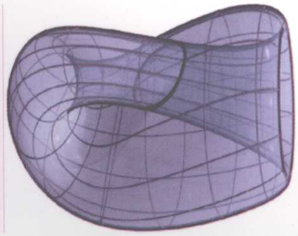
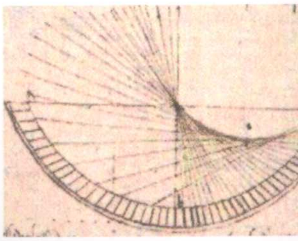
高等教育“十一五”规划教材



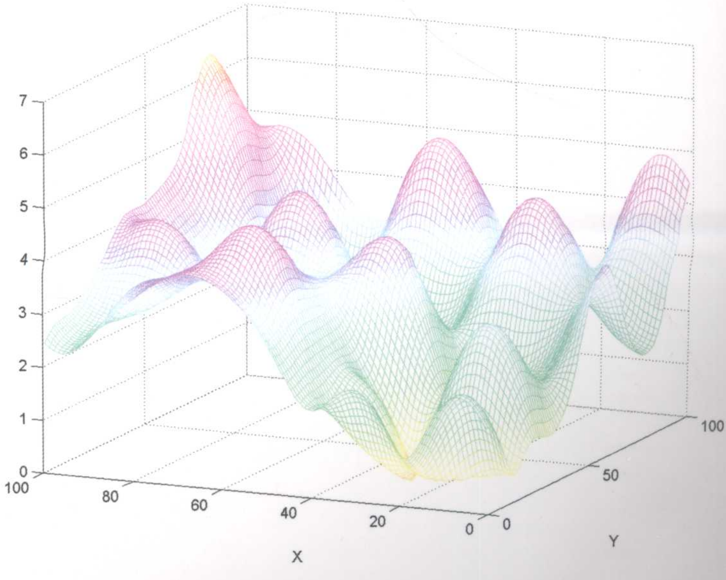


高职高专公共基础课教材系列

应用数学

YINGYONGSHUXUE

贺利敏　主编



科学出版社
www.sciencep.com

高等教育"十一五"规划教材

高职高专公共基础课教材系列

应用数学

贺利敏 主编
霍桂利 副主编
王庆云 主审

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书从夯实基础、加强应用的角度出发，精心组织教学内容，合理构建教材体系. 全书分为四篇：基础篇、拓展篇、应用篇和实践篇. 学习内容包括数学基础知识（微积分、微分方程、级数、线性代数初步）；数学在经济管理、工程技术、机电领域的应用；数学建模与数学软件.

本书在内容选择和例题编排上，注重基础，强化应用能力，遵循教学规律，循序渐进，通俗易懂. 根据教程进度配备了相当数量的与教学内容一致、利于巩固知识和提高能力的课后习题.

本书可作为高职高专理工类院校的数学教材，更适合含经济类、工程技术类、机电类专业的院校使用.

图书在版编目(CIP)数据

应用数学/贺利敏 主编. —北京：科学出版社，2009
（高等教育“十一五”规划教材·高职高专公共基础课教材系列）
ISBN 978-7-03-025160-2

Ⅰ.应… Ⅱ.贺… Ⅲ.应用数学-高等数学：技术学校-教材 Ⅳ.O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 134401 号

责任编辑：沈力匀 周 恢/责任校对：耿 耘
责任印制：吕春珉/封面设计：耕者设计工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009 年 9 月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2009 年 9 月第一次印刷 印张：23
印数：1—4 000 字数：545 400

定价：34.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈新蕾〉）
销售部电话 010-62134988 编辑部电话 010-62138017

前　言

高等职业教育作为高等教育发展中的一个类型，肩负着培养面向生产、建设、服务和管理第一线需要的高素质技能型人才的使命. 高职教育要培养学生的社会适应性，教育学生树立终身学习的理念，提高学习能力. 数学在培养学生思维方法、分析和解决问题能力以及专业课学习能力方面具有不可替代的作用. 它既是理工科院校各专业必修的工具课，又是高职学生必需的素质教育课，它将为学生进一步深造，接受终身教育打下良好的基础.

