

高等学校教学用书



数学分析原理

第一卷 第二分册

Г. М. 菲赫金哥尔茨著

高等教育出版社

数 学 分 析 原 理

第一卷 第二分册

F. M. 菲赫金哥尔茨著

丁 寿 田 译

高 等 教 育 出 版 社

本书系根据苏联国立技术理论书籍出版社 (Государственное издательство технико-теоретической литературы) 出版的菲赫金哥尔茨 (Г. М. Фихтенгольц) 著“数学分析原理” (Основы математического анализа) 第一卷 1957 年第三版译出。原书经苏联高等教育部审定为综合大学数学力学系和数学物理系教科书以及师范学院教学物理系教学参考书。

全书共二卷，第一卷中译本分二分册出版。第二分册的内容是：单变量函数的不定积分、定积分、近似积分法以及定积分在几何与物理等方面的应用，最后还附添一章数学分析基本观念发展简史。

数学分析原理

第一卷 第二分册

Г. М. 菲赫金哥尔茨著

丁寿田译

高等教育出版社出版 北京宣武门内承恩寺7号

(北京市书刊出版业营业许可证书出字第054号)

外文印刷厂印装 新华书店发行

统一书号 13010·750 开本 830×1108 $\frac{1}{32}$ 印张 57 $\frac{1}{16}$

字数 130,000 印数 0001—1,5000 定价 (6) 元 0.55

1950年4月第1版 1950年4月北京第1次印刷

第一卷第二分册目录

第十章 原函数(不定积分).....299

§ 1. 不定积分及其最简单的计算法
.....299

155. 原函数概念(及不定积分概念)
.....299

156. 积分与求面积问题.....302

157. 基本积分表.....305

158. 最简单的积分法则.....306

159. 例.....308

160. 变量替换积分法.....309

161. 例.....312

162. 分部积分法.....314

163. 例.....315

§ 2. 有理式的积分.....318

164. 有限形式积分法问题的提出.....318

165. 简单分数及其积分.....319

166. 真分式的积分.....321

167. 奥斯特罗格拉德斯基的积
分有理部分分出法.....323

§ 3. 某些根式的积分法.....327

168. $R\left(x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}\right) dx$ 型根式
的积分法.....327

169. 二项式微分的积分法.....328

170. $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$ 型根式
的积分法·欧拉氏置换法.....330

§ 4. 含有三角函数及指数函数的
式子的积分法.....335

171. 微分式 $R(\sin x, \cos x) dx$
的积分法.....335

172. 其他情形概述.....339

§ 5. 椭圆积分.....340

173. 定义.....340

174. 化为典式.....341

第十一章 定积分.....343

§ 1. 定积分定义及存在条件.....343

175. 解决面积问题的另一途径.....343

176. 定义.....345

177. 达布和.....346

178. 积分存在条件.....349

179. 可积函数类别.....351

§ 2. 定积分性质.....353

180. 依有向区间的积分.....353

181. 可用等式表出的性质.....354

182. 可用不等式表出的性质.....356

183. 定积分作为上限的函数.....360

§ 3. 定积分的计算及变换.....363

184. 用积分和的计算.....363

185. 积分学基本公式.....365

186. 定积分中变数替换公式.....366

187. 定积分的分部积分法.....368

188. 瓦里斯公式.....370

§ 4. 积分的近似计算.....371

189. 梯形公式.....371

190. 抛物线公式.....373

191. 近似公式的余项.....376

192. 例.....379

第十二章 积分学的几何应用及 力学应用.....381

§ 1. 面积及体积	381
193. 面积概念的定义, 可求积区域	381
194. 面积的可加性	383
195. 面积作为极限	384
196. 以积分表出面积	385
197. 体积概念的定义及其性质	390
198. 以积分表出体积	392
§ 2. 弧长	398
199. 弧长概念的定义	398
200. 辅助定理	401
201. 以积分表出弧长	402
202. 变弧及其微分	406
203. 空间曲线的弧长	408
§ 3. 力学及物理上的数量的计算	408
204. 定积分应用程式	408
205. 迴轉面面积	411
206. 曲线的静力矩及重心的求法	414
207. 平面图形的静力矩及重心的求法	417
208. 力功	419

