

国家工科数学课程教学基地建设教材

高等数学(上册)

◎ 华南理工大学数学系

◎ 主编 王全迪 郭艾 杨立洪



高等教育出版社
Higher Education Press

国家工科数学课程教学基地建设教材

高等数学

(上册)

华南理工大学数学系

主编 王全迪 郭 艾 杨立洪

主审 陈凤平

高等教育出版社

内容提要

本书是华南理工大学数学系、国家工科数学课程教学基地为适应教学改革的新形势,在丰富的教学实践和研究国内外多种教材的基础上,优化教学内容,为理工科本科生编写的高等数学课程教材。

本书概念准确,理论严谨,突出数学思想方法,既有分析论证,也讲方法技巧;力求启迪学生的创新思维,着力于数学素质与能力的培养;同时注意与中学教材的衔接,切合教学实际。

本书共分上、下两册。上册内容包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、向量代数与空间解析几何,书后附有习题答案与提示。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上册/王全迪,郭艾,杨立洪主编. —北京:
高等教育出版社, 2009. 6

华南理工大学数学系

ISBN 978-7-04-026487-6

I. 高… II. ①王…②郭…③杨… III. 高等数学-高等
学校-教材 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2009) 第 067809 号

策划编辑	王 强	责任编辑	张耀明	封面设计	于文燕
责任绘图	吴文信	版式设计	王艳红	责任校对	杨凤玲
责任印制	陈伟光				

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	400-810-0598
邮政编码	100120	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司	网上订购	http://www.landaco.com
印 刷	涿州市京南印刷厂		http://www.landaco.com.cn
		畅想教育	http://www.widedu.com
开 本	787×960 1/16	版 次	2009 年 6 月第 1 版
印 张	21	印 次	2009 年 6 月第 1 次印刷
字 数	390 000	定 价	22.80 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 26487-00

前 言

高等数学是理工科大学各类专业的一门重要基础理论课程。它不仅要向学生传授本课程的基本理论和运算方法,使学生具备继续学习和提高所需的基本数学知识,更要让学生在数学的抽象性、逻辑性与严密性方面受到严格的训练和必要的熏陶,使他们具有理解和运用逻辑关系、研究和领会抽象事物、认识和利用数形规律的初步能力。因此,高等数学课程对学生的思维品质、思辨能力、创造潜能等综合素质的培养具有重要的奠基作用。

2004年华南理工大学国家工科数学课程教学基地通过验收。在教学基地建设过程中,我校部分富有教学经验的教师编写了一套《高等数学》教材。在此基础上,为适应教学改革的新形势,我们通过教学实践和研究国内外多种教材,进一步优化教材内容,重新组织编写了这套《高等数学》试用教材。

本教材概念准确,理论严谨,突出数学思想方法,既有分析论证,也讲方法技巧;力求启迪学生的创新思维,着力于数学素质与能力的培养。同时,注意与中学教材的衔接,优化教学内容,切合教学实际。本教材根据最新颁布的《工科类本科数学基础课程教学基本要求》编写,为适合对数学要求较高的非数学类各专业的教学需求,教材中部分内容和习题的深度比一般要求略高。

本教材共分上、下两册。上册内容是一元函数的微积分、向量代数与空间解析几何;下册内容是多元函数微分学、多元函数积分学、常微分方程与级数。第一章、第二章和第三章由王全迪编写;第四章、第五章和第六章由郭艾编写;第七章由付一平编写;第八章和第九章由杨立洪编写;第十章由张杰编写;第十一章由汪国钦编写。本教材由陈凤平教授主审,他对书稿进行了仔细和精心的修改,提出许多很好的建议,对保证本教材的质量起了关键性的作用。

本教材力求突出数学概念与理论的实质,避免过于形式化,语言流畅,叙述简洁,深入浅出,使读者感到朴实自然。同时,有典型的例题和较多的习题,每章还配置综合练习题,便于读者自学。

