数学分析

学习指导书

(第二版)

上册

刘玉琏　主编

高等教育出版社

★ GAODENG JIAOYU CHUBANSHE

数学分析学习指导书

（第二版）

上 册

刘玉琏 吕 凤 苑德新 王大海 编

高等教育出版社

内容提要

本书是与刘玉琏主编的中学教师培训教材《数学分析》(第二版,上册)配套的学习指导书,是按教材章节对应编写的。每章包括“内容结构”、“学习要求”、“学习辅导”、“习题解答”、“自我检测题”等几个部分。“内容结构”主要概述内容的安排、处理及所处的地位、作用;“学习辅导”对重要概念、理论、计算及与中学数学有密切联系的问题作进一步说明。书末附有自我检测题答案。

图书在版编目(CIP)数据

数学分析学习指导书 上册/刘玉琏等编。—2版。—北京:高等教育出版社,1994.10(2003重印)
ISBN 7-04-004974-0

Ⅰ.数… Ⅱ.刘… Ⅲ.数学分析-教学参考资料 Ⅳ.017

中国版本图书馆 CIP 数据核字(95)第04585号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市东城区沙滩后街55号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100009	网　　址	http://www.hep.edu.cn
传　　真	010-64014048		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
排　　版	高等教育出版社照排中心		
印　　刷	北京天河印刷厂		
		版　　次	1988年3月第1版
开　　本	850×1168　1/32		1994年10月第2版
印　　张	7.5	印　　次	2003年6月第9次印刷
字　　数	190 000	定　　价	9.80元

再版前言

本书是与刘玉琏主编的中学教师培训教材《数学分析》(第二版,上、下册)配套的学习指导书.此次修订保留了第一版每章开头的“内容结构”与“学习要求”.然后根据基本上不扩充不提高知识内容的原则,分别对本章每节的某些概念、理论、计算等以及与中学数学有密切联系的问题作进一步的解释和说明.这就是每节的“学习辅导”.又根据学员是不脱离教学岗位、分散、自学的特点,每节的习题(问答题除外)都配有题解,帮助学员克服在做习题过程中所遇到的困难.希望学员做习题时深入思考,力求独立完成.当百思不得其解时,再参看题解.

根据国家教委考试中心对考试命题的要求,每章(有的两章合并)最后配一套自我检测题.一是供学员们复习迎考;二是熟悉试题的题型.每册书的最后附有自我检测题答案或略解,供学员们自我检测评定.

编　者

1993年8月于长春东北师大数学系

(邮编 130024)

前　言

本书是与刘玉琏编的中学教师培训教材《数学分析》(上、下册)配套的学习指导书，是按照教材章次逐章对应编写的.每章由五部分组成：

一、内容结构：概述教材中本章的内容，以及各节、段内容在该章的地位及其相互之间的联系.

二、学习要求：根据教学大纲和该章教材的内容，向读者提出在理论、计算、方法和能力等方面的学习要求.

三、补充说明：对该章教材中的重要概念、重要定理，与中学数学教材有关内容的联系等多方面作了补充说明.

四、补充例题：在教材中已给例题的基础上，又补充若干典型例题，以增补例题的类型，扩大例题的覆盖面.

五、自我检测题：每章的最后都有7—10个自我检测题.供读者学完一章之后，自我检查该章的学习效果.书后附有计算题的答案.

编　者

1987年5月于长春东北师大数学系

目　　录

第一章 函 数

内容结构

本章有四节十四段,其内容除复合函数和初等函数外,都是学员在中学《代数》中学过的.知识本身基本上没有提高,本章主要是复习中学《代数》有关函数的知识.

