高等学校教学用書

数学分析原理

第一卷 第二分册

Г. М. 菲赫金哥尔茨著

高等教育出版社

数 学 分 析 原 理

第一卷　第二分冊

F. M. 菲赫金哥尔茨著

丁 寿 田 譯

高 等 教 育 出 版 社

本书系根据苏联国立技术理論书籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）出版的菲赫金哥尔茨（Г. М. Фихтенгольц）著“数学分析原理”（Основы математического анализа）第一卷 1957 年第三版譯出。原书經苏联高等教育部审定为綜合大学数学力学系和数学物理系教科书以及师范学院数学物理系教学参考书。

全书共二卷，第一卷中譯本分二分册出版。第二分册的內容是：单变量函数的不定积分、定积分、近似积分法以及定积分在几何与物理等方面的应用，最后还附添一章数学分析基本观念发展簡史。

数学分析原理

第一卷　第二分册

Г. М. 菲赫金哥尔茨著

丁　寿　田　譯

高等教育出版社出版　北京宣武門內承恩寺 7 号

（北京市书刊出版业营业許可証出字第 054 号）

外文印刷厂印装　新华书店发行

統一书号 13010·750　开本 830×1168 1/32　印張 5 7/16

字数 130,000　印数 0001—1,5000　定价（6）¥0.55

1960 年 4 月第 1 版　1960 年 4 月北京第 1 次印刷

第一卷第二分册目录

第十三章　微分学的一些几何应用……421

第十四章　数学分析基本观念发生簡史……443

第十章　原函数
（不定积分）

§1. 不定积分及其最簡单的計算法

155. 原函数概念（及不定积分概念）　在許多科学技术問題中，需要由已知导函数还原为原函数。

在78段里，我們假設了已知运动方程 $s=f(t)$，即路程随时間的变化而变化的規律，我們用微分法先找出了速度 $v=\dfrac{ds}{dt}$，然后又找出了加速度 $a=\dfrac{dv}{dt}$。但事实上常常需要解决反面的問題：給出了加速度 a，为时間 t 的函数 $a=a(t)$，而要来决定速度 v 及所历路程 s 与 t 的关系。如此，这里就要由函数 $a=a(t)$ 来还原到那个以 a 为导函数的函数 $v=v(t)$，然后，知道了函数 v，来找那个导函数为 v 的函数 $s=s(t)$。

同样，在78段里，我們知道了沿 x 軸上直綫段 $[0,x]$ 連續分布的質量 $m=m(x)$，而用微分法找到了"綫性"密度 $\rho=\rho(x)$。但自然发生这样一个問題：如何由已知密度变化律 $\rho=\rho(x)$ 来寻找所分布的質量本身？这仍然就是要由已知函数 $\rho(x)$ 来求那个以 ρ 为导函数的原函数 $m=m(x)$。

一个已知区間 $\mathscr{X}$ 上的函数 $F(x)$ 叫做函数 $f(x)$ 的原函数[1]或 $f(x)$ 的积分，如果在此整个区間上 $f(x)$ 是函数 $F(x)$ 的导函数，或者就是說，如果 $f(x)dx$ 是 $F(x)$ 的微分：

$$F'(x)=f(x)\ \text{或}\ dF(x)=f(x)dx^{②}.$$

---

① "原函数"这个名称始于拉格朗日（参閱第一分册147頁底注）。

② 在这情形也說，函数 $F(x)$ 是微分式 $f(x)\,dx$ 的原函数（或积分）。

求一个函数的全体原函数叫做它的“积分”或“求积”，并且这是积分学里的問題之一；显然，这就是微分学基本問題的反面。

定理 如果在某一个(有限的或无限的,閉的或开的)区間$\mathscr{X}$上，函数$F(x)$是函数$f(x)$的原函数，則函数$F(x)+C$在C为任何常数时也为其原函数。反之，区間$\mathscr{X}$上$f(x)$的每个原函数都可以表成这个形式。

