\ 天).$$

这里我们把变量的单位包括进去，从而可以检查所列式子是否有意义．

该问题中涉及的其他假设包括：

$$\left(p\frac{美元}{磅}\right) = \left(\frac{0.65\ 美元}{磅}\right) - \left(\frac{0.01\ 美元}{磅 \cdot 天}\right)(t\ 天)$$

$$(C\ 美元) = \left(\frac{0.45\ 美元}{天}\right)(t\ 天)$$

$$(R\ 美元) = \left(\frac{p\ 美元}{磅}\right)(w\ 磅)$$

$$(P\ 美元) = (R\ 美元) - (C\ 美元).$$

我们还要假设 $t \geqslant 0$，在这个问题中，我们的目标是求净收益 P 的最大值．图 1-1 以表格形式总结了第一步所得的结果，便于后面参考．

第一步中的三个阶段(变量、假设、目标)的确定不需要按特定的顺序．比如，在第一步中首先确定目标常常更有帮助．在例 1.1 中，我们定义了目标 P 和列出等式 $P = R - C$ 后，才能容易看出 R 和 C 应该为变量．一个考察第一步是否完整的方法是检查 P 是否可以最终表示成变量 t 的函数．关于步骤 1 的一个最好的一般性建议就是首先写出所有显而易见的部分．(例如，对有些变量，只需阅

读对问题的说明，并找出其中的名词，即可得到．)随着这个过程的进行，其他部分会逐渐补充完整．

变量：	t = 时间(天)
	w = 猪的重量(磅)
	p = 猪的价格(美元/磅)
	C = 饲养 t 天的花费(美元)
	R = 售出猪的收益(美元)
	P = 净收益(美元)
假设：	$w=200+5t$
	$p=0.65-0.01t$
	$C=0.45t$
	$R=p\cdot w$
	$P=R-C$
	$t\geqslant 0$
目标：	求 P 的最大值

图 1-1 售猪问题的第一步的结果

第二步是选择建模方法．现在我们已经有了一个用数学语言表述的问题，我们需要选择一种数学方法来获得解．许多问题都可以表示成一个已有有效的一般求解方法的标准形式．应用数学领域的多数研究都包含确定问题的一般类别，并提出解决该类问题的有效方法．在这一领域有许多文献，并且不断取得许多新的进展．一般很少有学生对选择较好的建模方法有经验或熟悉文献．在这本书里，除了极少的例外，我们都会给定所用的建模方法．我们将例 1.1 定位为单变量最优化问题或极大-极小化问题．

我们只概述所选建模方法，细节请读者参考微积分入门教科书．

> 给定定义在实轴的子集 S 上的实值函数 $y=f(x)$．设 f 在 S 的某一内点 x 是可微的，若 f 在 x 达到极大或极小，则 $f'(x)=0$．这一结论是微积分中的一个定理．据此我们可以在求极大或极小点时不考虑那些 $x\in S$ 中 $f'(x)\neq 0$ 的内点．只要 $f'(x)=0$ 的点不太多，这个方法就很有效．

第三步是推导模型的数学表达式．我们要把第一步得到的问题应用于第二步，写成所选建模方法需要的标准形式，以便于我们运用标准的算法过程求解．如果所选的建模方法通常采用一些特定的变量名，比如我们的这个例子，那么把问题中的变量名改换一下常会比较方便．我们有

$$\begin{aligned}P&=R-C\\&=p\cdot w-0.45t\\&=(0.65-0.01t)(200+5t)-0.45t.\end{aligned}$$

令 $y=P$ 是需最大化的目标变量，$x=t$ 是自变量．我们的问题现在化为在集合 $S=\{x:x\geqslant 0\}$ 上求下面函数的最大值：

$$
\begin{aligned}
y &= f(x) \\
&= (0.65 - 0.01x)(200 + 5x) - 0.45x.
\end{aligned}
\tag{1-1}
$$

