常微分方程解法与建模应用选讲

化存才　赵奎奇　杨慧　刘海鸿◎编著

科学出版社
www.sciencep.com

云南师范大学学术文库

常微分方程解法与建模应用选讲

化存才　赵奎奇
杨　慧　刘海鸿　编著

科 学 出 版 社
北　京

内 容 简 介

本书介绍了常微分方程的基本解法与建模应用方法. 主要内容包括：常微分方程的初等积分法、高阶线性微分方程的解法、线性微分方程组的解法、常微分方程的算子解法、常微分方程的数值解法及其C程序设计、Maple软件在解常微分方程中的应用、常微分方程的建模应用. 部分内容是云南师范大学“微分方程”精品课程教学团队十多年来的教学实践与应用研究的特色成果.

本书适合数学类、理工类专业本科生、研究生和相关教师用作常微分方程和数学建模课程的教学参考书，也可作为研究生考试的培训教材.

图书在版编目(CIP)数据

常微分方程解法与建模应用选讲/化存才等编著. —北京：科学出版社，2009

ISBN 978-7-03-024836-7

Ⅰ.常… Ⅱ.化… Ⅲ.①常微分方程-解题 ②常微分方程-建立模型

Ⅳ.O175.1

中国版本图书馆CIP数据核字（2009）第103080号

责任编辑：王丽平 房 阳／责任校对：钟 洋

责任印制：钱玉芬／封面设计：王 浩

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

骏杰印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009年6月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2009年6月第一次印刷 印张：13 1/2

印数：1—2 000 字数：262 000

定价：45.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

序

常微分方程是在 17 世纪伴随着微积分而发展起来的一门具有重要应用价值的学科. 它是研究连续量变化规律的重要工具, 是众多实际问题与数学之间联系的重要桥梁. 在历史上, 牛顿正是通过求解常微分方程证实了地球绕太阳运动的轨道是椭圆; 天文学家通过常微分方程的计算, 预见了海王星的存在. 随着工业化的进展, 常微分方程在航海、航空工业生产以及自然科学的研究中发挥了重要的作用. 在当今高新技术迅猛发展的时代, 常微分方程更加广泛地渗透到了诸如电信、化工、航天、生物、医药、经济、信息、军事、控制、管理乃至社会科学等各个领域, 显示着它的蓬勃生机和活力.

计算机和计算技术的发展, 使微分方程的求解冲破了经典方法的局限, 迈向数值计算和图像模拟, 这为微分方程的应用提供了更为广阔的天地和有效的手段, 也使得建立数学模型显得格外重要.

以化存才教授为首的云南师范大学 "微分方程" 精品课程教学团队集体编著的《常微分方程解法与建模应用选讲》正是在当今形势下适应社会要求的一本颇具特色的教学参考书. 他们在系统、简洁地讲解经典方法的基础上, 补充了他们发展的一些新解法; 着重介绍了具有实用价值的算子解法和 Maple 软件在微分方程中的应用; 强调数学建模, 并通过一些典型的实例阐述了建立常微分方程模型的思想方法和步骤, 展现了模型深化发展的全过程, 书中不少内容是他们近年来科学研究的成果, 显示了该书内容的先进性和实用性, 有助于培养读者的应用意识和兴趣, 有助于提高读者的软件设计、实践应用和创新能力.

该书重视科学思想方法的阐述, 特别是融入了作者们在科学研究中的一些思想方法和体会, 有利于启迪和引导读者思维, 培养创新精神. 全书内容选材丰富, 注意与相关课程间的联系, 符合认知规律, 层次分明, 表述清楚, 有较强的可读性.

笔者认为, 该书是作者多年来从事常微分方程和数值计算方法教学经验、相关科学研究和数学建模应用研究成果以及数学软件工具使用经验的融合和结晶. 相信它的出版会对高等学校常微分方程课程教学质量的提高和帮助读者更好地应用常微分方程产生良好的作用.

马知恩

2009 年 3 月于西安

前　言

进入 21 世纪以来, 中国高等教育步入了大众化时代, 高等院校大规模地扩大招生, 随之而来的教育问题不断突现, 如教育质量下降、毕业生就业形势严峻、专业结构不均衡、国际化教育的要求增强等. 为提高教育质量, 高等学校进行了多轮教学改革, 先后推出了各种规格的教材, 如最早面向 21 世纪的课程内容体系改革教材, 后来的国家级或部级规划教材等. 随着教育部高等学校教学质量与教学改革工程的实施, 高等学校的精品课程建设, 精品教材建设, 教学团队建设等工作如雨后春笋般开展起来, 反映其建设的成果以各种各样的形式推出, 如精品教材系列、与现代教育技术相结合的多媒体教学、精品课程网络教材、数学教育信息化网站等, 这都是可喜可贺的.

