国家工科数学课程教学基地建设教材

# 高等数学(上册)

◎ 华南理工大学数学系
◎ 主编 王全迪 郭艾 杨立洪

高等教育出版社
Higher Education Press

国家工科数学课程教学基地建设教材

# 高等数学

## （上册）

华南理工大学数学系

主编　王全迪　郭　艾　杨立洪

主审　陈凤平

高等教育出版社

## 内容提要

本书是华南理工大学数学系、国家工科数学课程教学基地为适应教学改革的新形势，在丰富的教学实践和研究国内外多种教材的基础上，优化教学内容，为理工科本科学生编写的高等数学课程教材。

本书概念准确，理论严谨，突出数学思想方法，既有分析论证，也讲方法技巧；力求启迪学生的创新思维，着力于数学素质与能力的培养；同时注意与中学教材的衔接，切合教学实际。

本书共分上、下两册。上册内容包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、向量代数与空间解析几何，书后附有习题答案与提示。

**图书在版编目（CIP）数据**

高等数学．上册/王全迪，郭艾，杨立洪主编．—北京：高等教育出版社，2009.6

华南理工大学数学系

ISBN 978-7-04-026487-6

Ⅰ．高…　Ⅱ．①王…②郭…③杨…　Ⅲ．高等数学-高等学校-教材　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 067809 号

**策划编辑**　王　强　　**责任编辑**　张耀明　　**封面设计**　于文燕

**责任绘图**　吴文信　　**版式设计**　王艳红　　**责任校对**　杨凤玲

**责任印制**　陈伟光

| | | | |
|---|---|---|---|
| **出版发行** | 高等教育出版社 | **购书热线** | 010-58581118 |
| **社　　址** | 北京市西城区德外大街 4 号 | **免费咨询** | 400-810-0598 |
| **邮政编码** | 100120 | **网　　址** | http://www.hep.edu.cn |
| **总　　机** | 010-58581000 | | http://www.hep.com.cn |
| | | **网上订购** | http://www.landraco.com |
| **经　　销** | 蓝色畅想图书发行有限公司 | | http://www.landraco.com.cn |
| **印　　刷** | 涿州市京南印刷厂 | **畅想教育** | http://www.widedu.com |
| **开　　本** | 787×960　1/16 | **版　　次** | 2009 年 6 月第 1 版 |
| **印　　张** | 21 | **印　　次** | 2009 年 6 月第 1 次印刷 |
| **字　　数** | 390 000 | **定　　价** | 22.80 元 |



**物料号　26487-00**

# 前　言

高等数学是理工科大学各类专业的一门重要基础理论课程。它不仅要向学生传授本课程的基本理论和运算方法，使学生具备继续学习和提高所需的基本数学知识，更要让学生在数学的抽象性、逻辑性与严密性方面受到严格的训练和必要的熏陶，使他们具有理解和运用逻辑关系、研究和领会抽象事物、认识和利用数形规律的初步能力。因此，高等数学课程对学生的思维品质、思辨能力、创造潜能等综合素质的培养具有重要的奠基作用。

2004 年华南理工大学国家工科数学课程教学基地通过验收。在教学基地建设过程中，我校部分富有教学经验的教师编写了一套《高等数学》教材。在此基础上，为适应教学改革的新形势，我们通过教学实践和研究国内外多种教材，进一步优化教材内容，重新组织编写了这套《高等数学》试用教材。

本教材概念准确，理论严谨，突出数学思想方法，既有分析论证，也讲方法技巧；力求启迪学生的创新思维，着力于数学素质与能力的培养。同时，注意与中学教材的衔接，优化教学内容，切合教学实际。本教材根据最新颁布的《工科类本科数学基础课程教学基本要求》编写，为适合对数学要求较高的非数学类各专业的教学需求，教材中部分内容和习题的深度比一般要求略高。

本教材共分上、下两册。上册内容是一元函数的微积分、向量代数与空间解析几何；下册内容是多元函数微分学、多元函数积分学、常微分方程与级数。第一章、第二章和第三章由王全迪编写；第四章、第五章和第六章由郭艾编写；第七章由付一平编写；第八章和第九章由杨立洪编写；第十章由张杰编写；第十一章由汪国钦编写。本教材由陈凤平教授主审，他对书稿进行了仔细和精心的修改，提出许多很好的建议，对保证本教材的质量起了关键性的作用。