函数概念是本章的重点也是教学中的难点.为了对抽象的函数概念有个形象直观的认识,首先列举八个不同类型的函数实例(1.1.1),其次接着给出抽象的函数定义(1.1.2).为了帮助学员深刻理解函数定义,对函数定义作了三点说明(1.1.3),并对函数的表示方法,特别是解析法,作了较为细致的讨论(1.1.4).接着复习高中《代数》给出的定义在自然数集 N 上的函数——数列(1.1.5).有了函数的定义之后要讨论函数的两个方面的问题:一是函数的某些初等性质,即有界性(1.2.1),单调性(1.2.2),奇偶性(1.2.3),周期性(1.2.4).通过讨论函数的这些初等性质有计划地全面地复习高中《代数》几类常见函数(即基本初等函数)的性质及其图像;二是函数的运算,即四则运算(1.1.6),复合运算(1.3.1)和逆运算(1.3.2).在已知指数函数和三角函数的情况下,借助于逆运算,分别定义了对数函数和反三角函数,从而构造了六类基本初等函数(1.4.1).在这些基本初等函数的基础上,应用有限次的函数四则运算和函数复合运算,构造初等函数集(1.4.2).初等函数集不仅包括了中学《代数》讨论的全部函数,初等函数也是数学分析将要研究的主要对象.

学习要求

1．正确理解和掌握函数概念，了解函数的各种表示法和记号；理解和掌握函数的四则运算与复合运算，会确定函数的定义域（存在域）；掌握反函数的定义和图像等．

2．理解和掌握有界函数与无界函数、单调函数、奇函数与偶函数、周期函数等概念．

3．掌握六类基本初等函数的定义与性质，能熟练地描绘它们的图像．

4．了解常用的几个非初等函数，即整数部分函数，小数部分函数，符号函数，狄利克莱函数和黎曼函数．

§1.1 函　　数

学习辅导

1．关于函数概念

初、高中《代数》各有一个函数定义，“教材”[①]又给出了一个函数定义．那么这三个函数定义有什么异同呢？通过对它们的分析和比较帮助我们深刻理解函数概念．

“教材”的函数定义（简称“定义Ⅰ”）：

> “设有两个数集 A 与 $\mathbf{R}$，其中 A 是实数集 $\mathbf{R}$ 的子集．若 $\forall x\in A$，按照对应规律 f，对应唯一一个 $y\in\mathbf{R}$，则称对应规律 f 是定义在 A 上的**函数**，……数集 A 称为函数 f 的**定义域**．数 x 对应的数 y 称为 x 的**函数值**，表为 $y=f(x)$．函数值的集合称为函数 f 的**值域**，表为 $f(A)$，即

① “教材”就是本书与之配套的刘玉琏主编的《数学分析》．下同．

$$f(A)=\{y \mid y=f(x), x\in A\}\subset\mathbf{R}.”$$

函数定义Ⅰ由三部分内容组成：一是定义域 A；二是函数值 y 所在的实数集 $\mathbf{R}$；三是对应规律 f，$\forall x\in A$，按照对应规律 f，对应唯一一个 $y\in\mathbf{R}$，并将对应规律 f 叫做函数. 在函数定义Ⅰ中，在给定数集 A 与实数集 $\mathbf{R}$ 之后，对应规律 f 就是函数的核心，突出了对应规律 f 也就是抓住了函数的本质.

初中《代数》第四册第 44 页函数定义(简称定义Ⅱ)：

> “设在某个变化过程中有两个变量 x、y，如果对于 x 在某一范围内的每一个确定的值，y 都有唯一确定的值与它对应，那么就说 y 是 x 的**函数**，x 叫做**自变量**.”“对于自变量在取值范围内的一个确定的值，例如 $x=a$，函数有唯一确定的对应值，这个对应值，我们叫做当 $x=a$ 时的函数的值，简称**函数值**.”

这是在没有集合知识的条件下的函数定义. 因为客观事物在运动变化的过程中，在量上总是表现为变量之间相互依赖关系，所以它更符合函数概念的客观原型，易为初中生所理解. 从概念的抽象性来说，这里的“变量”也就是变数. 函数定义Ⅱ也包含定义Ⅰ中的三部分内容：一是自变量 x 所在的“某一范围”，也就是实数集 $\mathbf{R}$ 的某个子集 A，即定义域 A；二是函数值 y 所在的实数集 $\mathbf{R}$，这里虽然没有明确写出 y 是实数，但是意思是清楚的；三是对应，即对应规律 f. 这里虽然没有明确写出对应规律 f，但是有“对应”必有对应规律 f. $\forall x\in A$，按照对应规律 f，对应唯一一个 $y\in\mathbf{R}$. 所以，函数定义Ⅱ与定义Ⅰ本质上是相同的. 值得注意的是，严格地说，初中《代数》这个函数定义Ⅱ是有缺陷的. 一是定义Ⅱ说“y 是 x 的函数”. 同时 y 又表示 x 的函数值. 这样就容易把函数与函数值等同起来，这是不妥的. 事实上，函数与函数值是应该有区别的，是不能混淆的；二是定义Ⅱ没有明确指出对应法则，似乎“某一范围内”的每个 x 所对应的 y 值的集合就是 x 的函数，即容易把两个函数相等理解为自变量的变化范围及其相应的函数值集合分别

