
技 工 学 校 教 材

初中毕业程度适用

代 数

全国技工学校教材编审委员会编

机 械 工 业 出 版 社

技工学校教材

代 数

全国技工学校教材编审委员会编

(初中毕业程度适用)



机械工业出版社

1960

出版者的話

这套全国统一的教材是根据中华人民共和国劳动部于1959年4月在上海所召开的全国技工学校工作会议上确定的二年制技工学校培养目标、課程内容及課时分配等規定进行編写的；初稿由技工学校比較集中的十个省、市的劳动厅（局）組織各技工学校的教师編纂而成，最后由劳动部会同第一机械工业部、冶金工业部、煤炭工业部、铁道部等部門和第一机械工业部第四局等单位組成的全国技工学校教材編审委员会統一审定。

这套教材的主要特点是：1) 每本教材都是在总结技工学校过去的教学經驗的基础上由各地与該課程有关的教师集体編审的，选材慎重，內容比較丰富和全面；2) 內容比較切合我国实际情况，其中吸取了苏联技工教材的优点，另外还根据我国技工学校的教学特点增加了不少新的章节。

二年制技工学校的数学共分几何、三角及代数三册出版。代数共分七章，內容上尽量做到精簡扼要。为巩固学生的学习成果，每节多附有习题。

本书可作为二年制技工学校的教材。

No. 3179

1960年1月第一版 1980年8月第一版第二次印刷

787×1092 1/32 字数144千字 印張5 7/8 70,301—289,291册

机械工业出版社(北京阜成門外百万庄)出版

北京新华印刷厂印刷

新华书店科技发行所发行 各地新华书店經售

北京市书刊出版业营业許可証出字第003号 定价(7-1) 0.45元

前 言

在社会主义建設总路綫的光輝照耀下，和党的教育方針的指导下，全國技工学校的工作已有迅速的发展和提高。随着生产建設与文化技术的不断发展，必須进一步改进技工学校的教学工作，提高教学质量，为国家培养更多、更好的技术工人。

当前，改进技工学校教学工作的重要一环，是修改与統一教材。1959年4月全國技工学校工作會議曾明确地提出：要爭取在二、三年内逐步完成各門課程的全套教材的編写工作。去年各地技工学校，在党委领导下，曾組織教师并采取师生相結合的方法，先后編写了許多教材，为进一步提高教材质量和逐步統一教材工作提供了有利条件。

这次編写的統一教材共有24种，系由北京、上海、辽宁、湖北、湖南、河南、黑龙江、天津、西安、南昌等省、市的一些技工学校教师，分別在当地劳动厅（局）的組織下編写的，并且进行了第一次的审查工作。为了統一审訂这些教材，劳动部会同第一机械、冶金、煤炭、鉄道等部和第一机械部四局等单位又組織了全國技工学校教材編审委员会，于今年8月在北京做了第二次的审查修改。

这些教材是按照培养全面发展的技术工人，以中等技术水平和有助于学生毕业后的进一步提高的要求进行編写的。其中分为适用于招收初中毕业生在校学习二年与招收高小毕业生在校学习三年两种。目前，由于技工学校的教学計划与教学大綱尚未統一，为了便于各校选用，这次編写的教材的内容較多，分量較大，因此各校在选用时，应根据主管部門批准的教学計划与教学大綱，作必要的删减和增添。

这次編审教材工作，由于時間短促，缺乏經驗，錯誤之处在

所难免，希望有关同志提出意見，以便再作进一步修改。

最后，在这次編审教材的过程中，由于参加編审工作的教师以忘我劳动的热忱，发挥了冲天干劲，和有关的技工学校、劳动厅(局)、中央各工业部，特别是第一机械部第四局的同志的大力支持，因而能够較順利地完成編审工作。对此，我們特致以謝意。

本书第1~3章是由上海航技校史震堯同志編写，第5~7章是由长辛店铁路技校李国干同志編写，第4章是由二人合写，全书曾由北京师范大学数学系钟善基教授审閱。最后由我会統一审定。

