# 计算方法

## 典型题分析解集

（第2版）

封建湖　车刚明　编

西北工业大学出版社

# 计算方法典型题分析解集

（第2版）

封建湖　车刚明　编



西北工业大学出版社

【内容简介】 本书主要为理工科大学本专科学生、研究生学习“数值计算方法”而编写的。内容包括：函数插值、函数逼近、数值积分与数值微分、方程求根、线性代数方程组的直接与迭代解法、矩阵特征值与特征向量的计算、常微分方程初值问题的数值解法等方面的典型习题的解题思路、分析与求解方法。

本书也可作为应用数学专业本科生和数学系其它专业学生学习计算方法课程时的参考书。


计算方法典型题分析解集

（第2版）

封建湖　车刚明　编

责任编辑　郑永安

责任校对　耿明丽

*



（邮编：710072　西安市友谊西路127号　电话：8491147）

全国各地新华书店经销

西北工业大学出版社印刷厂印装

ISBN 7-5612-1072-8/O·147

*

开本：850×1 168 毫米 1/32　印张：8.625　字数：208千字

1998年8月第1版　　2001年4月第2版第5次印刷

印数：22 001—32 000册　定价：11.00元


购买本社出版的图书，如有缺页、错页的，本社发行部负责调换。

# 第2版前言

本书第1版自1998年8月问世以来，得到了广大读者朋友的热情支持和关爱。本次修订再版时，我们对第1版中的一些错误和论述不妥当之处做了修改、订正；对个别题目进行了调整，并增加了一些典型题；最后附加了四套模拟考试题，其中两套供工科研究生使用，两套供工科本科生使用。这四套题目的简要解答也附于书后，供读者朋友对照使用。

由于作者水平有限，书中难免会有错误或不妥之处，恳请读者批评指正。

编　者

2000年8月

# 前　言

随着电子计算机的广泛普及与使用，“数值计算方法”已成为高等院校理工科各专业本专科学生的必修课，也是不少数学系以外的理工科硕士研究生的必修课。为了有效地帮助广大学生学好“数值计算方法”课程的基本理论和解题方法，我们根据多年的教学经验编写了本书。

全书共有八章。第一章为代数插值，包括拉格朗日插值、牛顿插值、埃尔米特插值以及三次样条插值；第二章函数逼近，主要涉及最佳一致逼近、最佳平方逼近、数据的曲线拟合以及正交多项式、最小二乘法等内容；第三章是数值积分与数值微分，重点放在数值积分上，内容包括牛顿-柯特斯求积公式、龙贝格求积方法以及高斯型求积公式；方程求根是第四章的内容，涉及二分法、简单迭代法、牛顿迭代法、弦割法及抛物线法等；第五章是线性代数方程组的直接解法；第六章是线性代数方程组的迭代解法，主要讨论了简单迭代法（雅可比法作为特例处理）、高斯-赛德尔迭代法和超松弛迭代法及其收敛性讨论；第七章是矩阵的特征值与特征向量的计算，包括乘幂法与反幂法、雅可比法、QR 方法及二分法等内容；第八章是常微分方程初值问题的数值解法，单步法主要涉及欧拉法及其变形、龙格-库塔法，多步法涉及到阿达姆斯法。对误差估计和稳定性也作了讨论。

每章一开始都给出了内容提要，以便统一记号和概念。然后对该章所涉及到的方法逐一给出数值算例，对所涉及的理论证明题，也用不少例题作了示范处理。除少量习题因意思清楚，方法确定而未给出分析外，大部分习题在解答之前都给出了分析。全

书共精选了近200道题，其中有的题目采用一题多解，以帮助读者掌握解题的思路和技巧，加深对所学内容的理解。为了加深理解，每章后均给出一定量的习题。

本书第一、二、三、四、七章由封建湖执笔，第五、六、八章由车刚明执笔，最后由封建湖、车刚明共同定稿。

限于水平，错误和不妥之处在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

1998年2月

# 目　录

# 第一章　代数插值

## 一、内 容 提 要

1. 设 $y=f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数，已知它在 $[a,b]$ 上 $n+1$ 个互异点 $\{x_i\}_{i=0}^n$ 上取值 $\{y_i\}_{i=0}^n$，若代数多项式 $P(x)$ 在点 $x_i$ 处满足 $P(x_i)=y_i$，$i=0,1,2,\cdots,n$，则称 $P(x)$ 为函数 $f(x)$ 的插值多项式，$\{x_i\}_{i=0}^n$ 为插值节点．