第十三章 微分学的一些几何应用

§ 1. 切线及切面	421
209. 平面曲线的解析表出法	421
210. 平面曲线的切线	423
211. 切线的正方向	427
212. 空间曲线	429
213. 曲面的切面	431
§ 2. 平面曲线的曲率	434
214. 凹向, 拐点	434

215. 曲率概念	436
216. 曲率圆及曲率半径	440

第十四章 数学分析基本观念发生简史

§ 1. 微积分前史	443
217. 十七世纪与无穷小分析	443
218. 不可分素方法	443
219. 不可分素学说的进一步发展	446
220. 求最大及最小(极大极小)的切线作法	449
221. 借助运动学想法来作切线	451
222. 切线作法问题与求积问题的互逆性	452
223. 以前的总结	453
§ 2. 依薩克·牛頓	454
224. 流数计算法	454
225. 流数计算法的逆计算法: 求积	457
226. 牛頓的“原理”及极限理论萌芽	460
227. 牛頓的奠基问题	460
§ 3. 萊卜尼茲	461
228. 建立新计算法的初步	461
229. 最先刊行的微分学著作	462
230. 最先刊行的积分学著作	464
231. 萊卜尼茲的其他著作, 学派的建立	465
232. 萊卜尼茲的奠基问题	466
233. 結尾語	467

第十章 原函数

(不定积分)

§ 1. 不定积分及其最简单的計算法

155. 原函数概念(及不定积分概念) 在許多科学技术問題中, 需要由已知导函数还原为原函数。

在 78 段里, 我們假設了已知运动方程 $s=f(t)$, 即路程随時間的变化而变化的規律, 我們用微分法先找出了速度 $v=\frac{ds}{dt}$, 然后又找出了加速度 $a=\frac{dv}{dt}$ 。但事实上常常需要解决反面的問題: 給出了加速度 a , 为時間 t 的函数 $a=a(t)$, 而要求决定速度 v 及所历路程 s 与 t 的关系。如此, 这里就要由函数 $a=a(t)$ 来还原到那个以 a 为导函数的函数 $v=v(t)$, 然后, 知道了函数 v , 来找那个导函数为 v 的函数 $s=s(t)$ 。

同样, 在 78 段里, 我們知道了沿 x 軸上直綫段 $[0, x]$ 連續分布的質量 $m=m(x)$, 而用微分法找到了“綫性”密度 $\rho=\rho(x)$ 。但自然发生这样一个問題: 如何由已知密度变化律 $\rho=\rho(x)$ 来寻找所分布的質量本身? 这仍然就是要由已知函数 $\rho(x)$ 来求那个以 ρ 为导函数的原函数 $m=m(x)$ 。

一个已知区間 \mathcal{X} 上的函数 $F(x)$ 叫做函数 $f(x)$ 的原函数^① 或 $f(x)$ 的积分, 如果在此整个区間上 $f(x)$ 是函数 $F(x)$ 的导函数, 或者就是說, 如果 $f(x)dx$ 是 $F(x)$ 的微分:

$$F'(x) = f(x) \text{ 或 } dF(x) = f(x)dx^{\textcircled{2}}$$

① “原函数”这个名称始于拉格朗日(參閱第一分册 147 頁底注)。

② 在这情形也說, 函数 $F(x)$ 是微分式 $f(x)dx$ 的原函数(或积分)。

求一个函数的全体原函数叫做它的“积分”或“求积”，并且这是积分学里的问题之一；显然，这就是微分学基本问题的反面。

定理 如果在某一个(有限的或无限的, 闭的或开的)区间 \mathcal{A} 上, 函数 $F(x)$ 是函数 $f(x)$ 的原函数, 则函数 $F(x) + C$ 在 C 为任何常数时也为其原函数。反之, 区间 \mathcal{A} 上 $f(x)$ 的每个原函数都可以表成这个形式。

证 函数 $F(x) + C$ 与 $F(x)$ 同为 $f(x)$ 的原函数, 这一点是很明显的, 因为 $[F(x) + C]' = F'(x) = f(x)$ 。