本教材力求突出数学概念与理论的实质，避免过于形式化，语言流畅，叙述简洁，深入浅出，使读者感到朴实自然。同时，有典型的例题和较多的习题，每章还配置综合练习题，便于读者自学。

尽管我们做了努力，限于编者的水平，本教材不妥与错误之处在所难免。我们恳请同行及读者批评指正，以便修改。

编　者

2009 年 2 月

# 目　　录

# 第一章　函数与极限

高等数学是变量数学，它研究变量的变化过程，以函数作为研究对象，主要内容是微积分．而微积分的基本概念和方法，都以极限理论为基础．因此，作为高等数学的开篇，本章首先介绍函数与极限，并以极限引出函数的连续性．

## 第一节　函　　数

### 一、变量与函数

客观世界中的一切事物都处在不停运动与变化之中．运动与变化是绝对的、普遍的，而静止与恒定不变则是相对的、暂时的．运用数学方法对自然现象或科学技术问题进行观察和研究时，所遇到的各种不同的量，可根据问题的实际需要将它们分为两类：一类是在过程中保持数值不变的量，这类量称为常量；另一类是在过程中变化着的，可以取不同数值的量，称之为变量．

通常用字母 $a$、$b$、$c$ 等表示常量，而用字母 $x$、$y$、$t$ 等表示变量．

在高等数学中，变量的取值局限在实数集 $\mathbf{R}$（除特别声明外）内．我们知道，实数集与数轴上的点一一对应．这样，人们就把实数 $a$ 与它在数轴上的对应点相等同起来，也即是将实数 $a$ 及其在数轴的对应点都称之为“点 $a$”．

变量在其变化过程中所可能取的一切值构成数集，有一类特殊的数集称为区间．给定两个实数 $a<b$，我们把数集 $\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ 称作闭区间，记作 $[a, b]$；把数集 $\{x \mid a<x<b\}$ 称作开区间，记作 $(a, b)$．

类似地，可定义半开区间 $(a, b]$ 与 $[a, b)$，以上四类区间统称为以 $a$、$b$ 为端点的有限区间．此外，还有所谓的无限区间，例如，全体实数的集合 $\mathbf{R}$ 表示成 $(-\infty, +\infty)$，它是无限区间．还有以下的无限区间：

$$[a, +\infty)=\{x \mid a \leqslant x<+\infty\};$$

$$(-\infty, b]=\{x \mid -\infty<x \leqslant b\}.$$

在无需区分有限与无限区间的场合下，通常将以上的各类区间统称为“区间”，并用字母 $I$ 来表示．

邻域是微积分中常用的一类区间. 设 $a$ 为实数，$\delta$ 是任一正数，称开区间 $(a-\delta, a+\delta)$ 为点 $a$ 的 $\delta$ 邻域，记为 $U(a, \delta)$. 即

$$U(a, \delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\},$$

点 $a$ 称为这邻域的中心，$\delta$ 则是邻域的半径，如图 1-1 所示.

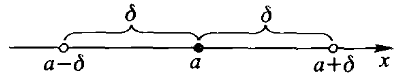


图 1-1

在几何上，邻域 $U(a, \delta)$ 表示：与点 $a$ 距离小于正数 $\delta$ 的一切点 $x$ 的集合. 而点 $x$ 与 $a$ 的距离可用 $|x-a|$ 表示，因此

$$U(a, \delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}.$$

如果把邻域 $U(a, \delta)$ 的中心点 $a$ 去掉，则称之为点 $a$ 的去心 $\delta$ 邻域，记作 $\mathring{U}(a, \delta)$，即

$$\mathring{U}(a, \delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

可以知道，对开区间 $(a, b)$ 内的任一点 $x_0$，必存在一个正数 $\delta$，使得 $U(x_0, \delta) \subset (a, b)$. 且称 $x_0$ 是开区间 $(a, b)$ 的内点.

**例 1** （1）用区间或区间的并表示数集

$$\{x \mid x^2-3x+2 \geqslant 0\};$$

（2）用邻域表示区间 $(-3, 1)$.