但目前高职院校数学课教学内容与其培养目标之间存在着一定的差距. 主要表现在：课程“数学味”浓厚，所学知识不能应用于解决实际问题. 因而出现了为学而学、为应付考试而学、学习目的不明确、对课程越来越不重视的尴尬局面.

本书是针对职业教育对数学课新的要求，在充分讨论课程设置意义的基础上酝酿而成. 在分析高职各专业培养方案对数学课教学内容的需求度及数学学科各单元内容的深度、广度后，提出高职数学课程模块式构成方案：数学基础知识＋专业拓展知识＋数学与专业应用＋数学建模与数学软件. 这 4 个模块的作用分别是：

（1）数学基础知识：各专业必修的共用基础，是高职阶段的通识教育. 主要讲授一元函数微积分，奠定学生的高等数学知识基础，满足知识经济对高素质技能型人才数学素质培养的需要.

（2）专业拓展知识：安排与专业课程学习和职业岗位需求密切相关的基本知识内容：如机电类专业可选学微分方程，级数，线性代数；工程类专业可选学多元函数微积分，微分方程. 这些选学内容，旨在满足本专业课程对数学知识的需要.

（3）数学与专业应用：筛选各专业与数学密切结合的典型内容分类介绍，分析问题的来源，讲解解决问题的数学思维，为学生展示数学与专业学习的密切关系，激发学生学习兴趣，培养学生利用数学工具解决专业问题的意识和能力.

（4）数学建模与数学软件：数学知识的应用领域越来越广，数学模型作为用数学语言描述现实世界的方法，在管理、工程技术、经济生活诸多领域受到极大关注. 但许多学校受课时限制，不具备独立开设数学建模与数学实验课的条件。在这种情况下，把这些内容纳入数学教学中，使学生对这一内容有所接触，接受数学建模的概念，培养独特的思维能力，为将来更好地从事创新性工作奠定知识基础.

本书除了模块化教学思路之外，还具有以下特色：

1. 难度适中，强调直观

尊重已成熟的学科体系与内容，以“夯实基础，面向应用”为原则简化理论体系，淡化定理、法则、公式的严密性和逻辑性，采用数据、图像的方法直观说明概念、定理、公式，重视数学语言和数学符号教学.

2. 突出实用，培养能力

数学知识的应用贯穿于整个教学过程中，在第 1 篇及第 2 篇以数学理论知识为主的情况下，每个概念学习之后亦安排了与概念相关的应用实例. 第 3 篇着重介绍数学知识在解决与专业有关的问题中的应用，第 4 篇主要讲解用数学模型处理常见问题的方法，强化数学应用能力.

3. 必、选结合，富有弹性

基础篇必修，拓展篇可选，既保证了数学基础的系统性，又突出了数学在专业中的实践性. 应用篇可根据课时多少对内容进行取舍.

4. 内容丰富，受益面大

与其他教材相比，本书学习内容丰富. 在课堂教学之外，学生亦可自学，是一种开放型的教学思路.

本书由富有教学经验的一线教师编写，其中霍桂利编写了第 2、3、4、5 章，赵琳编写了第 7、8、9 章，贺利敏编写了第 1、9、10、11 章，刘琨编写了第 12 章，李小磊编写了第 13 章. 贺利敏对全书进行了修改、补充和统稿总撰，王庆云对全书进行了审核.

在本书编写过程中，参考了许多近年来出版的专著、教材、论文，在此时相关作者表示衷心的感谢！鉴于数学学科渊源深远，教学需求变化很大，而编者水平有限，书中难免存在不足及错误之处，敬请读者批评指正.