满足上述条件的次数不超过 $n$ 的多项式 $P_n(x)$ 是存在且惟一的．

常用的代数插值公式有：拉格朗日型

$$P_n(x)=\sum_{j=0}^n l_j(x)y_j=\sum_{j=0}^n\left(\prod_{\substack{i=0\\i\neq j}}^n\frac{x-x_i}{x_j-x_i}\right)y_j$$

和牛顿型公式

$$\begin{aligned}P_n(x)=\;&f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+\\&f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\cdots+\\&f[x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})\end{aligned}$$

插值余项为

$$\begin{aligned}R_n(x)=\;&f[x,x_0,\cdots,x_n]\omega_{n+1}(x)=\\&\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)\omega_{n+1}(x)\end{aligned}$$

其中 $\omega_{n+1}=\prod_{i=0}^n(x-x_i)$，$\xi\in(a,b)$.

2. 埃尔米特插值公式为

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j(x) y_j + \sum_{j=0}^{n} \beta_j(x) y'_j$$

其中

$$\alpha_j(x) = \left[1 - 2(x - x_j)\sum_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{n} \frac{1}{x_j - x_i}\right] l_j^2(x) =$$

$$[1 - 2(x - x_j) l'_j(x_j)] l_j^2(x)$$

$$\beta_j(x) = (x - x_j) l_j^2(x), \quad j = 0, 1, 2, \cdots, n$$

$l_j(x)$ 的表达式同拉格朗日型公式中的基函数．插值余项为

$$R_{2n+1}(x) = \frac{1}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi) \omega_{n+1}^2(x)$$

3. 三次样条插值多项式，详见参考文献 1,2,5 等．

## 二、典型题分析

**例 1－1** 已知 $\sin 0.32 = 0.314\ 567$，$\sin 0.34 = 0.333\ 487$，$\sin 0.36 = 0.352\ 274$，用线性插值及抛物插值计算 $\sin 0.336\ 7$ 的值并估计截断误差．

**分析** 题目中相当于告诉了插值条件．考虑到 0.336 7 位于 0.32 与 0.34 之间，根据插值法的特点，线性插值时，应取 0.32 和 0.34 作为插值节点；抛物插值时，三个点全取．由于一次、二次插值函数表达式较简单，可采用牛顿型公式，误差估计用拉格朗日型余项表达式．

**解** 用线性插值计算，$x_0 = 0.32$，$x_1 = 0.34$，则

$$\sin 0.336\ 7 \approx P_1(0.336\ 7) =$$

$$y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(0.336\ 7 - x_0) =$$

$$0.314\ 567 + \frac{0.333\ 487 - 0.314\ 567}{0.34 - 0.32} \times$$

$$(0.336\ 7 - 0.32) = 0.330\ 365$$

其截断误差限为

$$|R_1(x)| = \left|\frac{1}{2}(\sin x)''|_{x=\xi}(x-x_0)(x-x_1)\right| \leqslant$$

$$\frac{1}{2}M_2|(x-x_0)(x-x_1)|$$

其中 $M_2 = \max\limits_{x_0 \leqslant x \leqslant x_1} |(\sin x)''| = \sin x_1 \leqslant 0.333\ 5$，于是

$$|R_1(0.336\ 7)| = |\sin 0.336\ 7 - P_1(0.336\ 7)| \leqslant$$

$$\frac{1}{2} \times 0.333\ 5 \times |(0.336\ 7 - 0.32) \times$$

$$(0.336\ 7 - 0.34)| \leqslant 0.92 \times 10^{-5}$$

用抛物插值计算，有

$$P_2(0.336\ 7) = P_1(0.336\ 7) +$$

$$\left[\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} - \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\right)/(x_2-x_0)\right]\times$$

$$(0.336\ 7 - x_0)(0.336\ 7 - x_1) =$$

$$0.330\ 365 + \frac{0.939\ 35 - 0.946}{0.04} \times$$

$$0.016\ 7 \times (-0.003\ 3) = 0.330\ 374$$

其截断误差限为

$$|R_2(x)| \leqslant \frac{1}{3!}M_3|(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)|$$

其中 $M_3 = \max\limits_{x_0 \leqslant x \leqslant x_2} |f'''(x)| = \cos x_0 < 0.950$，于是

$$|R_2(0.336\ 7)| = |\sin 0.336\ 7 - P_2(0.336\ 7)| \leqslant$$

$$\frac{1}{6} \times 0.950 \times 0.016\ 7 \times 0.003\ 3 \times$$

$$0.023\ 3 < 0.203 \times 10^{-6}$$

**注** $P_2(0.336\ 7) = 0.330\ 374$ 与具有六位有效数字的正弦函数表完全一样，说明用二次插值精度已相当高了．

**例 1－2** 已知函数 $f(x)$ 的函数表如下：

| $x_i$ | 0.40 | 0.55 | 0.65 | 0.80 | 0.90 | 1.05 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 0.410 75 | 0.578 15 | 0.696 75 | 0.888 11 | 1.026 52 | 1.253 82 |

求四次牛顿插值多项式，并由此求 $f(0.596)$ 的近似值.