相等．这也是不妥的．例如，两个函数 $y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 定义域相等，都是 $\mathbf{R}$，而这两个函数的函数值集合也相等，即

$$\{y \mid y=\sin x, x\in\mathbf{R}\}=\{y \mid y=\cos x, x\in\mathbf{R}\}=[-1,1],$$

显然，不能认为 $y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 是相等的函数．

然而从数学教学来说，初中《代数》这个函数定义Ⅱ是符合初中学生的知识水平的，是合适的．

高中《代数》[①]第一册首先给出两个集合之间的映射定义；其次将函数作为特殊的映射．这里不再复习映射定义，在学员已掌握映射概念的基础上，高中《代数》的函数定义（简称定义Ⅲ）可叙述为：

> 设 A，B 都是实数集 $\mathbf{R}$ 的非空子集，若 $\forall x\in A$，按照对应法则 f，对应唯一一个 $y\in B$，且 $\forall y\in B$，$\exists x\in A$，使 $f(x)=y$，这样的映射（包括 A，B 及从 A 到 B 的对应法则 f）就是定义域 A 到值域 B 上的**函数**．

高中《代数》的函数定义Ⅲ与本书函数定义Ⅰ也有区别，主要表现在函数值 y 所在的数集上．函数定义Ⅰ只要求函数值 y 是实数即可，即 $y\in\mathbf{R}$，而函数定义Ⅲ不仅要求函数值 y 所在的数集是实数集 $\mathbf{R}$ 的子集 B（这与函数定义Ⅰ相同）而且又要求：$\forall y\in B$，$\exists x\in A$，使 $f(x)=y$，即又要求函数值集合（或值域）$f(A)$ 恰是数集 B，即 $f(A)=B$．由此可见，函数定义Ⅲ比函数定义Ⅰ要求高．

例如，设 $A=\mathbf{R}$，$B=[-1,1]$．$f(x)=\sin x$．

$\forall x\in A=\mathbf{R}$，$f(x)=\sin x=y\in[-1,1]=B\subset\mathbf{R}$．

$\forall y\in B=[-1,1]$，$\exists x\in A=\mathbf{R}$，使 $f(x)=\sin x=y$．

按照函数定义Ⅲ，它是函数；按照函数定义Ⅰ，它也是函数．

再例如，设 $A=\mathbf{R}$，$B=\mathbf{R}$，$f(x)=\sin x$．

$\forall x\in A=\mathbf{R}$，$f(x)=\sin x=y\in B=\mathbf{R}$，

$\exists y\in B=\mathbf{R}$，且 $|y|>1$，$\forall x\in A=\mathbf{R}$，有 $f(x)=\sin x\neq y$．

按照函数定义Ⅰ，它是函数；按照定义Ⅲ，它不是函数．这是因

---

① 高中《代数》是指“甲种本”．人民教育出版社 1983 年第一版．下同

为 $f(A)=f(\mathbf{R})=[-1,1]\neq B=\mathbf{R}$,即"函数值"集合 $f(A)$没有充满给定的数集 $B=\mathbf{R}$.

注 高中《代数》(必修本)上册的函数定义不要求"$\forall y\in B$,$\exists x\in A$,使 $f(x)=y$",即函数值集合可以不充满 B,也就是 $f(A)$可以是 B 的真子集.因此,高中《代数》(必修本)上册的函数定义与本书的函数定义基本是相同的.