现在设 $\Phi(x)$ 是函数 $f(x)$ 的任一原函数, 而在区间 \mathcal{A} 上有

$$\Phi'(x) = f(x).$$

既然函数 $F(x)$ 与 $\Phi(x)$ 在该区间上有同一导函数, 则它们相差一个常数 [110 段, 推论]:

$$\Phi(x) = F(x) + C,$$

这就是所要证明的。

由此定理可见, 只要知道函数 $f(x)$ 的一个原函数 $F(x)$, 也就知道它的所有原函数了, 因为它们彼此只差一常数项。

因此, $F(x) + C$ 这个含任意常数 C 的式子就是具有导函数 $f(x)$ 或微分 $f(x)dx$ 的函数的一般形式。这个式子就是函数 $f(x)$ 的不定积分而表以符号

$$\int f(x)dx,$$

其中已经涵蓄有任意常数在内。乘积 $f(x)dx$ 称为被积式, 而函数 $f(x)$ 称为被积函数。

例 设 $f(x) = x^2$; 于是不难看出, 这个函数的不定积分就是

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C.$$

这很容易用逆运算——微分法来核驗。

在此提醒讀者注意: “积分”号 \int 下要写的是所求原函数的微

分,而不是导函数(在上例中要写的是 $x^2 dx$, 而不是 x^2)。下面 175 段将要说明,这种写法乃出于历史传统;它表现许多优点,因此保持这种传统是合理的。

由不定积分的定义可直接推出下列性质:

$$1. \quad d \int f(x) dx = f(x) dx,$$

即符号 d 与 \int 当 d 在前时相互抵消。

2. 既然 $F(x)$ 是 $F'(x)$ 的原函数,我们有

$$\int F'(x) dx = F(x) + C,$$

这也可写成

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

由此可见, $F(x)$ 前的符号 d 与 \int 当 d 居后时也可相互抵消,但须在 $F(x)$ 上添补一个任意常数。

回到开头那个力学问题,现在我们可以写

$$v = \int a(t) dt \quad \text{及} \quad s = \int v(t) dt.$$

为确定起见,假设所指乃等加速运动,例如在重力作用之下;于是 $a = g$ (若铅垂方向朝下算作正向)并且不难了解

$$v = \int g dt = gt + C.$$

我们得出了速度 v 的一个表出式,其中除时间 t 外还含有一个任意常数 C 。在不同 C 值之下,在同一瞬间也可得出种种不同的速度之值,所以我们现有的资料还不足完全解决问题。要完全解决问题,只要知道任一瞬间的速度值就够了。例如,设我们知道在 $t = t_0$ 时速度 $v = v_0$; 将这些值代入所得速度表达式

$$v_0 = gt_0 + C, \quad \text{由此得} \quad C = v_0 - gt_0,$$

现在我们的解就成为完全确定的形式:

$$v = g(t - t_0) + v_0.$$

其次，我們来找路程 s 的式子。我們有

$$s = \int [g(t - t_0) + v_0] dt = \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0) + C'$$

(用微分法很容易验证原函数可取这样的形式)。这个新的未知常数 C' 可以这样来决定：例如，给定在瞬间 $t = t_0$ 路程 $s = s_0$ ；如此找出了 $C' = s_0$ ，于是所求的解可写成这最后的形式：

$$s = \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0) + s_0.$$

t_0, s_0, v_0 諸值相約称为 t, s, v 諸变量的初值。

同样可以写

$$m = \int \rho(x) dx.$$

这里积分时出现常数 C ；这回它可由“ $x = 0$ 时质量 m 也应化为 0”这个条件来决定。

156. 积分与求面积問題 既然历史上原函数概念是密切联系着求面积問題的，那末我們在此就来讲一讲这个問題(采用的是平面图形面积的直觉概念，这問題的严密提法则留待第十二章再討論)。

設在区間 $[a, b]$ 上給定了一个連續函数 $y = f(x)$ ，只取正值(非負值)。我們来看这个图形 $ABCD$ (图 63)，它由曲綫 $y = f(x)$ ，

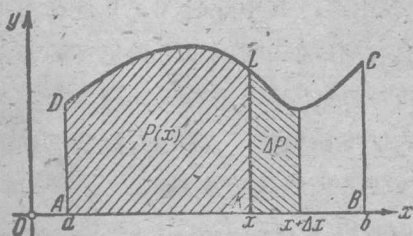


图 63.