**解** （1）数集 $\{x \mid x^2-3x+2 \geqslant 0\}$ 可用区间的并 $(-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$ 表示.

（2）区间 $(-3, 1)$ 表示的是以 $a=-1$ 为中心，正数 $\delta=2$ 为半径的邻域，即邻域 $U(-1, 2)$.

在研究某一变化过程时，往往会出现多个变量，且它们的变化彼此间相互联系. 变量之间的关系，大量地表现为确定的依赖关系.

例如，圆的面积 $A$ 随半径 $r$ 变化着，我们知道这两个变量之间的关系由公式

$$A=\pi r^2$$

确定. 当半径 $r$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内任意取定一个数值时，由上式便可得出唯一确定的圆面积 $A$ 值与之对应.

再如，气缸内一定质量的气体，其体积 $V$ 依赖于温度 $T$ 和压强 $P$，它们间的关系是

$$V=R\frac{T}{P},$$

其中 $R$ 为常数，这关系式称为克拉伯龙（Claperon）公式. 有时为使问题的讨论简单化，便设定温度保持不变，于是体积与压强这两个变量的依赖关系由

$$V=\frac{C}{P}$$

所确定. 其中 $C$ 为常数，这关系式称为波义耳-马略特（Boyle-Mariote）定律.

上述两例中，变量 $A$ 和 $V$ 分别由 $r$ 与 $p$ 所确定，我们称 $r$ 与 $p$ 为自变量；而称 $A$ 与 $V$ 为因变量. 因变量完全由自变量的逐一取值而唯一确定，变量间的这种确定的依赖关系称为函数关系.

**定义 1.1.1** 设 $x$ 与 $y$ 是两个变量，若对变量 $x$ 在其变化域 $D$ 中的每一个值 $x$，按照一定法则 $f$，变量 $y$ 总有唯一确定的值与之对应，则称 $f$ 是定义在 $D$ 上的函数，记作

$$y=f(x),\quad x\in D,$$

这时称 $x$ 为自变量，$y$ 为因变量. 数集 $D$ 称为函数的定义域，它由函数的对应法则或实际问题的要求确定，而相应的函数值的全体称为函数的值域.

定义域和对应法则是函数的两个要素. 两个函数如果定义域相同且对应法则一样，则称它们是同一个函数，否则，便是不同的两个函数.

**例 2** 讨论下列两个函数是否表示同一函数：

$$f(x)=|x|\sqrt{1-x} \text{ 与 } g(x)=x\sqrt{1-x}.$$

**解** 定义域同为 $D=\{x|-\infty<x\leqslant 1\}$，但只有当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，才有 $|x|\sqrt{1-x}=x\sqrt{1-x}$，而当 $-\infty<x<0$ 时，$|x|\sqrt{1-x}\neq x\sqrt{1-x}$. 可见这两个函数的对应法则不同，它们不是同一函数.

在课本中通常见到的函数大多由解析表达式给出，例如圆面积 $A=\pi r^2$，但表示函数的方式还可以用图像法和列表法. 比如一昼夜气温的变化，气温显然是关于时间的函数，该函数关系可以用自动记录仪画出的曲线图直观地表示，却很难用一个数学的解析式来表达.

下面再举几个函数的例子.

**例 3** 函数 $f(x)=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0. \end{cases}$

该函数的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，值域是 $[0,+\infty)$. 图像如图 1-2 所示，该函数称为绝对值函数.

**例 4** 函数 $y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -1, & x<0. \end{cases}$

该函数称为符号函数，它的定义域是 $(-\infty,+\infty)$. 图像如图 1-3 所示. 对任意的实数 $x$，下列关系式成立：$|x|=x\cdot\operatorname{sgn} x$.

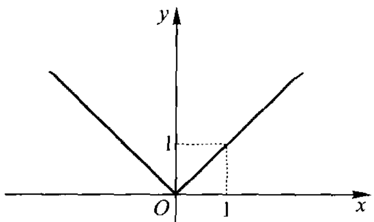


图 1-2

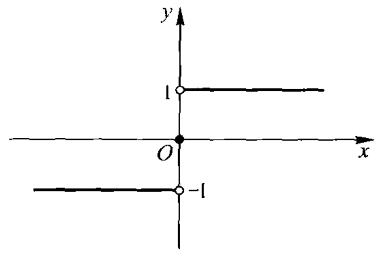


图 1-3

从例 3 和例 4 看到，在一个函数中，因变量 $y$ 随自变量 $x$ 而确定的对应法则可用几个不同式子将它表示. 这种在自变量不同的变化范围，其对应法则用不同解析式子表示的函数，通常称为分段函数.