尽管我们做了努力,限于编者的水平,本教材不妥与错误之处在所难免。我们恳请同行及读者批评指正,以便修改。

编 者

2009年2月

目 录

第一章 函数与极限	(1)
第一节 函数	(1)
一、变量与函数	(1)
二、初等函数	(5)
三、函数的特性	(11)
习题 1-1	(13)
第二节 数列的极限	(15)
一、整标函数与数列	(15)
二、数列的极限	(16)
三、收敛数列的性质	(19)
四、子列	(20)
习题 1-2	(21)
第三节 函数的极限	(22)
一、自变量趋于无穷时的函数极限	(22)
二、自变量趋于定值时的函数极限	(25)
三、函数极限的性质	(29)
四、函数极限与数列极限的关系	(29)
习题 1-3	(30)
第四节 无穷小与无穷大	(31)
一、无穷小的概念	(31)
二、无穷小的性质	(32)
三、无穷小与函数极限的关系	(33)
四、无穷大量	(34)
习题 1-4	(35)
第五节 极限的运算法则	(36)
一、极限的四则运算法则	(36)
二、复合函数的极限运算法则	(39)
习题 1-5	(41)
第六节 极限存在准则与重要极限	(42)

一、夹逼准则	(42)
二、重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	(44)
三、单调有界准则	(45)
四、重要极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$	(46)
习题 1-6	(48)
第七节 无穷小的比较	(49)
一、无穷小比较的概念	(49)
二、等价无穷小的性质	(51)
三、无穷小的阶	(53)
习题 1-7	(54)
第八节 函数的连续性	(55)
一、函数在点 x_0 处的连续性	(56)
二、区间上的连续函数	(58)
三、函数的间断点及其分类	(58)
四、连续函数的运算	(59)
五、闭区间上连续函数的性质	(61)
习题 1-8	(64)
总练习题一	(65)
第二章 导数与微分	(68)
第一节 导数概念	(68)
一、变化率问题实例	(68)
二、导数定义	(70)
三、求导举例	(72)
四、可导与连续的关系	(74)
五、经济学中的变化率问题	(76)
习题 2-1	(78)
第二节 函数的求导法则	(79)
一、函数和、差、积、商的导数	(79)
二、反函数的求导法则	(81)
三、复合函数的求导法则	(83)
四、初等函数的导数	(85)
习题 2-2	(87)

第三节	隐函数及参数方程确定的函数的导数	(88)
一、	隐函数的导数	(88)
二、	对数求导法	(91)
三、	参数方程确定函数的导数	(92)
四、	相关变化率	(94)
	习题 2-3	(95)
第四节	高阶导数	(96)
	习题 2-4	(100)
第五节	函数的微分	(101)
一、	微分的概念	(101)
二、	函数可微性与可导性之间的关系	(103)
三、	微分基本公式和运算法则	(105)
四、	函数的局部线性化	(107)
五、	高阶微分	(108)
六、	微分在实际中的应用	(110)
	习题 2-5	(113)
	总练习题二	(114)
第三章	微分中值定理与导数的应用	(116)
第一节	微分中值定理	(116)
一、	预备知识	(116)
二、	罗尔 (Rolle) 中值定理	(118)
三、	拉格朗日 (Lagrange) 中值定理	(119)
四、	柯西 (Cauchy) 中值定理	(121)
五、	中值定理应用举例	(123)
	习题 3-1	(125)
第二节	洛必达法则	(126)
一、	$\frac{0}{0}$ 型未定式的洛必达法则	(127)
二、	$\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式的洛必达法则	(130)
三、	其他类型的未定式	(131)
四、	洛必达法则使用说明	(134)
	习题 3-2	(136)
第三节	泰勒公式	(137)
一、	泰勒中值定理	(138)