証 函数$F(x)+C$与$F(x)$同为$f(x)$的原函数，这一点是很明显的，因为$[F(x)+C]'=F'(x)=f(x)$。

現在設$\Phi(x)$是函数$f(x)$的任一原函数，而在区間$\mathscr{X}$上有

$$\Phi'(x)=f(x).$$

既然函数$F(x)$与$\Phi(x)$在該区間上有同一导函数，則它們相差一个常数[**110**段，推論]：

$$\Phi(x)=F(x)+C,$$

这就是所要証明的。

由此定理可見，只要知道函数$f(x)$的一个原函数$F(x)$，也就知道它的所有原函数了，因为它們彼此只差一常数項。

因此，$F(x)+C$这个含任意常数C的式子就是具有导函数$f(x)$或微分$f(x)dx$的函数的一般形式。这个式子就是函数$f(x)$的不定积分而表以符号

$$\int f(x)dx,$$

其中已經涵蓄有任意常数在內。乘积$f(x)dx$称为被积式，而函数$f(x)$称为被积函数。

例 設$f(x)=x^2$；于是不难看出，这个函数的不定积分就是

$$\int x^2dx=\frac{x^3}{3}+C.$$

这很容易用逆运算——微分法来核驗。

在此提醒讀者注意：“积分”号$\int$下要写的是所求原函数的微

分，而不是导函数（在上例中要写的是 x^2dx，而不是 x^2）。下面 175 段将要說明，这种写法乃出于历史傳統；它表現許多优点，因此保持这种傳統是合理的。

由不定积分的定义可直接推出下列性质：

1. $$d\int f(x)dx=f(x)dx,$$

卽符号 d 与 $\int$ 当 d 在前时相互抵消。

2. 旣然 $F(x)$ 是 $F'(x)$ 的原函数，我們有

$$\int F'(x)dx=F(x)+C,$$

这也可写成

$$\int dF(x)=F(x)+C.$$

由此可見，$F(x)$ 前的符号 d 与 $\int$ 当 d 居后时也可相互抵消，但須在 $F(x)$ 上添补一个任意常数。

回到开头那个力学問題，現在我們可以写

$$v=\int a(t)dt \quad \text{及} \quad s=\int v(t)dt.$$

为确定起見，假設所指乃等加速运动，例如在重力作用之下；于是 $a=g$（若鉛垂方向朝下算作正向）并且不难了解

$$v=\int gdt=gt+C.$$

我們得出了速度 v 的一个表出式，其中除时間 t 外还含有一个任意常数 C。在不同 C 値之下，在同一瞬間也可得出种种不同的速度之値，所以我們現有的資料还不足完全解决問題。要完全解决問題，只要知道任一瞬間的速度値就够了。例如，設我們知道在 $t=t_0$ 时速度 $v=v_0$；将这些値代入所得速度表达式

$$v_0=gt_0+C, \quad \text{由此得} \quad C=v_0-gt_0,$$

現在我們的解就成为完全确定的形式：

$$v=g(t-t_0)+v_0.$$

其次，我們来找路程 s 的式子。我們有

$$s=\int[g(t-t_0)+v_0]dt=\frac{1}{2}g(t-t_0)^2+v_0(t-t_0)+C'$$

(用微分法很容易驗証原函数可取这样的形式)。这个新的未知常数 C' 可以这样来决定：例如，給定在瞬間 $t=t_0$ 路程 $s=s_0$；如此找出了 $C'=s_0$，于是所求的解可写成这最后的形式：

$$s=\frac{1}{2}g(t-t_0)^2+v_0(t-t_0)+s_0.$$

t_0, s_0, v_0 諸值相約称为 t, s, v 諸变量的初值。

同样可以写

$$m=\int\rho(x)dx.$$

这里积分时出現常数 C；这回它可由“$x=0$ 时質量 m 也应化为 0”这个条件来决定。

156. 积分与求面积問題 旣然历史上原函数概念是密切联系着求面积問題的，那末我們在此就来講一講这个問題(采用的是平面图形面积的直覚概念，这問題的严密提法則留待第十二章再討論)。

設在区間 $[a, b]$ 上給定了一个連續函数 $y=f(x)$，只取正値(非負値)。我們来看这个图形 $ABCD$(图 63)，它由曲綫 $y=f(x)$，縱坐标綫 $x=a$ 和 $x=b$ 及 x 軸的一段所包圍；这种图形叫做曲綫梯形。要决定这个图形的面积 P，我們来考察变动图形 $AKLD$ 的面积的变化情况，这个图形是包圍在初縱标綫 $x=a$ 及相应于

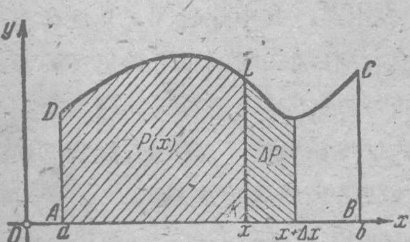

图 63.