全国技工学校教材編审委员会

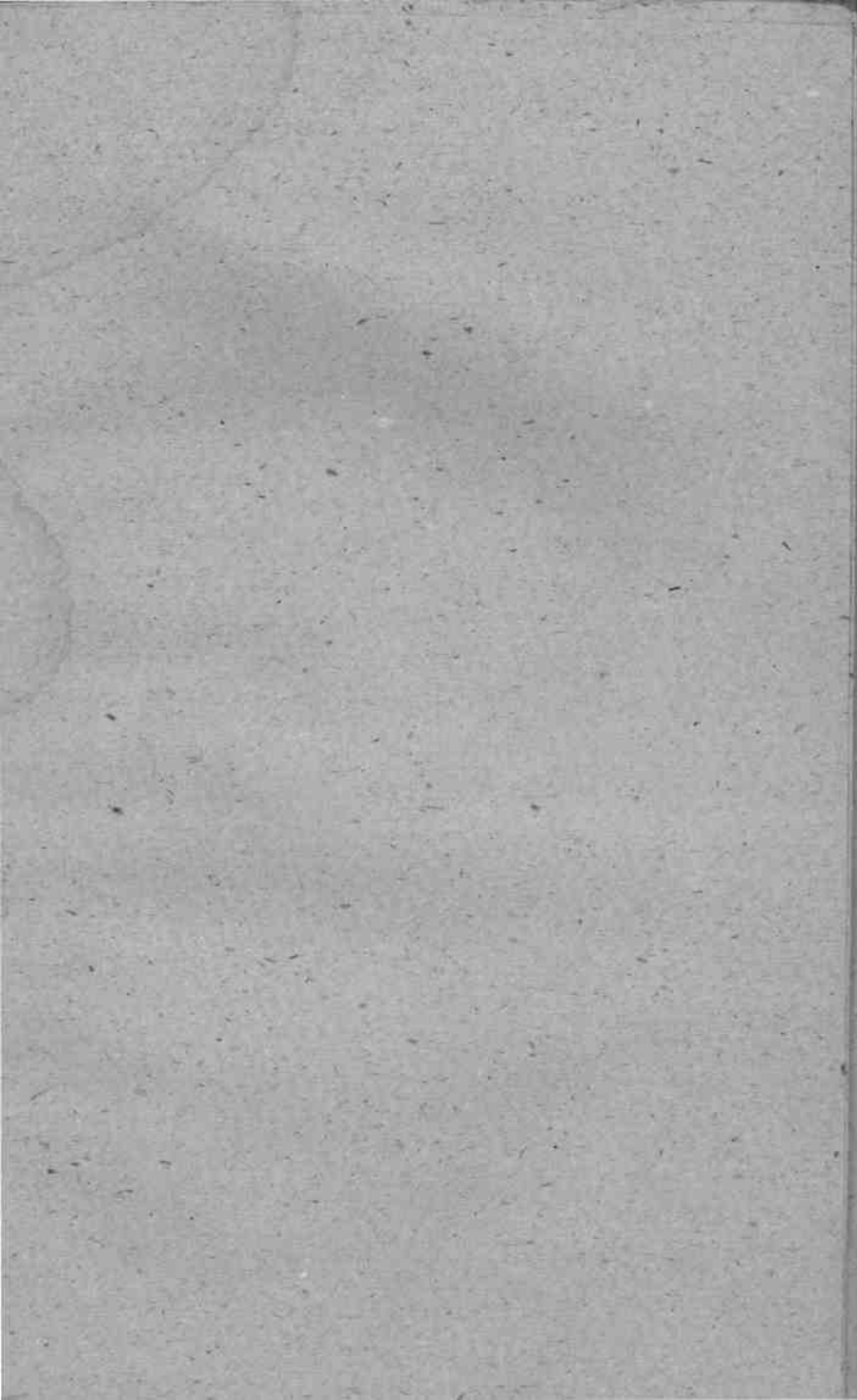
1959年8月25日

目 次

前言	3
第一章 幂与根	9
I 幂的概念及其运算	9
§1 幂的概念	9
§2 符号法则	9
§3 运算法则	10
II 方根与开方	14
§4 根的概念	14
§5 根的符号法则	15
§6 积、商、幂的算术根	17
III 实数	20
§7 无理数的概念	20
§8 近似值的误差	22
§9 实数的概念	23
IV 根式	2
§10 根式的概念	24
§11 根式的运算	30
第二章 二次方程	38
I 二次方程的概念和解法	38
§12 二次方程的概念	38
§13 不完全二次方程及其解法	40
§14 二次方程的求根公式	42
II 二次方程的研究	47
§15 二次方程根的判别	47
§16 复数及其共轭复数	49
§17 二次方程的根与系数的关系	51
§18 二次三项式的因式分解	55
§19 方程的增根和减根	60