縱坐标綫 $x = a$ 和 $x = b$ 及 x 軸的一段所包圍；这种图形叫做曲綫梯形。要决定这个图形的面积 P ，我們来考察变动图形 $AKLD$ 的面积的变化情况，这个图形是包圍在初縱标綫 $x = a$ 及相应于

區間 $[a, b]$ 上任一 x 值的縱標綫之間的。在 x 变化时該面积也隨着变化, 而对每一 x 值都有其一个完全确定的相应值, 如此曲綫梯形 $AKLD$ 的面积是 x 的一个函数; 表之以 $P(x)$ 。

現在我們的問題是要来找这个函数的导数。因此我們給 x 一个增量 Δx (比方說是正的罢); 于是面积 $P(x)$ 也得一相应增量 ΔP 。

設以 m 和 M 各表函数 $f(x)$ 在區間 $[x, x + \Delta x]$ 上的最小值和最大值 [73 段], 然后将面积 ΔP 与以 Δx 为底 m 和 M 为高的矩形面积作比較。显然有

$$m\Delta x < \Delta P < M\Delta x,$$

因此

$$m < \frac{\Delta P}{\Delta x} < M.$$

若 $\Delta x \rightarrow 0$, 則由于連續性 m 和 M 将趋于 $f(x)$ 而此时也就

$$P'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta x} = f(x).$$

如此, 我們导出了这个著名的定理——世称牛頓-萊卜尼茲定理^①——变动面积 $P(x)$ 对有限橫标的导数就等于有限縱标 $y = f(x)$ 。

換句話說, 变动面积 $P(x)$ 就是所給函数 $y = f(x)$ 的一个原函数。这个原函数在一切其他原函数中具有这样的特征: 它在 $x=0$ 时化为 0。所以, 只要知道函数 $f(x)$ 的任何一个原函数 $F(x)$; 并按前段的定理

$$P(x) = F(x) + C,$$

則常数 C 就容易决定, 在此令 $x=a$:

① 事实上, 这个命題已由牛頓的学生艾薩克·巴尔罗 (1630—1677) 所发表, 虽然形式不同。

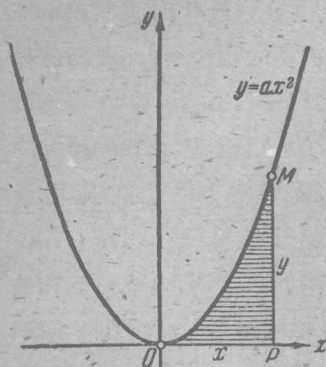


图 64.

点，则 x 的初值在此等于 0。函数 $f(x) = ax^2$ 的原函数容易找出： $F(x) = \frac{ax^3}{3}$ 。这函数恰好在 $x=0$ 时化为 0，如此

$$P(x) = F(x) = \frac{ax^3}{3} = \frac{xy}{3}$$

[参阅 43 段 3]。

有鉴于这种计算积分与求平面图形面积的关系，或者说与方的关系^①，通常也就称积分的计算为成方或求积。

要把以上所说的完全推广到函数也取负值的情形，只须约将图形落在 x 轴下面部分的面积算作负的。

如此，不论 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上是一个怎样的函数，读者总以想象其原函数为该函数图象所围的变动面积。但把这种几何明当作原函数存在的证明当然是不行的，因为面积概念本身还有严格建立。

在下一章 183 段我们将能对这个重要事实给一严密的纯解的证明：每个在某区间里连续的函数在该区间里必有原函数。前我们先承认这个事实。

^① квадратура 一字原系“将图形化为方形”以便计算面积之意，通常也就为求积分而与 интегрирование 没有分别——译者注。

$0 = F(a) + C$ ，如此得 $C = -F(a)$ 。

终于得出

$$P(x) = F(x) - F(a).$$

要得整个曲线梯形 $ABCD$ 的面积 P 则只须取 $x=b$ ：

$$P = F(b) - F(a).$$

作为一个例子，我们来求这样一个图形的面积 $P(x)$ ：它由抛物线 $y = ax^2$ ，应于所给 x 值的纵标线及 x 轴的一段所成(图 64)；既然该抛物线切 x 轴于坐标