	二、泰勒公式的应用	(144)
	习题 3-3	(147)
第四节	函数的单调性与极值	(148)
	一、函数的单调性	(148)
	二、函数的极值	(151)
	三、最大值与最小值问题	(156)
	习题 3-4	(159)
第五节	函数的凸性和图形的描绘	(160)
	一、函数的凸性及其判定	(161)
	二、曲线的拐点	(163)
	三、曲线的渐近线	(166)
	四、函数作图	(167)
	习题 3-5	(169)
第六节	平面曲线的曲率	(169)
	一、曲率的概念	(169)
	二、曲率的计算公式	(171)
	三、曲率圆与曲率半径	(173)
	习题 3-6	(175)
	总练习题三	(176)
第四章	不定积分	(178)
第一节	不定积分的概念与性质	(178)
	一、原函数与不定积分的概念	(178)
	二、不定积分的几何意义	(179)
	三、基本积分公式	(180)
	四、不定积分的性质	(181)
	习题 4-1	(182)
第二节	不定积分的换元积分法	(182)
	一、第一换元法	(183)
	二、第二换元法	(186)
	习题 4-2	(190)
第三节	不定积分的分部积分法	(191)
	习题 4-3	(197)
第四节	几类可积初等函数的不定积分	(197)
	一、有理函数的不定积分	(198)

二、三角函数有理式的不定积分	(202)
三、简单无理式的不定积分	(204)
习题 4-4	(205)
总练习题四	(206)
第五章 定积分	(208)
第一节 定积分的概念与性质	(208)
一、定积分问题举例	(208)
二、定积分的定义	(210)
三、函数可积的条件	(211)
四、定积分的几何意义	(212)
五、定积分的性质	(213)
习题 5-1	(217)
第二节 微积分基本定理	(218)
一、积分上限的函数及其导数	(218)
二、微积分基本定理	(219)
习题 5-2	(221)
第三节 定积分的计算	(222)
一、定积分的换元积分法	(223)
二、定积分的分部积分法	(228)
习题 5-3	(231)
第四节 定积分的几何应用	(232)
一、建立积分表达式的微元法	(232)
二、平面图形的面积	(233)
三、空间立体的体积	(236)
四、平面曲线的弧长	(239)
习题 5-4	(242)
第五节 定积分的物理应用	(242)
一、变力沿直线所作的功	(242)
二、液体的压力	(245)
三、引力	(246)
四、函数的平均值与均方根	(247)
习题 5-5	(249)
第六节 反常积分	(249)
一、无穷区间上的反常积分	(249)

二、无界函数的反常积分	(252)
习题 5-6	(255)
总练习题五	(256)
第六章 向量代数与空间解析几何	(259)
第一节 向量及其线性运算	(259)
一、向量的基本概念	(259)
二、向量的线性运算	(260)
三、数轴上的向量	(262)
习题 6-1	(263)
第二节 空间直角坐标系	(263)
一、空间直角坐标系	(263)
二、空间点的坐标	(264)
三、向量的坐标	(264)
四、向量线性运算的坐标表示	(265)
五、向量的模、方向角和投影	(267)
习题 6-2	(269)
第三节 向量的数量积与向量积	(270)
一、两向量的数量积	(270)
二、两向量的向量积	(273)
三、向量的混合积	(275)
习题 6-3	(276)
第四节 平面的方程	(276)
一、平面的点法式方程	(277)
二、平面的一般式方程	(278)
三、两平面的夹角	(280)
习题 6-4	(281)
第五节 直线的方程	(281)
一、直线的一般式方程	(281)
二、直线的参数方程和点向式方程	(282)
三、空间两直线的夹角及两直线的位置关系	(283)
四、直线与平面的夹角及直线与平面的位置关系	(284)
五、过直线的平面束	(285)
习题 6-5	(286)
第六节 曲面及其方程	(287)

一、曲面方程的概念	(287)
二、柱面	(288)
三、旋转曲面	(289)
四、二次曲面	(290)
习题 6-6	(293)
第七节 空间曲线及其方程	(294)
一、空间曲线的一般式方程	(294)
二、空间曲线的参数方程	(295)
三、空间曲线在坐标面上的投影	(296)
习题 6-7	(298)
总练习题六	(299)
习题答案与提示	(301)