§ 20 分式方程和无理方程.....	63
§ 21 列方程解应用问题.....	70
III 可化为二次方程的方程	78
§ 22 双二次方程.....	78
§ 23 左端分解为因式, 右端等于零的方程.....	79
第三章 二次方程组	83
§ 24 二元二次方程组的概念.....	83
§ 25 二元二次方程组的解法.....	83
§ 26 二次方程组的应用问题.....	93
第四章 函数及其图象	99
I 函数	99
§ 27 函数的概念.....	99
§ 28 函数的表示法.....	103
II 一次函数和二次函数的图象	105
§ 29 一次函数及其图象.....	105
§ 30 二次函数及其图象.....	108
第五章 数列	120
I 数列的概念	120
§ 31 数列的定义.....	120
§ 32 数列的通项公式.....	121
§ 33 数列的种类.....	122
II 等差数列	124
§ 34 等差数列与等差级数.....	124
§ 35 等差数列前 n 项之和.....	127
III 等比数列	130
§ 36 等比数列与等比级数.....	130
§ 37 数列的极限.....	133
§ 38 无限递缩等比数列(收敛等比数列)各项的和.....	136
第六章 指数与对数	140
I 幂的概念的推广	140
§ 39 0 指数, 负指数与分指数.....	140

II 指数函数与对数函数	143
§ 40 指数函数与对数函数的概念	143
§ 41 指数函数和对数函数的性质	145
III 对数的基本性质	149
§ 42 积、商、幂及方根的对数	149
§ 43 常用对数(十进对数)	152
§ 44 对数表的使用(布拉西斯对数表)	156
§ 45 负首数的对数的运算	159
§ 46 应用对数计算的例题	160
§ 47 指数方程与对数方程	163
第七章 排列、组合和二项式定理	167
I 排列与组合的概念	167
§ 48 排列、组合的概念	167
§ 49 排列	168
§ 50 组合	171
II 数学的归纳法	174
§ 51 数学的归纳法	174
III 二项式定理	177
§ 52 二项式定理	177



第一章 幂与根

1 幂的概念及其运算

§1 幂的概念

在初中代数里，我們已經学过乘方，知道乘方就是求相同因子的积的运算：

例如：

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 32$$

$$(-3)(-3)(-3) = (-3)^3 = -27$$

相同因子連乘所得的积，就叫作幂，相同的因子叫作幂的底数，表示相同因子的个数的数，叫作幂指数。

因此：32 是 2 的 5 次幂，-27 是 -3 的 3 次幂。

一般地：

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ 个}} = a^n$$

a^n 叫作 a 的 n 次幂，式中 a 可以为正，也可以为负， n 暂限定为正整数。

当 $n = 2$ 时，叫作二次乘方（幂）或平方。

$n = 3$ 时，叫作三次乘方（幂）或立方。

$n = 4$ 时，叫作四次乘方……。

以此类推。

§2 符号法则

1. 当 $a > 0$ 时，不論 n 为奇数或偶数，則 $a^n > 0$ 。

2. 当 $a < 0$ 时，替：

(1) n 为偶数, 即 $n = 2k$ ($k = 1, 2, 3, \dots$),

則 $a^n = a^{2k} > 0$ 。

(2) n 为奇数, 即 $n = 2k + 1$,

則 $a^n = a^{2k+1} < 0$ 。

[例 1] $a = 3, n = 4$, 則 $a^n = 3^4 = 81 > 0$;

$a = -4, n = 2$, 則 $a^n = (-4)^2 = 16 > 0$;

$n = 3$, $a^n = (-4)^3 = -64 < 0$ 。

一般的說: 正数的幂, 都是正数, 負数的偶次幂是正数, 負数的奇次幂是負数。

[例 2] $1^n = 1$;

$$(-1)^n = \begin{cases} 1 & (n = 2k) \\ -1 & (n = 2k + 1); \end{cases}$$

$$(-0.5)^4 = 0.0625。$$

§ 3 运算法则

1. 同底幂相乘:

$$a^m \cdot a^n$$

$$\therefore a^m = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m \text{ 个}}, \quad a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ 个}};$$