区間 $[a, b]$ 上任一 x 值的縱标綫之間的。在 x 变化时該面积也随着变化，而对每一 x 值都有其一个完全确定的相应値，如此曲綫梯形 $AKLD$ 的面积是 x 的一个函数；表之以 $P(x)$。

現在我們的問題是要来找这个函数的导数。因此我們給 x 一个增量 Δx（比方說是正的罢）；于是面积 $P(x)$ 也得一相应增量 ΔP。

設以 m 和 M 各表函数 $f(x)$ 在区間 $[x, x+\Delta x]$ 上的最小值和最大値[73 段]，然后将面积 ΔP 与以 Δx 为底 m 和 M 为高的矩形面积作比較。显然有

$$m\Delta x < \Delta P < M\Delta x,$$

因此

$$m < \frac{\Delta P}{\Delta x} < M.$$

若 $\Delta x \to 0$，則由于連續性 m 和 M 将趋于 $f(x)$ 而此时也就

$$P'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta x} = f(x).$$

如此，我們导出了这个著名的定理——世称牛頓-莱卜尼兹定理①——变动面积 $P(x)$ 对有限横标的导数就等于有限縱标 $y = f(x)$。

換句話說，变动面积 $P(x)$ 就是所給函数 $y = f(x)$ 的一个原函数。这个原函数在一切其他原函数中具有这样的特征：它在 $x=0$ 时化为 0。所以，只要知道函数 $f(x)$ 的任何一个原函数 $F(x)$，并按前段的定理

$$P(x) = F(x) + C,$$

則常数 C 就容易决定，在此令 $x = a$:

① 事实上，这个命题已由牛頓的学生艾薩克·巴尔罗（1630—1677）所发表，虽然形式不同。

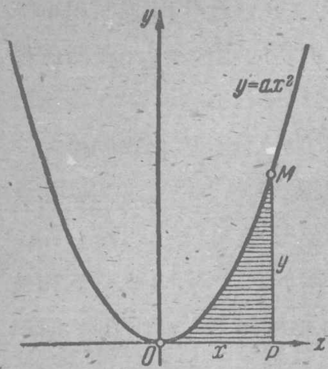

图 64.

$$0=F(a)+C,\ \text{如此得}\ C=-F(a).$$

終于得出

$$P(x)=F(x)-F(a).$$

要得整个曲綫梯形 $ABCD$ 的面积 P 則只須取 $x=b$:

$$P=F(b)-F(a).$$

作为一个例子，我們来求这样一个[形的面积 $P(x)$：它由抛物綫 $y=ax^2$，[应于所給 x 值的縱标綫及 x 軸的一段所[成（图 64）；既然該抛物綫切 x 軸于坐标[点，則 x 的初値在此等于 0。函数 $f(x)=ax^2$ 的原函数容易找出：$F(x)=\frac{ax^3}{3}$。这函数恰好在 $x=0$ 时化为 0，如此

$$P(x)=F(x)=\frac{ax^3}{3}=\frac{xy}{3}$$

[参閱 43 段 3]。

有鉴于这种計算积分与求平面图形面积的关系，或者說与[方的关系①，通常也就称积分的計算为成方或求积。

要把以上所說的完全推广到函数也取負值的情形，只須約[将图形落在 x 軸下面部分的面积算作負的。

如此，不論 $f(x)$ 在区間 $[a, b]$ 上是一个怎样的函数，讀者总[以想象其原函数为該函数图象所圍的变动面积。但把这种几何[明当作原函数存在的証明当然是不行的，因为面积概念本身还[有严格建立。

在下一章 **183** 段我們将能对这个重要事实給一严密的純解[的証明：每个在某区間里連續的函数在該区間里必有原函数。[前我們先承認这个事实。

① квадратура 一字原系"将图形化为方形"以便計算面积之意，通常也就[为求积分而与 интегрирование 沒有分別——譯者注。

在本章里凡称原函数都只对連續函数而言。如果一个函数具体給出而有不連續点，則我們只考虑使它連續的区間。因此，承認了上面所陈述的事实以后，我們就无需每次都声明积分的存在：我們所考虑的积分全是存在的。