第一章 函数与极限

高等数学是变量数学，它研究变量的变化过程，以函数作为研究对象，主要内容是微积分。而微积分的基本概念和方法，都以极限理论为基础。因此，作为高等数学的开篇，本章首先介绍函数与极限，并以极限引出函数的连续性。

第一节 函 数

一、变量与函数

客观世界中的一切事物都处在不停运动与变化之中。运动与变化是绝对的、普遍的，而静止与恒定不变则是相对的、暂时的。运用数学方法对自然现象或科学技术问题进行观察和研究时，所遇到的各种不同的量，可根据问题的实际需要将它们分为两类：一类是在过程中保持数值不变的量，这类量称为常量；另一类是在过程中变化着的，可以取不同数值的量，称之为变量。

通常用字母 a 、 b 、 c 等表示常量，而用字母 x 、 y 、 t 等表示变量。

在高等数学中，变量的取值局限在实数集 $\mathbf{R}$ （除特别声明外）内。我们知道，实数集与数轴上的点一一对应。这样，人们就把实数 a 与它在数轴上的对应点相等同起来，也即是将实数 a 及其在数轴的对应点都称之为“点 a ”。

变量在其变化过程中所可能取的一切值构成数集，有一类特殊的数集称为区间。给定两个实数 $a < b$ ，我们把数集 $\{x | a \leq x \leq b\}$ 称作闭区间，记作 $[a, b]$ ；把数集 $\{x | a < x < b\}$ 称作开区间，记作 (a, b) 。

类似地，可定义半开区间 $(a, b]$ 与 $[a, b)$ ，以上四类区间统称为以 a 、 b 为端点的有限区间。此外，还有所谓的无限区间，例如，全体实数的集合 $\mathbf{R}$ 表示成 $(-\infty, +\infty)$ ，它是无限区间。还有以下的无限区间：

$$[a, +\infty) = \{x | a \leq x < +\infty\};$$

$$(-\infty, b] = \{x | -\infty < x \leq b\}.$$

在无需区分有限与无限区间的场合下，通常将以上的各类区间统称为“区间”，并用字母 I 来表示。

邻域是微积分中常用的一类区间. 设 a 为实数, δ 是任一正数, 称开区间 $(a-\delta, a+\delta)$ 为点 a 的 δ 邻域, 记为 $U(a, \delta)$. 即

$$U(a, \delta) = \{x | a-\delta < x < a+\delta\},$$

点 a 称为这邻域的中心, δ 则是邻域的半径,

如图 1-1 所示.

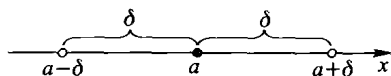


图 1-1

在几何上, 邻域 $U(a, \delta)$ 表示: 与点 a 距离小于正数 δ 的一切点 x 的集合. 而点 x 与 a 的距离可用 $|x-a|$ 表示, 因此

$$U(a, \delta) = \{x | |x-a| < \delta\}.$$

如果把邻域 $U(a, \delta)$ 的中心点 a 去掉, 则称之为点 a 的去心 δ 邻域, 记作 $\dot{U}(a, \delta)$, 即

$$\dot{U}(a, \delta) = \{x | 0 < |x-a| < \delta\}.$$

可以知道, 对开区间 (a, b) 内的任一点 x_0 , 必存在一个正数 δ , 使得 $U(x_0, \delta) \subset (a, b)$. 且称 x_0 是开区间 (a, b) 的内点.

例 1 (1) 用区间或区间的并表示数集

$$\{x | x^2 - 3x + 2 \geq 0\};$$

(2) 用邻域表示区间 $(-3, 1)$.

解 (1) 数集 $\{x | x^2 - 3x + 2 \geq 0\}$ 可用区间的并 $(-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$ 表示.

(2) 区间 $(-3, 1)$ 表示的是以 $a = -1$ 为中心, 正数 $\delta = 2$ 为半径的邻域, 即邻域 $U(-1, 2)$.

在研究某一变化过程时, 往往会出现多个变量, 且它们的变化彼此间相互联系. 变量之间的关系, 大量地表现为确定的依赖关系.