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m \text{ 个}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ 个}} = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m+n \text{ 个}}$$

$$\therefore a^m \cdot a^n = a^{m+n}。$$

[例] $2^4 \times 2^3 = 2^{4+3} = 2^7 = 128$;

$$(-2)^3 \times 2^2 = -2^3 \times 2^2 = -2^{3+2} = -2^5 = -32。$$

一般的說: 同底幂相乘所得的积, 是以原底数为底, 指数之和为指数的幂。

2. 同底幂相除: $a^m \div a^n$, ($m > n$)

$$\therefore \frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdots a}^{m \text{ 个}}}{\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ 个}}} = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{(m-n) \text{ 个}}$$

$$\therefore a^m \div a^n = a^{m-n}.$$

$$[例] \quad 2^3 \div 2^2 = 2^{3-2} = 2.$$

$$\frac{8^4}{(-8)^2} = \frac{8^4}{8^2} = 8^{4-2} = 8^2 = 64.$$

一般的說：同底幂相除所得的商，是以原底数为底，指数之差为指数的幂。

3. 幂的乘方： $(a^m)^n$

$$\therefore (a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdots a^m}_{n \text{ 个}} = a^{\overbrace{m+m+\cdots+m}^{n \text{ 个}}},$$

$$\therefore (a^m)^n = a^{m \cdot n}.$$

$$[例] \quad (2^2)^3 = 2^{2 \cdot 3} = 2^6 = 64.$$

$$(-3^2)^2 = 3^4 = 81.$$

一般的說：幂的乘方所得的結果，是以原底数为底，指数之积的幂。

4. 乘积的幂： $(a \cdot b \cdot c \cdots)^n$

$$\begin{aligned} \therefore (a \cdot b \cdot c \cdots)^n &= \underbrace{(a \cdot b \cdot c \cdots) \cdot (a \cdot b \cdot c \cdots) \cdots (a \cdot b \cdot c \cdots)}_{n \text{ 组}} \\ &= \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ 个}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdots b}_{n \text{ 个}} \cdots \underbrace{c \cdot c \cdots c}_{n \text{ 个}}. \end{aligned}$$

$$\therefore (a \cdot b \cdot c \cdots)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n \cdots.$$

$$[例] \quad (2 \times 3 \times 4)^3 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 4^3 = 4 \cdot 9 \cdot 16 = 576.$$

$$(x \cdot y \cdot z)^3 = x^3 \cdot y^3 \cdot z^3.$$

一般的說：乘积的幂可以把各因子分別按指数乘方后再相乘。

5. 分式的幂： $\left(\frac{a}{b}\right)^n$

$$\therefore \left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdots \frac{a}{b}}_{n \text{ 个}},$$

$$\therefore \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

$$[\text{例}] \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}.$$

$$\left(\frac{x \cdot y}{z}\right)^3 = \frac{x^3 \cdot y^3}{z^3}.$$

一般的說：分式的幂可以把分子分母分別按指數乘方后再相除。

6. 單項式的乘方：可以綜合運用以上的法則，把係數，文字分別乘方后，再求出它們的值。

〔例〕計算下列各式：

$$(1) \left(\frac{2}{3} \cdot x^3 \cdot y^2 \cdot z\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot (x^3)^3 \cdot (y^2)^3 \cdot z^3 = \frac{8}{27} \cdot x^9 \cdot y^6 \cdot z^3.$$

$$(2) \frac{2}{3} a^2 \cdot \frac{1}{4} a^3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot a^{2+3} = \frac{1}{6} a^5.$$

$$(3) \left(\frac{2}{5} a\right)^3 \left(\frac{1}{3} b^2\right)^3 \div \left(2 \frac{2}{5} a \cdot b^3\right)^2$$

$$= \frac{4}{25} a^2 \cdot \frac{1}{27} b^6 \div \frac{144}{25} a^2 b^6$$

$$= \frac{4}{25} \cdot \frac{1}{27} \cdot \frac{25}{144} \cdot \frac{a^2 b^6}{a^2 b^6}$$

$$= \frac{1}{27 \times 36} = \frac{1}{972}.$$

$$(4) \left(-\frac{2}{3} x\right)^2 (-9)(x \cdot y)^3 = \frac{4}{9} x^2 (-9) x^3 y^3 = -4 x^5 y^3.$$