**例 5** 对任意实数 $x$，对应的 $y$ 是不超过 $x$ 的最大整数，记作

$$y=[x],$$

称为取整函数.

取整函数的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，它的图像如图 1-4 所示，该图形称为阶梯曲线. 在 $x$ 取整数值处，图形发生跳跃，跃度为 1.

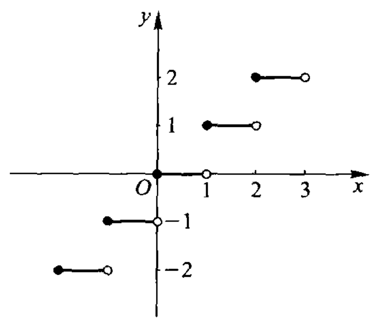


图 1-4

在上述函数定义中，当自变量 $x$ 在定义域 $D$ 上任取一个值时，对应的函数值 $y$ 只有一个，这样定义的函数称为单值函数. 如果对应的函数值多于一个，则称为多值函数，今后如无特别声明，所论的函数都指单值函数. 对于多值函数，我们通常可附加上条件，将它分解为几个单值分支来研究，例如，在多值函数 $x^2+y^2=4$ 中，附加条件"$y\leqslant 0$"，就以"$x^2+y^2=4$ 且 $y\leqslant 0$"作为对应法则，得出它的单值分支，即单值函数 $y=-\sqrt{4-x^2}$.

现在，我们来定义反函数.

**定义 1.1.2** 设有函数 $y=f(x)$，其定义域为 $D$，值域为 $E$，若对 $E$ 中的每一个 $y$ 值，都可由方程 $y=f(x)$ 唯一地确定出 $D$ 中的 $x$ 值，则得到一个定义在 $E$ 上的函数，称它为函数 $y=f(x)$ 的反函数，记作

$$x=f^{-1}(y),\qquad y\in E,$$

且把 $y=f(x)$ 称之为直接函数.

显然，$y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 互为反函数.

习惯上，用 $x$ 表示自变量，将因变量记作 $y$，只强调对应法则 $f^{-1}$，故常把 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 改写为

$$y=f^{-1}(x),\qquad x\in E.$$

可以知道，在同一 $xOy$ 坐标平面上，$y=f(x)$ 的图形与 $x=f^{-1}(y)$ 的图形是相同的. 而 $y=f(x)$ 的图形与 $y=f^{-1}(x)$ 的图形则关于直线 $y=x$ 对称. 正如大家所熟知的指数函数 $y=e^x$，它的反函数称为对数函数 $x=\ln y$，由于习惯记 $x$ 为自变量，$y$ 为因变量，所以通常说 $y=\ln x$ 是 $y=e^x$ 的反函数. $y=\ln x$ 的图形与 $y=e^x$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称，如图 1-5 所示.

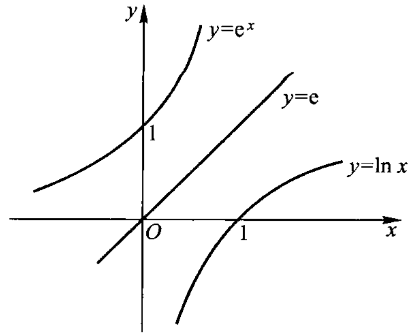



图 1-5

此外我们应知道，一个函数是否存在单值反函数，取决于对应法则 $f$ 在定义域 $D$ 与值域 $E$ 之间是否构成一一对应关系. 如果构成一一对应关系，则必存在单值反函数. 否则就没有单值反函数.

**例 6** 求函数 $y=f(x)=\begin{cases}-x, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ x+1, & 0<x\leqslant 1\end{cases}$ 的反函数.