2. 数列$\{a_n\}$与数集$\{a_n\mid n\in\mathbf{N}\}$的区别

数列$\{a_n\}$与数集$\{a_n\mid n\in\mathbf{N}\}$是有区别的.数列$\{a_n\}$是自然数集 $\mathbf{N}$ 上的函数,设其对应规律是 f,则 $\forall n\in\mathbf{N}$,$a_n=f(n)$.其函数值能够按照自变数(自然数)由小到大的顺序排列起来.既

$$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots\cdots.$$

因此数列$\{a_n\}$是有序的.$a_n=f(n)$作为自然数 n 的函数值,对不同的自然数可能有相等的函数值,即 $n,m\in\mathbf{N}$,且 $n\neq m$,可能有 $a_n=a_m$.例如,

数列$\{(-1)^n\}$:$-1,1,-1,1,\cdots,-1,1,\cdots$.

数集$\{a_n\mid n\in\mathbf{N}\}$是"一堆"数.作为数集来说,其中的数是无序的,又是互异的,即数集$\{a_n\mid n\in\mathbf{N}\}$中的数与前后顺序无关,又不能相等(相等的数按一个数看待).例如:

$$\text{数集}\{(-1)^n\mid n\in\mathbf{N}\}=\{-1,1\}=\{1,-1\}.$$

3. 关于函数的四则运算

在初中《代数》中,函数的四则运算实际上是函数值的四则运算.在高中《代数》和"教材"中,都是将对应规律 f 定义为函数.两个函数的四则运算就是两个对应规律 f 与 g 的四则运算.那么何谓两个对应规律 f 与 g 的和、差、积、商呢?这是一个未知的新概念,是需要定义的.从而,1.1.6 给出了函数四则运算的定义.

习题 1.1 解答

2. 计算:

(1) 设 $f(x)=\ln x$,计算$\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$,$a>0,h>0$.

解 $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\dfrac{\ln(a+h)-\ln a}{h}$

$$=\frac{1}{h}\ln\left(1+\frac{h}{a}\right)=\ln\left(1+\frac{h}{a}\right)^{\frac{1}{h}}.$$

(2) 设 $f(x)=|x-3|+|x-1|$,计算 $f(-2),f(-1)$,$f(0),f(1),f(2)$.

解 $f(-2)=|-2-3|+|-2-1|=8$,

$f(-1)=|-1-3|+|-1-1|=6$.

$f(0)=|0-3|+|0-1|=4$,$f(1)=|1-3|+|1-1|=2$.

$f(2)=|2-3|+|2-1|=2$.

3. 确定下列函数的定义域:

(1) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-3x+2}=\dfrac{2x}{(x-1)(x-2)}$.

解 要求其分母$(x-1)(x-2)\neq0$.定义域是$\mathbf{R}-\{1,2\}$.

(2) $f(x)=\sqrt{2+x+x^2}=\sqrt{\dfrac{7}{4}+\left(\dfrac{1}{2}+x\right)^2}$.

解 要求$\dfrac{7}{4}+\left(\dfrac{1}{2}+x\right)^2\geqslant0$.定义域是$\mathbf{R}$.

(3) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

解 要求$\dfrac{1-x}{1+x}\geqslant0$,且$1+x\neq0$,即 $1-x\geqslant0$ 同时 $1+x>0$,解得$-1<x\leqslant1$;$1-x\leqslant0$ 同时 $1+x<0$,无解.定义域是$(-1,1]$.

(4) $f(x)=\ln(2x+1)+\sqrt{4-3x}$.

解 要求 $2x+1>0$ 同时 $4-3x\geqslant0$,解得$-\dfrac{1}{2}<x\leqslant\dfrac{4}{3}$.定义域是$\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{4}{3}\right]$.

(5) $f(x)=\log_3(\log_2 x)$.

解 要求 $\log_2 x>0$,从而 $x>1$.定义域是$(1,+\infty)$.

(6) $f(x)=\sqrt{\log_4 \sin x}$.

解 要求 $\log_4\sin x\geqslant 0$,从而 $\sin x\geqslant 1$.定义域是$\left\{2k\pi+\frac{\pi}{2}\middle|k\in\mathbf{Z}\right\}$.

(7) $f(x)=\arcsin(2x+1)$.

解 要求$|2x+1|\leqslant 1$,解得$-1\leqslant x\leqslant 0$.定义域是$[-1,0]$.

(8) $f(x)=\sqrt{\sin\sqrt{x}}$.