7. 多項式平方：可以根據二項式平方

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

推导出三項式或更多項的平方。

$$[\text{例}] (a+b+c)^2 = [(a+b)+c]^2 = (a+b)^2 + 2c(a+b) + c^2$$

$$= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

即多項式的平方是各項平方的和，再加上每兩項乘積的2倍。

把一個多項式乘方，叫作展開，乘得的結果叫作展開式。

〔例〕展開 $(2a+3b-c)^2$ 。

解 原式 $= (2a)^2 + (3b)^2 + (-c)^2 + 2 \cdot 2a \cdot 3b + 2 \cdot 2a(-c) + 2 \cdot 3b(-c) = 4a^2 + 9b^2 + c^2 + 12ab - 4ac - 6bc$ 。

[例] 展开 $\left(x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}\right)^4$

解 原式 $= (x^3)^4 + \left(\frac{1}{2}x^2\right)^4 + \left(\frac{1}{3}x\right)^4 + \left(\frac{1}{4}\right)^4$
 $+ 2 \cdot x^3 \cdot \frac{1}{2}x^2 + 2 \cdot x^3 \cdot \frac{1}{3}x + 2 \cdot x^3 \cdot \frac{1}{4}$
 $+ 2 \cdot \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{3}x + 2 \cdot \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{3}x \cdot \frac{1}{4}$
 $= x^{12} + \frac{1}{4}x^8 + \frac{1}{9}x^6 + \frac{1}{16} + x^5 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{1}{2}x^3$
 $+ \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{6}x$
 $= x^{12} + x^5 + \frac{11}{12}x^4 + \frac{5}{6}x^3 + \frac{13}{36}x^2 + \frac{1}{6}x + \frac{1}{16}$ 。

习 题 1

1. 计算下列各式:

(1) $a^2 + (-a)^2$; (2) $a^3 + (-a)^3$;
 (3) $x^{2k+1} + (-x)^{2k+1}$; (4) $a^{2k} + (-a)^{2k}$ 。

2. 计算下列各式:

(1) $2^3 + (-3)^3 - (-2)^2 + (-1)^5$;
 (2) $x^5 + 2x^2 - 3x - (-x)^3 + 3(-x)^2 - 5x + 2$;
 (3) $3(ab)^2$; (4) $(3ab)^2$;
 (5) $4\left(-\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^2$; (6) $24\left(-\frac{1}{3}\right)^3\left(4\frac{1}{2}\right)^2$;
 (7) $(4^2)^2$; (8) $[(0.5)^3]^2$;
 (9) $(-2^2)^3$; (10) $[(-2)^2]^3$;
 (11) $[a(b-c)^2]^3$; (12) $[a(b+c)^2]^n$ 。

3. 化简下列各式:

(1) $\left(\frac{a+b}{c-x}\right)^3\left(\frac{1}{a+b}\right)^2\left(\frac{c-x}{a+b}\right)^4$;
 (2) $\left(\frac{a+b}{c-x}\right)^m\left(\frac{1}{a+b}\right)^m\left(\frac{c-x}{a-b}\right)^m$;

$$(3) \frac{(2ab)^5(3ab)^2(5a)^4}{(3b)^3(4ab)^6};$$

$$(4) \frac{[35(a^5)^m]}{[(7a)^3]^{\frac{2}{3}m}}.$$

4. 展开下列各式:

$$(1) (2a^2 - \frac{1}{2}a + 1)^2;$$

$$(2) (x^3 - 3x^2 - x + 1)^2;$$

$$(3) (0.3x^3 - 0.1x^2 - \frac{3}{4}x - 0.3)^2.$$

5. 展开下列各式, 证明它们是否相等:

$$(1) (a - b + c)^2 = (-a + b - c)^2;$$

$$(2) (2x^3 - x^2 - 3x + 1)^2 = (-2x^3 + x^2 + 3x - 1)^2.$$

II 方根与开方

§4 根的概念

在 $a^n = x$ 式中, 若由底数 a 和指数 n 求乘方数 x 时, 我們已經知道这种运算叫作乘方, 若由乘方数 x 及指数 n 求底数 a , 也就是乘方的逆运算, 就叫作开方。