在本章里凡称原函数都只对連續函数而言。如果一个函数具体給出而有不連續点,則我們只考虑使它連續的区間。因此,承認了上面所陈述的事实以后,我們就无需每次都声明积分的存在:我們所考虑的积分全是存在的。

157. 基本积分表 微分学里每个确定某函数 $F(x)$ 的导函数是 $f(x)$ 的公式都可以导出一个相应的积分公式

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

把 81 段的初等函数微分法公式搬过来,我們馬上就能做出下面这个积分表:

$$1. \int 0 \cdot dx = C$$

$$2. \int 1 \cdot dx = \int dx = x + C$$

$$3. \int x^\mu dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1)$$

$$4. \int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$$

$$5. \int \frac{1}{1+x^2} dx = \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$$

$$6. \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsin} x + C$$

$$7. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad \int e^x dx = e^x + C$$

$$8. \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$9. \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$10. \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$11. \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

关于公式 4 我們略作解釋：它适用于任何不包含 0 的区間。事实上，如果这个区間落在 0 的右边，所以 $x > 0$ ，而由已知微分法公式 $[\ln x]' = \frac{1}{x}$ 立即推知

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C.$$

如果該区間落在 0 的左边而 $x < 0$ ，則由微分法容易看出 $[\ln(-x)]' = \frac{1}{x}$ ，因此

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C.$$

这两个公式合并起来就成公式 4。

上面这积分表的应用范围可以由积分法則予以扩充。

158. 最简单的积分法則 I. 若 a 为常数 ($a \neq 0$)，則

$$\int a \cdot f(x) dx = a \cdot \int f(x) dx.$$

事实上，微分等式右边，得 [91 段, I]

$$d[a \cdot \int f(x) dx] = a \cdot d[\int f(x) dx] = a \cdot f(x) dx,$$

所以这个式子就是微分式 $a \cdot f(x) dx$ 的原函数，这就是所要証明的。

如此，常数因子可以提到积分号外面来。

$$\text{II. } \int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

微分等式右边 [参閱 91 段, II]:

$$\begin{aligned} d[\int f(x) dx \pm \int g(x) dx] &= d\int f(x) dx \pm d\int g(x) dx = \\ &= [f(x) \pm g(x)] dx; \end{aligned}$$

如此，該式即最后这个微分式的原函数，这就是所要证明的。

諸微分之和(或差)的不定积分等于各微分的积分之和(或差)。

注 对这两个公式我們加注如下。公式里的不定积分每个都含有任意常数項。这样的等式应理解为两边差一常数。有时这种等式也可按表面理解为完全相等，但此时其中所出現的积分有一个就不是任意的原函数了：它的常数在其它积分的常数值选定后也就跟着确定。这个重要的箋注此后要記在心头。

Ⅲ. 若

$$\int f(t) dt = F(t) + C,$$

則

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} \cdot F(ax+b) + C'.$$

事实上，該关系式即等价于：

$$\frac{d}{dt} F(t) = F'(t) = f(t).$$

于是

$$\frac{d}{dx} F(ax+b) = F'(ax+b) \cdot a = a \cdot f(ax+b),$$

所以

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{a} F(ax+b) \right] = f(ax+b),$$

即 $\frac{1}{a} F(ax+b)$ 事实上为函数 $f(ax+b)$ 的原函数。

特別常見的是 $a=1$ 或 $b=0$ 时的情形：

$$\int f(x+b) dx = F(x+b) + C_1, \quad \int f(ax) dx = \frac{1}{a} F(ax) + C_2.$$

(其实法則Ⅲ是不定积分变量替换法則的一个很特殊的情形，

关于一般法則后面 160 段里要讲。)

$$159. \text{例 } 1) \int (6x^2 - 3x + 5) dx.$$

应用法則 II 和 I (及公式 3, 2), 我們有:

$$\begin{aligned} \int (6x^2 - 3x + 5) dx &= \int 6x^2 dx - \int 3x dx + \int 5 dx = \\ &= 6 \int x^2 dx - 3 \int x dx + 5 \int dx = 2x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x + C. \end{aligned}$$