解 要求 $\sin\sqrt{x}\geqslant 0$,从而 $2k\pi\leqslant\sqrt{x}\leqslant(2k+1)\pi(k\in\mathbf{Z})$同时 $x\geqslant 0$.解得$(2k\pi)^2\leqslant x\leqslant[(2k+1)\pi]^2$,$k=0,1,2,\cdots$,定义域是$[4k^2\pi^2,(2k+1)^2\pi^2]$,$k=0,1,2,\cdots$.

4. 下列每对函数是否相等?为什么?

(1) $f(x)=\frac{x-1}{x^2-1}$与 $g(x)=\frac{1}{x+1}$不相等.

定义域不同,$f(x)$的定义域是 $\mathbf{R}-\{-1,1\}$,$g(x)$的定义域是 $\mathbf{R}-\{-1\}$.

(2) $f(x)=|x|$与 $g(x)=\sqrt{x^2}$相等.

(3) $f(x)=\log_a x^2$ 与 $g(x)=2\log_a x$ 不相等.

定义域不同.$f(x)$的定义域是 $\mathbf{R}-\{0\}$,$g(x)$的定义域是$(0,+\infty)$.

(4) $f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}}$与 $g(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$不相等.

定义域不同.$f(x)$的定义域是$(2,+\infty)$,$g(x)$的定义域是$(-\infty,1]\cup(2,+\infty)$.

5. 证明:若 $\varphi(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$,则 $\varphi(a)+\varphi(b)=\varphi\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$.

证 $\varphi(a)+\varphi(b)=\ln\frac{1-a}{1+a}+\ln\frac{1-b}{1+b}=\ln\left(\frac{1-a}{1+a}\cdot\frac{1-b}{1+b}\right)$

$$=\ln\frac{1-\frac{a+b}{1+ab}}{1+\frac{a+b}{1+ab}}=\varphi\left(\frac{a+b}{1+ab}\right).$$

6. 证明:若 $\varphi(x)=\frac{1}{2}(a^x+a^{-x})$,其中 $a>0$,则

$$\varphi(x+y)+\varphi(x-y)=2\varphi(x)\varphi(y).$$

证 $\varphi(x+y)+\varphi(x-y)$

$$=\frac{1}{2}(a^{x+y}+a^{-(x+y)})+\frac{1}{2}(a^{x-y}+a^{-(x-y)})$$

$$=\frac{1}{2}(a^xa^y+a^{-x}a^{-y}+a^xa^{-y}+a^{-x}a^y)$$

$$=\frac{1}{2}(a^x+a^{-x})(a^y+a^{-y})$$

$$=2\cdot\frac{1}{2}(a^x+a^{-x})\cdot\frac{1}{2}(a^y+a^{-y})=2\varphi(x)\varphi(y).$$

7. 已知函数 $y=f(x)$在区间$[a,b]$的图像(在区间$[a,b]$上随意画一条曲线,使其与 x 轴相交)描绘下列函数的图像:

(1) $y_1=|f(x)|$. (2) $y_2=\frac{1}{2}[f(x)+|f(x)|]$.

(3) $y_3=\frac{1}{2}[f(x)-|f(x)|]$.

解 $\forall x\in[a,b]$,有

$$y_1=|f(x)|=\begin{cases}f(x), & f(x)\geqslant 0,\\ -f(x), & f(x)<0\end{cases}.$$ 如图 1.A.

$$y_2=\frac{1}{2}[f(x)+|f(x)|]=\begin{cases}f(x), & f(x)\geqslant 0,\\ 0, & f(x)<0.\end{cases}$$ 如图 1.B

的虚线.

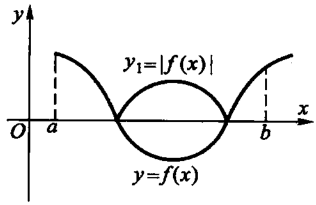

图 1.A

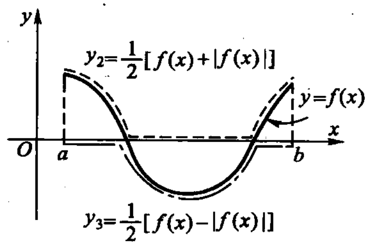

图 1.B

$$y_3=\frac{1}{2}[f(x)-|f(x)|]=\begin{cases}0, & f(x)\geqslant 0.\\ f(x), & f(x)<0.\end{cases}$$

如图 1.B 的点划线.