目　　录

第3篇 应 用 篇

第4篇 实 践 篇

第1篇 基 础 篇

本篇导读

社会的发展离不开科技，而科技的发展又离不开数学．随着社会的发展和科技的进步，数学在各方面得到了广泛的应用，数学的内容更加丰富．但作为研究现实世界中数量关系与空间形式的数学学科，中学之前学习内容主要为初等数学，研究的数是常数或常量，研究的形是孤立不变的规则的几何形体，多用静止的、孤立的方式学习各部分内容．高等数学以函数作为研究对象，研究的数是变量，研究的形是曲线、曲面、曲边形等不规则的几何体，而且从不同角度、不同侧面，以运动的、变化的观点研究变量与变量之间的各种关系，可在更大范围内体现数学的应用．计算机之父冯·诺依曼说过：微积分是近代数学中最伟大的成就，对它的重要性无论作怎样的估计都不会过分．

本篇作为高职学生高等数学的通识教育，主要内容为一元函数微积分中6大概念及其关系运算．6大概念分别来自于不同的问题，彼此之间又有密切的联系．通过这部分内容的学习，要求学生掌握基本概念、基本运算，初步具备用数学思想、概念、方法消化吸收工程概念及原理的能力，为后续课程的学习打好基础．

极限是贯穿本篇最基本的概念，它也是解决问题的一种重要的思想及方法．借助极限，重点研究微积分两类基本问题：

（1）变化率问题．以计算变速直线运动的瞬时速度及曲线切线斜率为代表．

（2）量的累积问题．以计算曲边梯形面积及变速直线运动的路程为代表．

解决这些问题，不能应用已有的知识，这时就要进行转化．转化的方式主要有“以直代曲”、“以均匀代替不均匀”、“以有限代替无限”，可概括为“以不变代变”，先求得近似值，再通过求极限得到精确值．

提到数学，首先给人的感觉就是太抽象，以至于不愿学，不敢学．其实抽象性是许多学科都具有的特征，只是数学比其他学科更多地使用符号、公式、结构，并按照逻辑的方式组织起来．化数学的抽象为不抽象，要着重理解并体会数学的研究对象是“形式化的思想材料”，即人们从现实世界中获得“数”和“形”的认识之后，即把现实的形态“暂时放在一边”，只对抽象的“数”和“理想化的形”进行研究．这意味着每一个微积分概念的背后都有其产生的现实依据，都是具体问题的反映．基于这样的认识，学习中就要按照“形式化的思想材料”的特点分析思考问题，理解数学概念的实质，找到问题域与数学域之间的对应关系，自觉地进行问题域到数学符号之间的转换，逐步掌握把实际问题转化为数学问题并加以求解的技能．

除了抽象性，数学的另一特征即为广泛应用性．广泛应用性其实就是抽象性的推论：因为抽象，因而就应用很广泛．这一特点足以增强我们学数学、用数学的决

心. 所以，我们要加倍注意体会数学概念的来龙去脉，理解其所反映问题的实质，为何用数学，哪儿用数学，如何用数学. 如果能做到按这样的理念学数学，而不是单纯的记公式、记定理，数学的学习才会变得有趣、高效，也才能真正做到学以致用.

第 1 章　函数　极限　连续

函数是高等数学的研究对象. 极限是最重要、最基础的一个概念. 高等数学中的许多概念都是用极限方法来研究的，借助极限，我们才能对自然科学中所遇到的许多具体的量给出完善而详尽的定义. 本章将介绍函数、极限以及函数连续性的有关问题，为进一步学习一元函数微积分奠定基础.

1.1　函　　数

1.1.1　函数概念

在研究自然现象和工程技术时，往往有几个变量在同时变化着，函数概念是刻画变量与变量之间关系的最基本的数学描述. 下面在中学函数概念的基础上再做一些必要的拓展.

1. 一元函数与多元函数

引例 1.1　将直径为 d 的圆木锯成截面为矩形的木材，则矩形截面的两条边长 x 和 y 之间存在关系式

$$y=\sqrt{d^2-x^2}\quad (0<x<d).$$

引例 1.2　在边长为 a 的正方形铁皮四周各剪去一个边长为 x 的小正方形，然后将四边折起围成一个无盖的盒子，则盒子容积 V 与截去的小正方形边长 x 之间存在关系式

$$V=x(a-2x)^2\quad \left(0<x<\frac{a}{2}\right).$$

引例 1.1 和引例 1.2，反映了两个变量之间的对应关系，即给定一个变量 x 的取值，另一个变量 y（或 V）有确定的值与其对应，称这样的函数关系为一元函数，其中 x 称为自变量，y（或 V）称为因变量或函数. 一般地，只含一个自变量的函数称为**一元函数**. 以 x 为自变量，y 为函数的一元函数通常表示为 $y=f(x)$.