一般多項式也容易积分。

$$\begin{aligned} 2) \int (1 + \sqrt{x})^4 dx &= \int (1 + 4\sqrt{x} + 6x + 4x\sqrt{x} + x^2) dx = \\ &= \int dx + 4 \int x^{\frac{1}{2}} dx + 6 \int x dx + 4 \int x^{\frac{3}{2}} dx + \int x^2 dx = \\ &= x + \frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}} + 3x^2 + \frac{8}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{3}x^3 + C. \quad (\text{II, I; 3, 2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \int \frac{(x - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})}{\sqrt[3]{x}} dx &= \int \frac{x\sqrt{x} - \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx = \\ &= \int x^{\frac{7}{6}} dx - \int x^{\frac{1}{6}} dx = \frac{6}{13}x^{\frac{13}{6}} - \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} + C. \quad (\text{II; 3}) \end{aligned}$$

我們給几个法則 III 的应用实例:

$$4) \text{ (a) } \int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C, \quad (\text{II; 4})$$

$$\begin{aligned} \text{(6) } \int \frac{dx}{(x-a)^k} &= \int (x-a)^{-k} dx = \\ & \quad (k > 1) \\ &= \frac{1}{-k+1} (x-a)^{-k+1} + C = -\frac{1}{(k-1)(x-a)^{k-1}} + C. \quad (\text{II; 3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) \text{ (a) } \int \sin mx dx &= -\frac{1}{m} \cos mx + C, \quad (\text{II; 8}) \\ & \quad (m \neq 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(6) } \int \cos mx dx &= \frac{1}{m} \sin mx + C, \quad (\text{II; 9}) \\ & \quad (m \neq 0) \end{aligned}$$

$$6) (a) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad (\text{II}; 6)$$

($a > 0$)

$$(6) \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C. \quad (\text{II}; 5)$$

分母較复杂的分式如果先把它分解为几个分母較简单的分式之和再来积分, 往往可以容易一些。例如,

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right);$$

所以

$$7) \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \left[\int \frac{dx}{x-a} - \int \frac{dx}{x+a} \right] = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$$

某些三角函数式經适当初等变换后也可以用最简单的法則来积分。

显然, 例如

$$\cos^2 mx = \frac{1 + \cos 2mx}{2}, \quad \sin^2 mx = \frac{1 - \cos 2mx}{2};$$

因此

$$8) (a) \int \cos^2 mx dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4m} \sin 2mx + C,$$

$$(6) \int \sin^2 mx dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4m} \sin 2mx + C. \quad (m \neq 0)$$

160. 变量替换积分法 我們来講一种最强的积分法——**变量替换法**或**置換法**。它所根据的是下面这一简单的事实:

如果知道了

$$\int g(t) dt = G(t) + C,$$

則有

$$\int g(\omega(x)) \omega'(x) dx = G(\omega(x)) + C.$$

[所有在此出現的函数 $g(t)$, $\omega(x)$, $\omega'(x)$ 都假設是連續的。]

这可直接由复合函数微分法則(見 84 段)

$$\frac{d}{dx}G(\omega(x)) = G'(\omega(x)) \cdot \omega'(x) = g(\omega(x)) \cdot \omega'(x)$$

推出, 只要注意到在此 $G'(t) = g(t)$ 。这也可以用另一种方式来表出: 我們說,

$$dG(t) = g(t)dt,$$

这关系式在自变数 t 代以函数 $\omega(x)$ 时也仍成立(參閱 92 段)。

設要計算积分

$$\int f(x)dx.$$

在許多情形下, 新变数可以选 x 的这样的函数: $t = \omega(x)$, 使被积式变成这样形状:

$$f(x)dx = g(\omega(x)) \cdot \omega'(x)dx, \quad (1)$$

这里 $g(t)$ 是一个比 $f(x)$ 便于积分的函数。于是, 按上面所說, 只要来找积分

$$\int g(t)dt = G(t) + C,$$

使經 $t = \omega(x)$ 这个置換后可由它得出所求的积分。通常也就簡写成

$$\int f(x)dx = \int g(t)dt, \quad (2)$$

而了解为在右边积分里的 t 的函数已做了上述替換。

例如, 我們来求积分

$$\int \sin^3 x \cos x dx.$$

既然 $d \sin x = \cos x dx$, 則令 $t = \sin x$, 被积式变为

$$\sin^3 x \cos x dx = \sin^3 x d \sin x = t^3 dt.$$

最后一式的积分很容易算出:

$$\int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C.$$