8. 已知函数 $y=f(x)$与 $y=g(x)$在区间$[a,b]$的图像(在区间$[a,b]$上随意画两条曲线,使其相交)描绘下列函数的图像:

$$y_1=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|],$$

$$y_2=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|].$$

解 $\forall x\in[a,b]$,有

$$\begin{aligned}y_1&=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|]\\&=\begin{cases}f(x), & f(x)\geqslant g(x),\\ g(x), & f(x)<g(x).\end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_2&=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|]\\&=\begin{cases}g(x) & f(x)\geqslant g(x),\\ f(x), & f(x)<g(x).\end{cases}\end{aligned}$$

y_1 与 y_2 也可分别写为

$$y_1=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|]=\max_{a\leqslant x\leqslant b}\{f(x),g(x)\}.$$

如图 1.C 的粗线.

$$y_2=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|]=\min_{a\leqslant x\leqslant b}\{f(x),g(x)\}.$$

如图 1.D 的粗线.

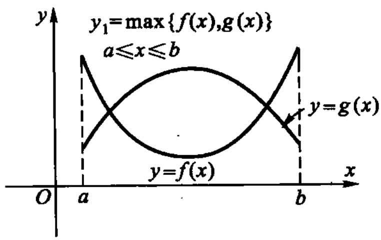

图 1.C

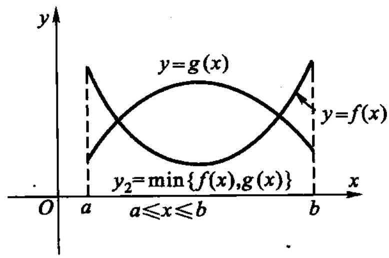

图 1.D

9. 证明:若 $f(x)=ax+b$,其中 a,b 是常数,且$\{x_n\}$是等差数列,则$\{f(x_n)\}$也是等差数列.

证 已知$\{x_n\}$是等差数列,设 $\forall n\in\mathbf{N}$,有 $x_{n+1}-x_n=r$(r 是公差).于是,$\forall n\in\mathbf{N}$,有

$$\begin{aligned}f(x_{n+1})-f(x_n)&=(ax_{n+1}+b)-(ax_n+b)\\&=a(x_{n+1}-x_n)=ar,\end{aligned}$$

其中 ar 是常数,即$\{f(x_n)\}$也是等差数列.

10. 证明:若 $f(x)=\ln x$,且$\{x_n\}$是等比数列,其中 $x_n>0$,$n\in\mathbf{N}$,则$\{\ln x_n\}$是等差数列.

证 已知$\{x_n\}$是等比数列,设 $\forall n\in\mathbf{N}$,有$\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=q$(q 是公比,且 $q>0$).于是,$\forall n\in\mathbf{N}$,有

$$f(x_{n+1})-f(x_n)=\ln x_{n+1}-\ln x_n=\ln\frac{x_{n+1}}{x_n}=\ln q,$$

其中 $\ln q$ 是常数，即 $\{\ln x_n\}$ 是等差数列.

11. 已知圆柱的高为 h，底半径为 r，取半径 r 为自变数，写出圆柱表面积 A 的函数.

解 圆柱的表面是由圆柱的侧面和上、下底所组成. 于是，

$$A = 2\pi hr + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r).$$

12. 一块长为 a 宽为 b 的长方形铁皮，四个角上各剪去边长为 x 的正方形，折起来做成一个无盖盒子. 取 x 为自变数，写出盒子容积 V 的函数.

解 盒子的长为 $a-2x$，宽为 $b-2x$，高为 x. 于是

$$V = x(a-2x)(b-2x). \qquad 0 < x < \frac{1}{2}\min\{a, b\}.$$

13. 用数学归纳法证明：费波那奇数列 $\{a_n\}$ 的通项为

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

证 费波那奇数列是：1，1，2，3，5，8，….

当 $n=1$ 时， $a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right] = 1$ 成立.

当 $n=2$ 时， $a_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right] = 1$ 成立.

设 $n=k$ 成立，即 $a_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right]$ 成立.

当 $n=k+1$ 时 $(k\geqslant 2)$，有

$$\begin{aligned}
a_{k+1} &= a_{k-1} + a_k \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\right] \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right.
\end{aligned}$$