第四步是利用第二步中确定的标准过程求解这个模型．在我们的例子中，要对(1-1)式中定义的 $y=f(x)$ 在区间 $x\geqslant 0$ 上求最大值．图 1-2 给出了 $f(x)$ 的曲线．由于 f 关于 x 是二次的，因此这是一条抛物线．我们计算出

$$f'(x) = \frac{(8-x)}{10},$$

则在点 $x=8$ 处 $f'(x)=0$. 由于 f 在区间 $(-\infty, 8)$ 上是递增的，而在区间 $(8, \infty)$ 上是递减的，所以点 $x=8$ 是全局极大值点．在此点我们有 $y=f(8)=133.20$. 因此点 $(x, y)=(8, 133.20)$ 是 f 在整个实轴上的全局极大值点，从而也是区间 $x\geqslant 0$ 上的最大值点．

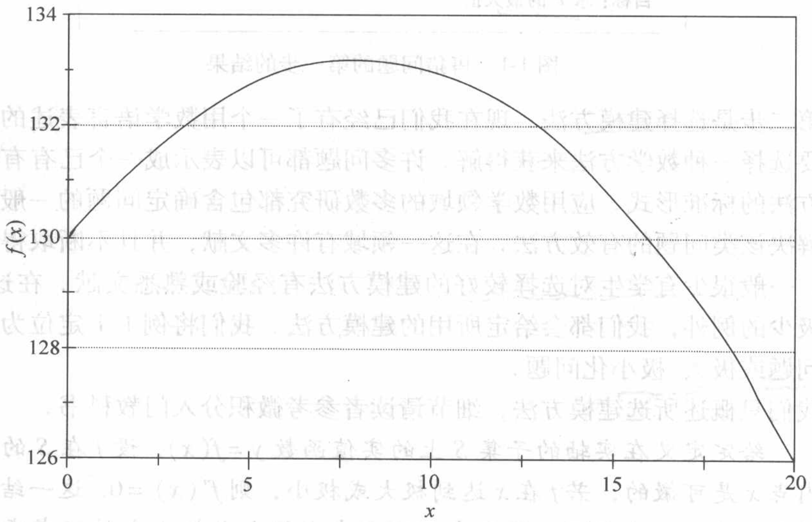

图 1-2　售猪问题的净收益 $f(x)=(0.65-0.01x)(200+5x)-0.45x$ 关于售猪时间 x 的曲线图

第五步是回答第一步中提出的问题：何时售猪可以达到最大的净收益．由我们的数学模型得到的答案是在 8 天之后，可以获得净收益 133.20 美元．只要第一步中提出的假设成立，这一结果就是正确的．相关的问题及其他不同的假设可以按照第一步中的做法调整得到．由于我们处理的是一个实际问题(一个农民决定何时出售他饲养的生猪)，在第一步中会有一个风险因素存在，因此通常有必要研究几种可供选择的方案，这一过程称为灵敏性分析，我们将在下一节中讨论．

这一节的主要目的是介绍数学建模的五步方法．图 1-3 将这一方法总结归纳成了便于以后参考的图表形式．在本书中，我们会运用这个五步方法求解数学建模中的大量问题．第二步一般会包括对所选建模方法的描述并附带一两个例子．已经熟

悉这些建模方法的读者可以跳过这一部分或只熟悉一下其记号．图 1-3 中提到的其他内容，如“采用适当的技术”等，我们会在本书后面的章节中展开讨论．

第一步，提出问题．
- 列出问题中涉及的变量，包括适当的单位．
- 注意不要混淆变量和常量．
- 列出你对变量所做的全部假设，包括等式和不等式．
- 检查单位从而保证你的假设有意义．
- 用准确的数学术语给出问题的目标．

第二步，选择建模方法．
- 选择解决问题的一个一般的求解方法．
- 一般地，这一步的成功需要经验、技巧和熟悉相关文献．
- 在本书中，我们通常会给定要用的建模方法．

第三步，推导模型的数学表达式．
- 将第一步中得到的问题重新表达成第二步选定的建模方法所需要的形式．
- 你可能需要将第一步中的一些变量名改成与第二步所用的记号一致．
- 记下任何补充假设，这些假设是为了使第一步中描述的问题与第二步中选定的数学结构相适应而做出的．