例如, 圆的面积 A 随半径 r 变化着, 我们知道这两个变量之间的关系由公式

$$A = \pi r^2$$

确定. 当半径 r 在区间 $(0, +\infty)$ 内任意取定一个数值时, 由上式便可得出唯一确定的圆面积 A 值与之对应.

再如, 气缸内一定质量的气体, 其体积 V 依赖于温度 T 和压强 P , 它们间的关系是

$$V = R \frac{T}{P},$$

其中 R 为常数, 这关系式称为克拉伯龙 (Claperon) 公式. 有时为使问题的讨论简单化, 便设定温度保持不变, 于是体积与压强这两个变量的依赖关系由

$$V = \frac{C}{P}$$

所确定. 其中 C 为常数, 这关系式称为波义耳-马略特 (Boyle - Mariote) 定律.

上述两例中, 变量 A 和 V 分别由 r 与 p 所确定, 我们称 r 与 p 为自变量; 而称 A 与 V 为因变量. 因变量完全由自变量的逐一取值而唯一确定, 变量间的这种确定的依赖关系称为函数关系.

定义 1.1.1 设 x 与 y 是两个变量, 若对变量 x 在其变化域 D 中的每一个值 x , 按照一定法则 f , 变量 y 总有唯一确定的值与之对应, 则称 f 是定义在 D 上的函数, 记作

$$y = f(x), \quad x \in D,$$

这时称 x 为自变量, y 为因变量. 数集 D 称为函数的定义域, 它由函数的对应法则或实际问题的要求确定, 而相应的函数值的全体称为函数的值域.

定义域和对应法则是函数的两个要素. 两个函数如果定义域相同且对应法则一样, 则称它们是同一个函数, 否则, 便是不同的两个函数.

例 2 讨论下列两个函数是否表示同一函数:

$$f(x) = |x|\sqrt{1-x} \text{ 与 } g(x) = x\sqrt{1-x}.$$

解 定义域同为 $D = \{x | -\infty < x \leq 1\}$, 但只有当 $0 \leq x \leq 1$ 时, 才有 $|x|\sqrt{1-x} = x\sqrt{1-x}$, 而当 $-\infty < x < 0$ 时, $|x|\sqrt{1-x} \neq x\sqrt{1-x}$. 可见这两个函数的对应法则不同, 它们不是同一函数.

在课本中通常见到的函数大多由解析表达式给出, 例如圆面积 $A = \pi r^2$, 但表示函数的方式还可以用图像法和列表法. 比如一昼夜气温的变化, 气温显然是关于时间的函数, 该函数关系可以用自动记录仪画出的曲线图直观地表示, 却很难用一个数学的解析式来表达.

下面再举几个函数的例子.

例 3 函数 $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$

该函数的定义域是 $(-\infty, +\infty)$, 值域是 $[0, +\infty)$. 图像如图 1-2 所示, 该函数称为绝对值函数.

例 4 函数 $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$

该函数称为符号函数, 它的定义域是 $(-\infty, +\infty)$. 图像如图 1-3 所示. 对任意的实数 x , 下列关系式成立: $|x| = x \cdot \operatorname{sgn} x$.

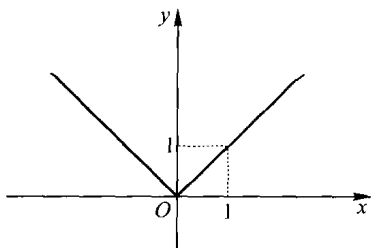


图 1-2

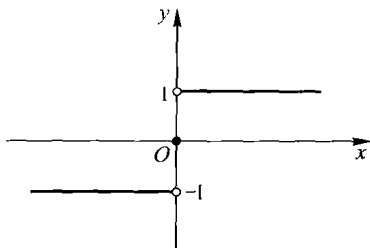


图 1-3

从例 3 和例 4 看到, 在一个函数中, 因变量 y 随自变量 x 而确定的对应法则可用几个不同式子将它表示. 这种在自变量不同的变化范围, 其对应法则用不同解析式子表示的函数, 通常称为分段函数.