**分析** 表中给出六对数据，故最高可构造五次多项式. 但由于 0.596 接近于 $x_0=0.40$，因此可取前五对数据来做差商表.

**解** 构造差商表如下：

| $x_i$ | $f(x_i)$ | 一阶差商 | 二阶差商 | 三阶差商 | 四阶差商 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.40 | 0.410 75 | | | | |
| 0.55 | 0.578 15 | 1.116 00 | | | |
| 0.65 | 0.696 75 | 1.186 00 | 0.280 00 | | |
| 0.80 | 0.888 11 | 1.275 73 | 0.358 93 | 0.197 33 | |
| 0.90 | 1.026 52 | 1.384 10 | 0.433 48 | 0.213 00 | 0.031 34 |

故四次牛顿插值多项式为

$$
\begin{aligned}
P_4(x) = {} & 0.410\,75 + 1.116\,00(x-0.4) + \\
& 0.280\,00(x-0.4)(x-0.55) + \\
& 0.197\,33(x-0.4)(x-0.55)(x-0.65) + \\
& 0.031\,34(x-0.4)(x-0.55) \times \\
& (x-0.65)(x-0.80)
\end{aligned}
$$

于是 $f(0.596) \approx P_4(0.596) = 0.631\,95$.

**例 1-3** 已知 $\sin x$ 的函数表如下：

| $x_k$ | 1.566 | 1.567 | 1.568 | 1.569 | 1.570 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin x_k$ | 0.999 988 5 | 0.999 992 8 | 0.999 996 1 | 0.999 998 4 | 0.999 999 7 |

求满足 $\sin x = 0.9999950$ 的 $x$ 值(真解为 $x = 1.5676340$).

**分析** 一般情况下,已知$(x_i, f(x_i))$,求某一 $x$ 处 $f(x)$ 的近似值,这是所谓的插值问题. 本题是求满足 $f(x) = \sin x = 0.9999950$ 的 $x$ 值,与原插值问题刚好相反. 如果求出 $P_n(x)$,令 $P_n(x)$ 等于某一函数值,需通过解方程求 $x$. 若将 $x_k$ 作为函数值,把 $\sin x_k$ 作为自变量,求出插值多项式 $P_n(y)$,求 $P_n(y)$ 的函数值 $x$ 比解方程要容易得多. 这类问题称为“反插值”. 用反插值时必须注意反插条件,即函数 $y = f(x)$ 有反函数,也就是要求 $y = f(x)$ 单调. 本题中数表单调,故可用反插值求 $x$.

**解** 用牛顿插值公式,先构造差商表如下:

| $k$ | $y_k$ | $x_k$ | 一阶差商 | 二阶差商 | 三阶差商 | 四阶差商 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.999 988 5 | 1.566 | | | | |
| 1 | 0.999 992 8 | 1.567 | 232.558 14 | | | |
| 2 | 0.999 996 1 | 1.568 | 303.030 30 | 9 272 652.6 | | |
| 3 | 0.999 998 4 | 1.569 | 434.782 61 | 23 527 198.2 | $1.4398531 \times 10^{12}$ | |
| 4 | 0.999 999 7 | 1.570 | 769.230 77 | 92 902 266.7 | $1.0054358 \times 10^{13}$ | $7.6915223 \times 10^{17}$ |

故

$$
\begin{aligned}
x \approx\ & 1.566 + 232.55814 \times (0.9999950 - y_0) + \\
& 9272652.6 \times (0.9999950 - y_0) \times \\
& (0.9999950 - y_1) + 1.4398531 \times 10^{12} \times \\
& (0.9999950 - y_0)(0.9999950 - y_1) \times \\
& (0.9999950 - y_2) + 7.6915223 \times 10^{17} \times \\
& (0.9999950 - y_0)(0.9999950 - y_1) \times \\
& (0.9999950 - y_2)(0.9999950 - y_3) \approx 1.5676241
\end{aligned}
$$