许多自然现象和实际问题中还常常遇到多个变量之间的依赖关系，例如，

引例 1.3　矩形面积 S 依赖于边长 x，y，关系式为 $S=xy$.

引例 1.4　电流所产生的热量 Q 与电压 E、电流 I 以及时间 T 之间有关系式 $Q=IET$.

引例 1.3 中，给定 x，y 的一组取值，则有确定的 S 与其对应，x，y 称为自变量，S 称为关于 x，y 的**二元函数**. 引例 1.4 中，给定 E，I，T 的一组取值，则有确定的 Q 与其对应，Q 称为关于 E，I，T 的**三元函数**.

一般地，含有 n 个自变量的函数称为 **n 元函数**. 若给定 x_1，x_2，…，x_n 的一组取值，通过对应关系 f，u 有确定的值与其对应，则称 u 为关于 x_1，x_2，…，x_n 的 n 元函数，记为

$$u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n).$$

n 元函数反映 $n+1$ 个变量之间的对应关系，称 x_1，x_2，…，x_n 为自变量，u 为因变量或函数.

二元及二元以上函数统称为**多元函数**. 自变量的取值范围称为函数的定义域，通常用 D 表示.

2. 单值函数与多值函数

如果对于 D 中的每一个或一组自变量取值，都只有唯一的因变量与其对应，那么这种函数称为**单值函数**，否则称为**多值函数**.

例如，$y=3x-1$，在 $(-\infty, +\infty)$ 中任给 x 的一个取值，y 按照 $3(\quad)-1$ 这种对应法则，有唯一确定的值与其对应，称 y 为 x 的一元单值函数.

而对于关系式 $x^2+y^2=25$，在 $[-5, 5]$ 中给定 x 的一个取值，y 按照 $\pm\sqrt{25-(\quad)^2}$ 这种对应法则，有确定的值与其对应，但不唯一，称 y 为 x 的一元多值函数.

又如，$z=x^2+y^3$，其定义域为 $D=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$，在 D 中任给一有序数对 (x, y) 的取值，z 按照 $(\quad)^2+[\quad]^2$ 这种对应法则，有唯一确定的值与其对应，称 z 为 x，y 的二元单值函数.

而对于关系式 $x^2+y^2+z^2=25$，其定义域为 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 25\}$，在 D 中任给一有序数对 (x, y) 的取值，z 按照 $\pm\sqrt{25-(\quad)^2-[\quad]^2}$ 这种对应法则，有确定的值与其对应，但不唯一，称 z 为 x，y 的二元多值函数.

3. 显函数与隐函数

形如 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的函数直接反映自变量与因变量之间的关系，称这种函数为**显函数**.

如果自变量与因变量之间的关系由方程 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n,u)=0$ 所确定，称这种函数为**隐函数**.

例如，$y=3x-1$ 明显反映变量 y 是 x 的函数，这是一个显函数.

而对于关系式 $x^2+y^2=25$，y 与 x 的函数关系是由方程所确定的，这是一个隐函数.

说明：本章如不特别强调，研究的主要是一元单值函数，其他类型的函数在后续课程中有相应讨论.

1.1.2 初等函数及分段函数

1. 基本初等函数

中学阶段学过的幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数统称为**基本**

初等函数.

即 幂函数 $y=x^a$，a 为常数.

指数函数 $y=a^x$，$a>0$，$a\neq1$.

对数函数 $y=\log_a^x$，$a>0$，$a\neq1$.

三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$.

反三角函数 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$.

这些函数是进一步学习各部分内容的基础，要熟悉它们的定义式、性质与图形.