例 5 对任意实数 x , 对应的 y 是不超过 x 的最大整数, 记作

$$y = [x],$$

称为取整函数.

取整函数的定义域是 $(-\infty, +\infty)$, 它的图像如图 1-4 所示, 该图形称为阶梯曲线. 在 x 取整数值处, 图形发生跳跃, 跃度为 1.

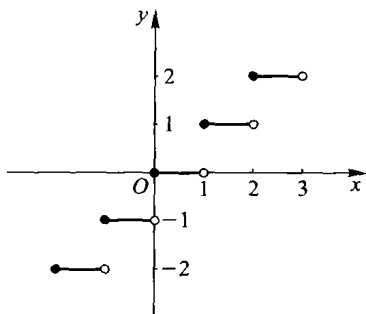


图 1-4

在上述函数定义中, 当自变量 x 在定义域 D 上任取一个值时, 对应的函数值 y 只有一个, 这样定义的函数称为单值函数. 如果对应的函数值多于一个, 则称为多值函数, 今后如无特

别声明, 所论的函数都指单值函数. 对于多值函数, 我们通常可附加上条件, 将它分解为几个单值分支来研究, 例如, 在多值函数 $x^2 + y^2 = 4$ 中, 附加条件 “ $y \leq 0$ ”, 就以 “ $x^2 + y^2 = 4$ 且 $y \leq 0$ ” 作为对应法则, 得出它的单值分支, 即单值函数 $y = -\sqrt{4-x^2}$.

现在, 我们来定义反函数.

定义 1.1.2 设有函数 $y=f(x)$, 其定义域为 D , 值域为 E , 若对 E 中的每一个 y 值, 都可由方程 $y=f(x)$ 唯一地确定出 D 中的 x 值, 则得到一个定义在 E 上的函数, 称它为函数 $y=f(x)$ 的反函数, 记作

$$x = f^{-1}(y), \quad y \in E,$$

且把 $y=f(x)$ 称之为直接函数.

显然, $y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 互为反函数.

习惯上, 用 x 表示自变量, 将因变量记作 y , 只强调对应法则 f^{-1} , 故常把 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 改写为

$$y = f^{-1}(x), \quad x \in E.$$

可以知道, 在同一 xOy 坐标平面上, $y = f(x)$ 的图形与 $x = f^{-1}(y)$ 的图形是相同的. 而 $y = f(x)$ 的图形与 $y = f^{-1}(x)$ 的图形则关于直线 $y = x$ 对称. 正如大家所熟知的指数函数 $y = e^x$, 它的反函数称为对数函数 $x = \ln y$, 由于习惯记 x 为自变量, y 为因变量, 所以通常说 $y = \ln x$ 是 $y = e^x$ 的反函数. $y = \ln x$ 的图形与 $y = e^x$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称, 如图 1-5 所示.

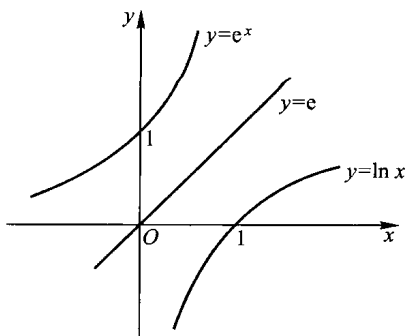


图 1-5

此外我们应知道, 一个函数是否存在单值反函数, 取决于对应法则 f 在定义域 D 与值域 E 之间是否构成一一对应关系. 如果构成一一对应关系, 则必存在单值反函数. 否则就没有单值反函数.

例 6 求函数 $y = f(x) = \begin{cases} -x, & -1 \leq x \leq 0, \\ x+1, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$ 的反函数.