**注** 本题也可不用所有已知插值条件来求解. 若取 $x_0 = 1.567$, $x_1 =$

1.568 用线性插值，可得满足 $\sin x = 0.999\ 995\ 0$ 的 $x$ 的近似值 $x \approx 1.567\ 666\ 7$；若取 $x_0 = 1.567$，$x_1 = 1.568$，$x_2 = 1.569$，也可得二次方程 $-0.5x^2 + 1.570\ 8x - 0.233\ 706\ 3 = 0.999\ 995\ 0$，解得 $x' \approx 1.567\ 63$，$x'' \approx 1.573\ 97$，因待取之 $x$ 应满足 $1.567 < x < 1.568$，故取 $x' \approx= 1.567\ 63$ 即可．可以看出，正插时不仅要解方程，而且还要考虑根的范围而进行取舍．

**例 1－4**　给出 $f(x) = \ln x$ 的数值表

| $x$ | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\ln x$ | －0.916 291 | －0.693 147 | －0.510 826 | －0.356 675 | －0.223 144 | －0.105 361 |

(1) 用线性插值及二次插值计算 ln0.54 的近似值；

(2) 用牛顿后插公式求 ln0.78 的近似值，并估计误差．

**分析**　本题(1) 属常规题，可用拉格朗日公式去做；第(2) 小题属等距节点的牛顿向后插值问题．

**解**　(1) 线性插值，取 $x_0 = 0.5$，$x_1 = 0.6$，则

$$\ln 0.54 \approx \frac{0.54 - 0.60}{0.5 - 0.60}(-0.693\ 147) + \frac{0.54 - 0.5}{0.60 - 0.5}(-0.510\ 826) = -0.620\ 219$$

二次插值，取 $x_0 = 0.5$，$x_1 = 0.6$，$x_2 = 0.7$，得

$$\begin{aligned}\ln 0.54 = {} & \frac{(0.54 - 0.6)(0.54 - 0.7)}{(0.5 - 0.6)(0.5 - 0.7)} \times (-0.693\ 147) + \\ & \frac{(0.54 - 0.5)(0.54 - 0.7)}{(0.6 - 0.5)(0.6 - 0.7)} \times (-0.510\ 826) + \\ & \frac{(0.54 - 0.5)(0.54 - 0.6)}{(0.7 - 0.5)(0.7 - 0.6)} \times (-0.356\ 675) = \\ & -0.616\ 838\ 2\end{aligned}$$

**注**　若取 $x_0 = 0.4$，$x_1 = 0.5$，$x_2 = 0.6$，则 $\ln 0.54 \approx -0.615\ 319\ 8$.

(2) 列向后差分表如下：

| $x_i$ | $y_i$ | $\nabla$ | $\nabla^2$ | $\nabla^3$ | $\nabla^4$ | $\nabla^5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.4 | −0.916 291 | | | | | |
| 0.5 | −0.693 147 | 0.223 144 | | | | |
| 0.6 | −0.510 826 | 0.182 321 | −0.040 823 | | | |
| 0.7 | −0.356 675 | 0.154 151 | −0.028 170 | 0.012 653 | | |
| 0.8 | −0.223 144 | 0.133 531 | −0.020 620 | 0.007 550 | −0.005 103 | |
| 0.9 | −0.105 361 | 0.117 783 | −0.015 748 | 0.004 872 | −0.002 678 | 0.002 425 |

由牛顿后插公式

$$P_n(x_n + th) = f_n + t\nabla f_n + \frac{1}{2!}t(t+1)\nabla^2 f_n + \cdots + \frac{1}{n!}t(t+1)\cdots(t+n-1)\nabla^n f_n$$

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}t(t+1)\cdots(t+n)h^{n+1}f^{(n+1)}(\xi), \quad x_0 < \xi < x_n$$

取 $x_0 = 0.4$，$x_1 = 0.5$，$x_2 = 0.6$，$x_3 = 0.7$，$x_4 = 0.8$. 由于 $x = x_n + th$,所以 $t = (0.78 - 0.8)/0.1 = -0.2$,故

$$\begin{aligned}\ln 0.78 \approx P_4(0.78) = &-0.223\,144 + 0.133\,531 \times (-0.2) + \\ &\frac{1}{2!}(-0.2)(-0.2+1)(-0.020\,620) + \\ &\frac{1}{3!}(-0.2)(-0.2+1)(-0.2+2)(0.007\,550) + \\ &\frac{1}{4!}(-0.2)(-0.2+1)(-0.2+2) \times \\ &(-0.2+3) \times (-0.005\,103) \approx -0.248\,391\,54\end{aligned}$$