2. 复合函数

假设有两个函数 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，如果 $u=\varphi(x)$ 的值域与 $y=f(u)$ 的定义域交集非空，将 $u=\varphi(x)$ 代入 $y=f(u)$，则得到 $y=f[\varphi(x)]$，这种运算称为复合运算，得到的函数称为**复合函数**.

其中 u 称为中间变量，也称 $y=f(u)$ 为外函数，$u=\varphi(x)$ 为内函数.

复合函数的概念可以推广到多个中间变量的情形.

例 1.1 确定 $y=\ln\cos x$，$y=e^{\arctan\frac{1}{x}}$ 是由哪些基本初等函数复合而成的.

解 $y=\ln\cos x$ 是由 $y=\ln u$，$u=\cos x$ 复合而成的.

$y=e^{\arctan\frac{1}{x}}$ 是由 $y=e^u$，$u=\arctan v$，$v=\dfrac{1}{x}$ 复合而成的.

正确分析复合函数的构成，是掌握微积分运算的关键. 对复合函数进行分解，分解方法为从外往里，逐层拆脱，结果要求为基本初等函数及它们与常数的和、差、积、商.

例 1.2 指出下列函数的复合过程.

(1) $y=\cos^2x$. (2) $y=\sqrt{x^3-2x^2+5}$. (3) $y=\sqrt{\log_a(\sin x+2^x)}$.

解 (1) $y=\cos^2x$ 是由 $y=u^2$，$u=\cos x$ 复合而成.

(2) $y=\sqrt{x^3-2x^2+5}$ 是由 $y=\sqrt{u}$，$u=x^3-2x^2+5$ 复合而成.

(3) $y=\sqrt{\log_a(\sin x+2^x)}$ 是由 $y=\sqrt{u}$，$u=\log_a v$，$v=\sin x+2^x$ 复合而成.

注意：并非任意两个函数都能构成复合函数. 复合的条件是内函数的值域与外函数的定义域有公共部分，如 $y=\arcsin(x^2+2)$ 没有意义.

例 1.3 设 $f(x)=x^3$，$g(x)=\ln x$，求 $f[g(x)]$，$g[f(x)]$，$f[f(x)]$，$g[g(x)]$.

分析 $f(x)=x^3$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(-\infty,+\infty)$；$g(x)=\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，值域为 $(-\infty,+\infty)$. 两个函数的值域与定义域彼此的交集均为非空，可以构成复合函数.

解 $f[g(x)]=[g(x)]^3=(\ln x)^3$；

$g[f(x)]=\ln f(x)=\ln x^3$；

$f[f(x)]=[f(x)]^3=(x^3)^3=x^9$；

$g[g(x)]=\ln g(x)=\ln\ln x$.

3. 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算及有限次复合步骤构成，并且可用一个式子表示的函数称为初等函数. 例如，$y=\sin^n x+\sin x^n$，$y=\lg(\arctan\sqrt{1+x^2})$都是初等函数.

4. 分段函数

在自变量不同的取值范围内用不同式子表示的函数称为**分段函数**.

例如，
$$f(x)=\begin{cases}x-1, & x>0\\ 0, & x=0\\ x+1, & x<0\end{cases}.$$

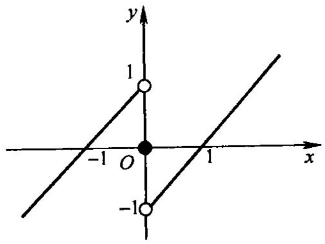


图 1.1

分段函数是定义域上的一个函数，不要理解为多个函数. 其定义域为自变量各个取值范围的并集；求函数值时要搞清自变量的取值范围；作图时尽管要分段来作，但一定要位于同一个坐标系内.

如上例中函数定义域为（$-\infty$，$+\infty$），而 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$，$f(-2)=-2+1=-1$，函数图像如图 1.1 所示 .

绝大多数分段函数不是初等函数，只有个别例外.

例如，$y=\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$是初等函数. 而 $y=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1+x, & x>1\end{cases}$，由于表达式不能用一个式子表示，不是初等函数.