某数 x 是 a 的 n 次幂, 那末 a 就是 x 的 n 次方根, 并用記号 $\sqrt[n]{x}$ 表示。

因此: 若 $x = a^n$, 則 $a = \sqrt[n]{x}$;

反之: 若 $\sqrt[n]{x} = a$, 則 $a^n = x$;

$$\therefore \sqrt[n]{a^n} = a; \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x.$$

在式 $\sqrt[n]{x} = a$ 中, n 是正整数, 叫作根指数, 記号 $\sqrt{\quad}$ 叫作根号, x 叫作被开方数或根的底数。当 $n = 2$ 时叫作开二次方或开平方; $n = 3$ 时叫作开三次方或开立方; $n = 4$ 时叫作开四次方……以下类推。开平方时根指数 2 省略不写。

[例] $2^2 = 4$, 則 2 就是 4 的平方根;

$(-3)^3 = -27$, 則 -3 就是 -27 的立方根。

§5 根的符号法则

因为开方与乘方互为逆运算, 所以根的符号法则, 可以根据幂的符号法则来确定。

因为 $3^2 = 9$,

$$(-3)^2 = 9,$$

$$\therefore \sqrt{9} = \pm 3;$$

$$(0.5)^2 = 0.25,$$

$$(-0.5)^2 = 0.25,$$

$$\therefore \sqrt{0.25} = \pm 0.5。$$

即正数的偶次方根, 是二个绝对值相等, 而符号相反的对数。

$$\therefore 2^5 = 32, \quad \therefore \sqrt[5]{32} = 2;$$

$$(0.3)^3 = 0.027, \quad \sqrt[3]{0.027} = 0.3。$$

即正数的奇次方根必须是一个正数。

$$\therefore (-4)^3 = -64, \quad \therefore \sqrt[3]{-64} = -4;$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{8}{27}, \quad \sqrt[3]{-\frac{8}{27}} = -\frac{2}{3}。$$

即负数的奇次方根是一个负数。

但是负数的偶次方根不是正数, 也不是负数。如 $\sqrt{-16}$

$$\therefore 4^2 = 16; (-4)^2 = 16,$$

$$\therefore \sqrt{-16} \text{ 不能有它的平方根。}$$

即负数开偶次根不能得实数, 这样的数叫作虚数如 $\sqrt{-4}$;

$\sqrt{-8}$ 等都是虚数。

$$\text{因为 } 0^2 = 0^3 = 0 \quad \therefore \sqrt{0} = \sqrt[3]{0} = \dots \sqrt[n]{0} = 0$$

即 0 的方根仍然是 0。

正数的平方根叫作算术根。

因为正数开偶次方，可以有两个符号相反，绝对值相等的方根，所以在 $a > 0$ 时符号 $\sqrt[n]{a}$ 表示正根，即算术根，而符号 $-\sqrt[n]{a}$ 表示负根。

负数的奇次方根，可把负号提到根号之前，如

$$\sqrt[3]{-125} = -\sqrt[3]{125} = -5$$

一般地，若 $a > 0$ 则：

$$\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}, (K \text{ 为正整数})$$

负数的偶次根，当然没有算术根。

【例1】求值 $\sqrt{(-6.8)^2}$

解 $\because (-6.8)^2 = 6.8^2$ ，是正数，

$$\therefore \sqrt{(-6.8)^2} = 6.8.$$

【例2】求值 $\sqrt{(a-2)^2}$ ，若

(1) $a > 2$; (2) $a < 2$; (3) $a = 2$ 。

解 (1) $\because a > 2$ 则 $a - 2 > 0$

$$\therefore \sqrt{(a-2)^2} = a - 2$$

(2) $\because a < 2$ 则 $2 - a > 0$

$$\therefore \sqrt{(a-2)^2} = \sqrt{(2-a)^2} = 2 - a$$

(3) $\because a = 2$ 则 $a - 2 = 0$

$$\therefore \sqrt{(a-2)^2} = 0.$$

【例3】求下列各式的值：

(1) 求值 $\sqrt[5]{32}$ 。

解 $\because 2^5 = 32 \quad \therefore \sqrt[5]{32} = 2$

(2) 求值 $\sqrt[4]{81}$ 。

解 $\because 3^4 = 81,$

$$(-3)^4 = 81,$$