利用插值余项 $R_4(x) = \frac{1}{5!}f^{(5)}(\xi)t(t+1)\cdots(t+4)h^5$,得

$$|R_4(0.78)| \leqslant \frac{1}{5!}|t(t+1)\cdots(t+4)|h^5 \max_{x_0\leqslant x\leqslant x_4}|f^{(4)}(x)| \leqslant$$

$$\frac{1}{5!}0.1^5 \cdot |(-0.2)(-0.2+1)(-0.2+2)\times$$

$$(-0.2+3)(-0.2+4)| \times \frac{4!}{0.4^5} =$$

$$5.985\times 10^{-4}$$

**例 1-5** 给出自然对数 $\ln x$ 和它的导数$\dfrac{1}{x}$的数表如下：

| $x$ | 0.40 | 0.50 | 0.70 | 0.80 |
|---|---|---|---|---|
| $\ln x$ | −0.916 291 | −0.693 147 | −0.356 675 | −0.223 144 |
| $1/x$ | 2.50 | 2.00 | 1.43 | 1.25 |

(1) 利用拉格朗日插值公式求 ln0.60；

(2) 利用埃尔米特插值公式求 ln0.60.

**分析** 本题属常规题，可用有关插值公式来求 ln0.60. 由于埃尔米特公式中含有插值基函数 $l_j(x)$ 及 $l_j'(x)$，故可先列表计算有关量后，再代入公式求解.

**解** 列表计算 $l_j(0.60)$，$l_j'(0.60)$，$j=0,1,2,3$，如下：

| $j$ | $l_j(x)$ | $l_j(0.6)$ | $l_j'(x_j)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | $\prod\limits_{\substack{i=0\\i\neq 0}}^{3}\dfrac{x-x_i}{x_0-x_i}$ | −0.166 667 | $\sum\limits_{\substack{i=0\\i\neq 0}}^{3}\dfrac{1}{x_0-x_i}=-15.833\,333$ |
| 1 | $\prod\limits_{\substack{i=0\\i\neq 1}}^{3}\dfrac{x-x_i}{x_1-x_i}$ | 0.666 667 | $\sum\limits_{\substack{i=0\\i\neq 1}}^{3}\dfrac{1}{x_1-x_i}=1.666\,667$ |
| 2 | $\prod\limits_{\substack{i=0\\i\neq 2}}^{3}\dfrac{x-x_i}{x_2-x_i}$ | 0.666 667 | $\sum\limits_{\substack{i=0\\i\neq 2}}^{3}\dfrac{1}{x_2-x_i}=-1.666\,667$ |

续表

| $j$ | $l_j(x)$ | $l_j(0.6)$ | $l_j'(x_j)$ |
|---|---|---|---|
| 3 | $\prod\limits_{\substack{i=0\\i\neq 3}}^{3}\dfrac{x-x_i}{x_3-x_i}$ | $-0.166\,667$ | $\sum\limits_{\substack{i=0\\i\neq 3}}^{3}\dfrac{1}{x_3-x_i}=15.833\,333$ |

(1) 利用拉格朗日插值公式,得

$$
\begin{aligned}
\ln 0.60 \approx P_3(0.60) = \sum_{j=0}^{3} l_j(0.60)f(x_j) = \\
& 0.166\,667 \times (0.916\,291 + 0.223\,144) + \\
& (-0.666\,667) \times (0.693\,147 + 0.356\,675) = \\
& -0.509\,975
\end{aligned}
$$

(2) 利用埃尔米特插值公式

$$
\begin{aligned}
H_7(x) = \sum_{j=0}^{3}\{[1-2(x-x_j)l_j'(x_j)]l_j^2(x)f(x_j) + \\
& (x-x_j)l_j^2(x)f'(x_j)\} = \\
& \sum_{j=0}^{3}\{f(x_j) - [2l_j'(x_j)f(x_j) - f'(x_j)] \times \\
& (x-x_j)\}l_j^2(x)
\end{aligned}
$$

得
$$\ln 0.60 \approx H_7(0.60) = -0.510\,889$$

**注** 本题真解 $\ln 0.60 = -0.510\,825\,623$,可以看出埃尔米特插值公式所得之结果比拉格朗日公式之结果精确得多.

**例 1-6** 求满足条件

| $x_i$ | 1 | 2 |
|---|---|---|
| $y_i$ | 2 | 3 |
| $y_i'$ | 1 | $-1$ |

的埃尔米特插值多项式.