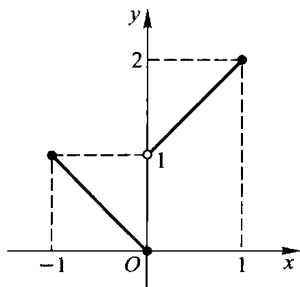
解 直接函数 $y = f(x)$ 的图形如图 1-6 (a) 所示. 可以看出其定义域 $D = [-1, 1]$ 与值域 $E = [0, 2]$ 之间构成一一对应关系, 故存在单值反函数. 对 E 中的每一个 y 值, 可确定出反函数

$$x = f^{-1}(y) = \begin{cases} -y, & 0 \leq y \leq 1, \\ y-1, & 1 < y \leq 2. \end{cases}$$

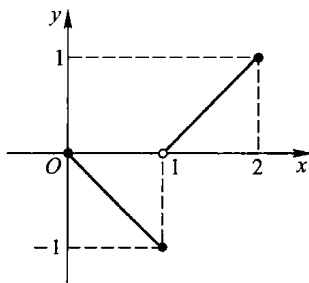
按习惯, 又把反函数写成

$$y = f^{-1}(x) = \begin{cases} -x, & 0 \leq x \leq 1, \\ x-1, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

如图 1-6 (b) 所示.



(a)



(b)

图 1-6

二、初等函数

在中学数学中已介绍了常见的基本初等函数, 可归纳如下:

(1) 常数函数 $y=c$ (c 为常数).

它的定义域是 $(-\infty, +\infty)$, 即无论自变量 x 取何实数值, 其函数值都等于 c . 这函数的图像是一条与 x 轴平行且纵截距为 c 的直线.

(2) 幂函数 $y=x^a$ ($a \neq 0$ 为实常数).

幂函数的定义域与 a 值有关, 但无论 a 取何值, 在区间 $(0, +\infty)$ 内, $y=x^a$ 总是有意义的, 且图形过点 $(1, 1)$.

(3) 指数函数 $y=a^x$ (a 为常数, 且 $a>0, a \neq 1$).

指数函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $(0, +\infty)$, 且图形过点 $(0, 1)$.

(4) 对数函数 $y=\log_a x$ (a 为常数, 且 $a>0, a \neq 1$).

对数函数的定义域为 $(0, +\infty)$. 实际应用中, 如取 $a=10$, 称 $\log_{10} x$ 为常用对数, 并简记为 $y=\lg x$; 如果取 $a=e$ ($e=2.71828\cdots$ 是个无理数), 称 $\log_e x$ 为自然对数, 并简记为 $y=\ln x$.

(5) 三角函数 它包括以下 6 个函数.

正弦函数 $y=\sin x$; 余弦函数 $y=\cos x$;

正切函数 $y=\tan x$; 余切函数 $y=\cot x$;

正割函数 $y=\sec x$; 余割函数 $y=\csc x$.

它们都是周期函数且 $\sin x$ 和 $\cos x$ 有界, 其余 4 个无界.

可以知道: $\tan x \cdot \cot x = 1$; $\sin x \cdot \csc x = 1$; $\cos x \cdot \sec x = 1$.

三角函数中的角度通常用弧度制表示.

(6) 反三角函数

三角函数的反函数叫做反三角函数, 由于三角函数都是周期函数, 所以只能在指定的主值区间内得到单值的反三角函数. 反三角函数相应的也有六个, 分别讨论如下.

反正弦函数: 我们知道正弦函数 $y=\sin x$ 对定义域 $(-\infty, +\infty)$ 上的每个 x 值, 因变量 y 都在 $[-1, 1]$ 上有唯一的值与它对应. 但反过来, 对于 y 在 $[-1, 1]$ 上的每一个值, x 总有无穷多个值与之对应, 因此, 可以说函数 $y=\sin x, x \in (-\infty, +\infty)$ 没有反函数.

但从图 1-7 可以看出, 在正弦函数的单调区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上, 对于 x 的每一个值, $y=\sin x$ 在 $[-1, 1]$ 上有唯一的值与之对应; 反过来, 对于 y 在 $[-1, 1]$ 上的每一个值, x 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上也有唯一的值与之对应, 构成一一对应关系. 因此, 函数 $y=\sin x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 就有反函数, 我们称这