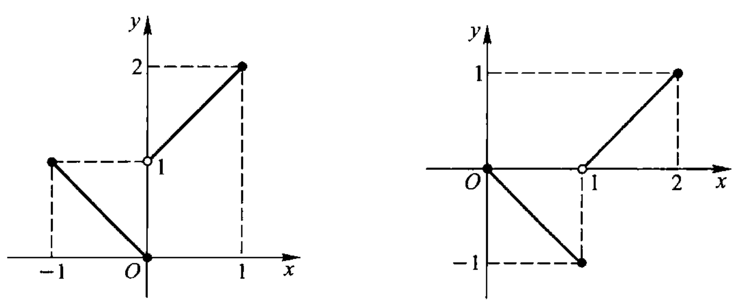
**解** 直接函数 $y=f(x)$ 的图形如图 1-6（a）所示. 可以看出其定义域 $D=[-1, 1]$ 与值域 $E=[0, 2]$ 之间构成一一对应关系，故存在单值反函数. 对 $E$ 中的每一个 $y$ 值，可确定出反函数

$$x=f^{-1}(y)=\begin{cases}-y, & 0\leqslant y\leqslant 1,\\ y-1, & 1<y\leqslant 2.\end{cases}$$

按习惯，又把反函数写成

$$y=f^{-1}(x)=\begin{cases}-x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x-1, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$$

如图 1-6（b）所示.




（a） （b）

图 1-6

## 二、初等函数

在中学数学中已介绍了常见的基本初等函数，可归纳如下：

（1）常数函数　$y=c$（$c$ 为常数）.

它的定义域是（$-\infty$，$+\infty$），即无论自变量 $x$ 取何实数值，其函数值都等于 $c$. 这函数的图像是一条与 $x$ 轴平行且纵截距为 $c$ 的直线.

（2）幂函数　$y=x^a$（$a\neq0$ 为实常数）.

幂函数的定义域与 $a$ 值有关，但无论 $a$ 取何值，在区间（0，$+\infty$）内，$y=x^a$ 总是有意义的，且图形过点（1，1）.

（3）指数函数　$y=a^x$（$a$ 为常数，且 $a>0$，$a\neq1$）.

指数函数的定义域为（$-\infty$，$+\infty$），值域为（0，$+\infty$），且图形过点（0，1）.

（4）对数函数　$y=\log_a x$（$a$ 为常数，且 $a>0$，$a\neq1$）.

对数函数的定义域为（0，$+\infty$）. 实际应用中，如取 $a=10$，称 $\log_{10}x$ 为常用对数，并简记为 $y=\lg x$；如果取 $a=\mathrm{e}$（$\mathrm{e}=2.71828\cdots$ 是个无理数），称 $\log_{\mathrm{e}}x$ 为自然对数，并简记为 $y=\ln x$.

（5）三角函数　它包括以下 6 个函数.

正弦函数 $y=\sin x$；余弦函数 $y=\cos x$；

正切函数 $y=\tan x$；余切函数 $y=\cot x$；

正割函数 $y=\sec x$；余割函数 $y=\csc x$.

它们都是周期函数且 $\sin x$ 和 $\cos x$ 有界，其余 4 个无界.

可以知道：$\tan x\cdot\cot x=1$；$\sin x\cdot\csc x=1$；$\cos x\cdot\sec x=1$.

三角函数中的角度通常用弧度制表示.

（6）反三角函数

三角函数的反函数叫做反三角函数，由于三角函数都是周期函数，所以只能在指定的主值区间内得到单值的反三角函数. 反三角函数相应的也有六个，分别讨论如下.

反正弦函数：我们知道正弦函数 $y=\sin x$ 对定义域（$-\infty$，$+\infty$）上的每个 $x$ 值，因变量 $y$ 都在 $[-1,1]$ 上有唯一的值与它对应. 但反过来，对于 $y$ 在 $[-1,1]$ 上的每一个值，$x$ 总有无穷多个值与之对应，因此，可以说函数 $y=\sin x$，$x\in(-\infty,+\infty)$ 没有反函数.

但从图 1-7 可以看出，在正弦函数的单调区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上，对于 $x$ 的每一个值，$y=\sin x$ 在 $[-1,1]$ 上有唯一的值与之对应；反过来，对于 $y$ 在 $[-1,1]$ 上的每一个值，$x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上也有唯一的值与之对应，构成一一对应关系. 因此，函数 $y=\sin x$，$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 就有反函数，我们称这