与一元初等函数类似，多元初等函数可定义为由变量 x，y 等的基本初等函数经过有限次四则运算及有限次复合运算构成，并可用一个式子表示的函数.

例如，$z=x^3y-6xy^3$，$z=\sin^2(ax+by)$，$z=f(x+y,xy)$，其中 $z=\sin^2(ax+by)$ 可看成是由 $z=u^2$，$u=\sin v$，$v=ax+by$ 复合而成；$z=f(x+y,xy)$ 可看成由 $z=f(u,v)$，$u=x+y$，$v=xy$ 复合而成.

习题 1.1

1. 求下列函数定义域.

(1) $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-|x|}}$.　　(2) $y=\lg\dfrac{1}{1-x}+\sqrt{x+2}$.

(3) $y=\arcsin\dfrac{x-2}{3}$.　　(4) $z=\ln(1-x^2-y^2)$.

2. 指出下列函数的复合过程.

(1) $y=(2-3x)^{\frac{1}{2}}$.　　(2) $y=\tan(1+4x^2)^3$.

(3) $y=\lg(\arctan\sqrt[3]{1+x^2})$.　　(4) $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

3. 做出函数 $y=\begin{cases}x+1, & -4\leqslant x<0\\ 0, & x=0\\ x^2, & 0<x\leqslant 2\end{cases}$ 的图像，并求：

(1) 函数定义域. (2) $f(-3)$，$f\left(\frac{1}{2}\right)$及 $f(0)$.

4. 某运输公司规定 1t 货物的运价为：在 $a$km 以内，k 元/km；超过 $a$km，超过部分每千米运价为$\frac{4}{5}k$，试求 1t 货物运价和路程之间的函数关系.

5. 有一个底半径为 R，高为 H 的圆锥形量杯，为了在它的侧面刻上表示容积的刻度，需要找出溶液的容积与其对应高度之间的函数关系，试写出表达式，并指明定义域.

6. 建筑一个容积为 8000m^3，深为 6m 的长方体蓄水池，池壁每平方米的造价为 15 元，池底每平方米的造价为 30 元，把总造价 y（元）表示为水池的长 x(m)的函数，并求出函数的定义域.

1.2　函数极限

先考察这样一个事实：若用 S 表示圆的面积，S_n 表示圆内接正 n 边形的面积，显然当边数 n 无限增加时，面积 S_n 就无限趋近于圆的面积 S（图 1.2).

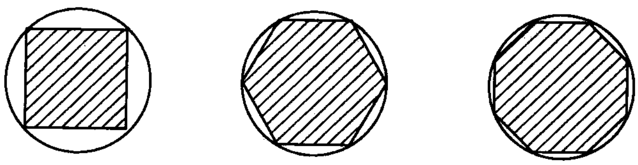


图 1.2

在现实生活中有这样一类变量，它们在无限变化的过程中，逐渐趋于一种稳定的状态，即趋近于某一常量. 变量变化的这种过程，称为极限过程，相应的常量称为变量的极限.

一般地，极限概念研究在自变量的某个变化过程中函数有无确定的变化趋势. 具体来讲，如果在自变量的某一变化过程中，函数值能无限接近于一个确定的常数，那么这个常数就叫做在自变量这一变化过程中函数的极限. 下面将针对不同函数在自变量不同变化过程中的变化趋势问题分别加以讨论.

1.2.1 数列极限

定义 1.1 对于数列$\{x_n\}$，如果当项数无限增大时，数列各项能无限接近于一个确定的常数A，则称A为数列$\{x_n\}$的极限，也称数列$\{x_n\}$收敛于A，记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n = A \quad (x_n \to A, n \to \infty).$$

否则称数列无极限，也称数列是发散的.

例 1.4 确定当项数无限增大时，下列数列的极限.

(1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$.　　(2) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots$.

(3) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots$.　　(4) $3, 5, 7, \cdots, 2n+1, \cdots$.

(5) $1, -1, 1, -1, \cdots, (-1)^{n+1}, \cdots$.