157. 基本积分表 微分学里每个确定某函数 $F(x)$ 的导函数是 $f(x)$ 的公式都可以导出一个相应的积分公式

$$\int f(x)dx=F(x)+C.$$

把 81 段的初等函数微分法公式搬过来，我們馬上就能做出下面这个积分表：

1. $\int 0\cdot dx=C$

2. $\int 1\cdot dx=\int dx=x+C$

3. $\int x^{\mu}dx=\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C\quad(\mu\neq-1)$

4. $\int\frac{1}{x}dx=\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C$

5. $\int\frac{1}{1+x^2}dx=\int\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x+C$

6. $\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C$

7. $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C,\quad\int e^x dx=e^x+C$

8. $\int\sin x\,dx=-\cos x+C$

9. $\int\cos x\,dx=\sin x+C$

10. $\int\frac{1}{\sin^2x}dx=\int\frac{dx}{\sin^2x}=-\operatorname{ctg}x+C$

11. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$

关于公式 4 我們略作解釋：它适用于任何不包含 0 的区間。事实上，如果这个区間落在 0 的右边，所以 $x>0$，而由已知微分法公式 $[\ln x]' = \frac{1}{x}$ 立即推知

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C.$$

如果該区間落在 0 的左边而 $x<0$，則由微分法容易看出 $[\ln(-x)]' = \frac{1}{x}$，因此

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C.$$

这两个公式合并起来就成公式 4。

上面这积分表的应用范圍可以由积分法則予以扩充。

158. 最簡单的积分法則 I. 若 a 为常数 $(a \neq 0)$，則

$$\int a \cdot f(x) dx = a \cdot \int f(x) dx.$$

事实上，微分等式右边，得[91 段，I]

$$d\left[a \cdot \int f(x) dx\right] = a \cdot d\left[\int f(x) dx\right] = a \cdot f(x) dx,$$

所以这个式子就是微分式 $a \cdot f(x) dx$ 的原函数，这就是所要証明的。

如此，常数因子可以提到积分号外面来。

II. $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$

微分等式右边[参閱 91 段，II]：

$$d\left[\int f(x) dx \pm \int g(x) dx\right] = d\int f(x) dx \pm d\int g(x) dx =$$

$$= [f(x) \pm g(x)] dx;$$

如此，該式卽最后这个微分式的原函数，这就是所要証明的。

諸微分之和(或差)的不定积分等于各微分的积分之和(或差)。

注 对这两个公式我們加注如下。公式里的不定积分每个都含有任意常数項。这样的等式应理解为两边差一常数。有时这种等式也可按表面理解为完全相等，但此时其中所出現的积分有一个就不是任意的原函数了：它的常数在其它积分的常数值选定后也就跟着确定。这个重要的箋注此后要記在心头。

Ⅲ. 若

$$\int f(t)dt=F(t)+C,$$

則

$$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}\cdot F(ax+b)+C'.$$

事实上，該关系式卽等价于：

$$\frac{d}{dt}F(t)=F'(t)=f(t).$$

于是

$$\frac{d}{dx}F(ax+b)=F'(ax+b)\cdot a=a\cdot f(ax+b),$$

所以

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{a}F(ax+b)\right]=f(ax+b),$$

卽$\frac{1}{a}F(ax+b)$事实上为函数 $f(ax+b)$的原函数。

特別常見的是 $a=1$ 或 $b=0$ 时的情形：

$$\int f(x+b)dx=F(x+b)+C_1,\quad \int f(ax)dx=\frac{1}{a}F(ax)+C_2.$$

(其实法則 Ⅲ 是不定积分变量替換法則的一个很特殊的情形，

关于一般法則后面 160 段里要講。)

159. 例 1) $\int(6x^2-3x+5)dx$.