第四步，求解模型．
- 将第二步中所选的一般求解过程应用于第三步得到表达式的特定问题．
- 注意你的数学推导，检查是否有错误，你的答案是否有意义．
- 采用适当的技术．计算机代数系统、图形工具、数值计算的软件等都能扩大你能解决问题的范围，并能减少计算错误．

第五步，回答问题．
- 用非技术性的语言将第四步的结果重新表述．
- 避免数学符号和术语．
- 能理解最初提出的问题的人就应该能理解你给出的解答．

图 1-3　五步方法

每章最后的习题同样需要应用五步方法．现在养成使用五步方法的习惯，今后就会比较容易地解决我们遇到的更为复杂的建模问题．这里对第五步要特别加以注意，在实际中，仅结果正确是不够的，你还需要有把你的结论和其他人交流的能力，其中有些人可能并不像你一样了解那么多的数学知识．

1.2　灵敏性分析

上一节概要地介绍了数学建模的五步方法．整个过程从对问题做出一些假设开始．但我们很少能保证这些假设都是完全正确的，因此我们需要考虑所得结果对每一条假设的敏感程度．这种灵敏性分析是数学建模中的一个重要方面．具体

内容与所用的建模方法有关，因此关于灵敏性分析的讨论会在本书中贯穿始终．这里我们仅对简单的单变量最优化问题进行灵敏性分析．

在上节中，我们用售猪问题(例 1.1)来说明数学建模的五步方法．图 1-1 列出了我们在求解该问题中所做的所有假设．在这个例子中，数据和假设都有非常详细的说明，即使这样，我们也要再严格检查．数据是由测量、观察有时甚至完全是猜测得到的，因此我们要考虑数据不准确的可能性．

我们知道有些数据要比其他数据的可靠性高得多。生猪现在的重量、现在的价格、每天的饲养花费都很容易测量，而且有相当大的确定性．猪的生长率则不那么确定，而价格的下降率则确定性更低．记 r 为价格的下降率．我们前面假设 $r=0.01$ 美元/天，现在假设 r 的实际值是不同的．对几个不同的 r 值重复前面的求解过程，我们会对问题的解关于 r 的敏感程度有所了解．表 1-1 给出了选择几个不同的 r 值求出的计算结果．图 1-4 将这些数据绘制成图形．我们可以看到售猪的最优时间对参数 r 是很敏感的．

表 1-1　售猪问题中最佳售猪时间 x 关于价格的下降率 r 的灵敏性

r(美元/天)	x(天)	r(美元/天)	x(天)
0.008	15.0	0.011	5.5
0.009	11.1	0.012	3.3
0.010	8.0		

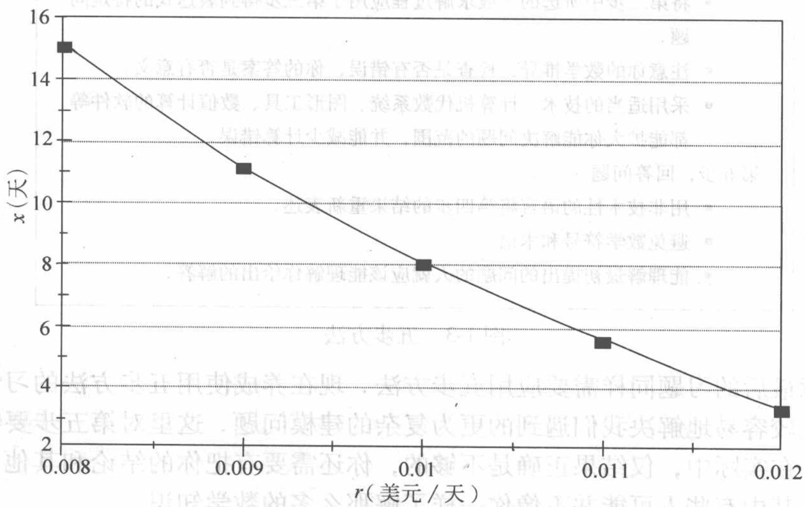

图 1-4　售猪问题中最佳售猪时间 x 关于价格的下降率 r 的曲线

对灵敏性的更系统的分析是将 r 作为未知的参数，仍按前面的步骤求解．写出

$$p = 0.65 - rt,$$