解 (1) 随着项数n无限增大，数列各项取值越来越接近于0，故$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

(2) 随着项数n无限增大，数列各项取值越来越接近于0，故$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$.

(3) 随着项数n无限增大，数列各项取值越来越接近于1，故$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$.

(4) 随着项数n无限增大，数列各项取值越来越大，不能接近于确定的常数，故数列无极限，即$\lim\limits_{n\to\infty}(2n+1)$不存在.

(5) 随着项数n无限增大，数列各项取值在-1与1之间来回跳动，不能接近于一个确定的常数，故数列无极限，即$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n+1}$不存在.

由此可见，数列发散有两种情形：

(1) 随着项数增大，数列各项的值无限增大或无限减小.

(2) 随着项数增大，数列各项接近于几个而不是一个确定的常数.

例 1.5 一根长度为a的木棍，第一次截去$\frac{1}{2^2}$，第二次截去剩余部分的$\frac{1}{3^2}$，第三次截去剩余部分的$\frac{1}{4^2}$，…如此继续下去，最后木棍剩余多长？

解 先考察按照截取方式，木棍长度的变化情况. 记录木棍每天的剩余量x_i，可得到如下数列：

$$x_1 = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)a,$$

$$x_2 = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)a,$$

$$x_3 = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)a,$$

$$\cdots$$

$$x_n = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)a$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)a$$

…

可以确定$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}a$.

即随着天数无限增大，木棍长度越来越接近$\frac{1}{2}a$，即木棍最后剩余量为$\frac{1}{2}a$.

例 1.6　化下列无限循环小数为分数：$0.\dot{7}$，$2.7\dot{5}\dot{4}$.

解　无限循环小数 $0.\dot{7}=0.7+0.07+0.007+\cdots$是由无穷多项相加构成，如何求无穷多项的和，下面采用一种从有限到无限的转化思想，即先求出和式中前 n 项的和

$$S_n=\frac{0.7(1-0.1^n)}{1-0.1},$$

再考察随着 n 无限增大，S_n 的变化趋势. $0.\dot{7}$与 S_n 的关系为：n 无限增大，S_n 无限接近于 $0.\dot{7}$. 因此如果$\{S_n\}$有极限，极限值即为 $0.\dot{7}$的精确值.

因为
$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{0.7(1-0.1^n)}{1-0.1}=\frac{7}{9},$$

所以
$$0.\dot{7}=0.7+0.07+0.007+\cdots=\lim_{n\to\infty}\frac{0.7(1-0.1^n)}{1-0.1}=\frac{7}{9}.$$

类似地，

$$2.7\dot{5}\dot{4}=2.7+0.054+0.00054+0.0000054+\cdots=\frac{27}{10}+\lim_{n\to\infty}\frac{0.054(1-0.01^n)}{1-0.01}$$
$$=\frac{27}{10}+\frac{54}{990}=\frac{303}{110}.$$

1.2.2　函数的极限

对于一般函数 $y=f(x)$，自变量 x 在实数范围内取值，研究函数的变化趋势总体分为两类：

(1) $|x|$无限增大，函数 $y=f(x)$的极限.

(2) x 无限接近于一个有限值 x_0 时，函数 $y=f(x)$的极限.

1. $|x|$ 无限增大，函数 $y=f(x)$的极限

定义 1.2　如果当$|x|$无限增大时，函数 $y=f(x)$能无限接近于一个确定的常数 A，则称 A 为$|x|$无限增大时函数 $y=f(x)$的极限，记做

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\quad(f(x)\to A,x\to\infty).$$

例如，$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$；而函数 $y=2x$ 当 $x\to\infty$时绝对值无限增大，因而$\lim\limits_{x\to\infty}2x$ 不存在.

函数 $y=\sin x$ 当 $x\to\infty$时取值不能趋向于一个确定的常数，因而$\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ 不存在.

事实上，$|x|$无限增大可细划为 3 种情形：

(1) x 无限增大，$|x|$无限增大，可记为 $x\to+\infty$.