应用法則 Ⅱ 和 Ⅰ (及公式 3、2), 我們有:

$$\int(6x^2-3x+5)dx=\int 6x^2dx-\int 3xdx+\int 5dx=$$

$$=6\int x^2dx-3\int xdx+5\int dx=2x^3-\frac{3}{2}x^2+5x+C.$$

一般多項式也容易积分。

2) $$\int(1+\sqrt{x})^4dx=\int(1+4\sqrt{x}+6x+4x\sqrt{x}+x^2)dx=$$

$$=\int dx+4\int x^{\frac{1}{2}}dx+6\int xdx+4\int x^{\frac{3}{2}}dx+\int x^2dx=$$

$$=x+\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}+3x^2+\frac{8}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{3}x^3+C. \qquad (\text{Ⅱ}, \text{Ⅰ}; 3.2)$$

3) $$\int\frac{(x-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{\sqrt[3]{x}}dx=\int\frac{x\sqrt{x}-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx=$$

$$=\int x^{\frac{7}{6}}dx-\int x^{\frac{1}{6}}dx=\frac{6}{13}x^{\frac{13}{6}}-\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}}+C. \qquad (\text{Ⅱ}; 3)$$

我們給几个法則 Ⅲ 的应用实例:

4) (a) $$\int\frac{dx}{x-a}=\ln|x-a|+C, \qquad (\text{Ⅲ}; 4)$$

(б) $$\int\frac{dx}{(x-a)^k}=\int(x-a)^{-k}dx=$$

$(k>1)$

$$=\frac{1}{-k+1}(x-a)^{-k+1}+C=-\frac{1}{(k-1)(x-a)^{k-1}}+C. \qquad (\text{Ⅲ}; 3)$$

5) (a) $$\int\sin mxdx=-\frac{1}{m}\cos mx+C, \qquad (\text{Ⅲ}; 8)$$

$(m\neq 0)$

(б) $$\int\cos mxdx=\frac{1}{m}\sin mx+C. \qquad (\text{Ⅲ}; 9)$$

$(m\neq 0)$

6) (a) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C,$ (Ⅲ; 6)

$(a>0)$

(б) $\int \frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C.$ (Ⅲ; 5)

分母較复杂的分式如果先把它分解为几个分母較簡单的分式之和再来积分,往往可以容易一些。例如,

$$\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{(x-a)(x+a)}=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right);$$

所以

7) $\int \frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\left[\int \frac{dx}{x-a}-\int \frac{dx}{x+a}\right]=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C.$

某些三角函数式經适当初等变換后也可以用最簡单的法則来积分。显然,例如

$$\cos^2 mx=\frac{1+\cos 2mx}{2},\quad \sin^2 mx=\frac{1-\cos 2mx}{2},$$

因此

8) (a) $\int \cos^2 mx\,dx=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4m}\sin 2mx+C,$

(б) $\int \sin^2 mx\,dx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4m}\sin 2mx+C.$ $(m\neq 0)$

160. 变量替換积分法 我們来講一种最强的积分法——变量替換法或置換法。它所根据的是下面这一簡单的事实:

如果知道了

$$\int g(t)\,dt=G(t)+C,$$

則有

$$\int g(\overbrace{\omega(x)}^{t})\overbrace{\omega'(x)dx}^{dt}=G(\omega(x))+C.$$

[所有在此出現的函数 $g(t)$, $\omega(x)$, $\omega'(x)$ 都假設是連續的。]

这可直接由复合函数微分法則(見84段)

$$\frac{d}{dx}G(\omega(x))=G'(\omega(x))\cdot\omega'(x)=g(\omega(x))\cdot\omega'(x)$$

推出，只要注意到在此 $G'(t)=g(t)$。这也可以用另一种方式来表出：我們説，

$$dG(t)=g(t)dt,$$

这关系式在自变数 t 代以函数 $\omega(x)$ 时也仍成立(参閱 **92** 段)。

設要計算积分

$$\int f(x)dx.$$

在許多情形下，新变数可以选 x 的这样的函数：$t=\omega(x)$，使被积式变成这样形状：

$$f(x)dx=g(\omega(x))\cdot\omega'(x)dx, \tag{1}$$

这里 $g(t)$ 是一个比 $f(x)$ 便于积分的函数。于是，按上面所説，只要来找积分

$$\int g(t)dt=G(t)+C,$$

使經 $t=\omega(x)$ 这个置换后可由它得出所求的积分。通常也就簡写成

$$\int f(x)dx=\int g(t)dt, \tag{2}$$

而了解为在右边积分里的 t 的函数已做了上述替换。

例如，我們来求积分

$$\int \sin^3 x\cos x dx.$$

既然 $d\sin x=\cos x dx$，則令 $t=\sin x$，被积式变为

$$\sin^3 x\cos x dx=\sin^3 x d\sin x=t^3dt.$$

最后一式的积分很容易算出：

$$\int t^3dt=\frac{t^4}{4}+C.$$