然而, 以上所列举的各种形式的教材都有其自身的特色和局限性. 从 “百花齐放, 百家争鸣” 的方针来看, 提倡教材和教学参考书的多样化将会积极地推动着教学质量提高的进程. 云南师范大学十分重视并开展了教学团队和精品课程建设的工作, 作为云南师范大学校级 “微分方程” 精品课程建设的一个教学团队, 我们提出的首要目标是把教育部教学质量工程的相关工作落到实处, 通过集体编著出版精品教材、精品教学参考书、精品教学指导书来提升教学团队的整体水平. 我们编著的总原则是: 要反映团队成员长期以来在 “常微分方程” 课程的教学实践与科学研究、教学改革和教学实验第一线工作中所形成的丰富成果、成功的教学经验和特色工作.

我们认为,“常微分方程” 是本科数学与应用数学专业学生必修的一门专业基础课程, 也是物理类专业学生的重要基础, 它对于数学类专业学生巩固三门主干基础课程 (“数学分析”、“高等代数” 和 “解析几何”) 的知识, 进一步学习 “数学建模”, 选修 “微分方程定性理论初步”、“微分方程数值方法” 等课程; 物理类专业学生学习 “数学物理方法”、“力学” 等课程以及充实其他专业 “高等数学” 基础课程的教学方面, 都能起到承上启下的推动作用, 它还可以为学生报考应用数学等专业的研究生奠定扎实的基础. 因此, 在日常的教学中, 要注意兼顾这些课程之间的连贯性, 将常微分方程的基本解法、数学工具软件 Maple 设计、建模应用等内容集成, 多层次地去激发广大学生的学习兴趣, 培养他们的实践应用和创新能力. 本书就是基于这些思想, 在总结教学团队多年来教学实践与科学研究中所取得的成果的基础上而写成的. 全书的内容和分工如下:

第 1, 2 章由赵奎奇编写; 第 3, 5 章由杨慧编写; 第 4, 7 章及前言部分由化存

才编写; 第 6 章由刘海鸿编写; 全书的统稿工作由赵奎奇和化存才共同完成.

与同类书籍比较, 本书以选讲的形式撰写, 体现 "少而精", 突出 "学生的实践应用技能与创新能力培养", 展示教学团队成员研究工作的 "特色" 内容 (例如, 1.8 节中的可积性方程研究专题; 2.1.3 小节中的线性齐次方程的解与系数函数之间关系的刘维尔公式组, 第 4 章中的算子解法和第 7 章中的建模应用等), 从而使学生能有机会学到同类书籍中见不到的一些知识. 书中的算子解法、计算机编程解法、建模应用内容都是独立成章的. 书中大部分内容在云南师范大学 "常微分方程" 课程教学中讲授过多次, 而有部分内容则先后在云南省数学会年会 (2003)、广西大学数学与计算机信息学院 (2005)、云南大学数学与统计学院 (2006)、第十届全国数学建模教学与应用会议 (2007)、云南师范大学校级 "微分方程" 精品课程建设公共资源共享第二课堂 (2008) 上报告过.

本书的出版, 得到了云南师范大学数学学院郭震教授和王涛副教授的大力支持. 国家首届教学名师奖获得者, 西安交通大学应用数学系马知恩教授为本书作了序. 云南师范大学学术著作出版基金 (重点)、云南省现代教师教育改革项目和国家自然科学基金项目 (10772158) 联合资助了本书的出版, 在此表示最诚挚的谢意.

本书是教学团队成员同心协力, 集体合作成果的结晶. 虽然我们已经对本书作过多次反复的修改, 但是, 限于水平, 书中难免还存在着一些不足之处, 恳请读者提出宝贵的意见.

编著者

2009 年 2 月

目　录

第 1 章　常微分方程的初等积分法

本章主要选讲常微分方程的初等积分解法. 1.1 节通过几个具体例子, 简单介绍了常微分方程的一些物理背景和建立, 同时引出一些常微分方程的最基本概念. 1.2~1.7 节介绍常微分方程中一些特殊方程的初等积分法和它们的应用实例. 1.8 节介绍可积方程的两个专题.

1.1　微分方程和解

1.1.1　微分方程的概念

例 1.1 (物体下落问题)　设质量为 m 的物体, 在时间 $t=0$ 时, 由距地面初始高度为 s_0 处以初始速度 $v(0)=v_0$ 垂直地面下落, 求此物体下落时距离与时间的关系.

解　如图 1.1 建立坐标系, 设 $s=s(t)$ 为 t 时刻物体所处位置坐标. 于是, 物体下落的速度为 $v=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$, 加速度为 $a=\dfrac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}$.质量为 m 的物体, 在下落的任一时刻所受到的外力有重力 mg 和空气阻力, 当速度不太大时, 空气阻力可取为与速度成正比. 于是, 根据牛顿第二定律 $F=ma$(力 = 质量 × 加速度) 可以列出方程

$$m\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=k\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}-mg, \tag{1.1}$$

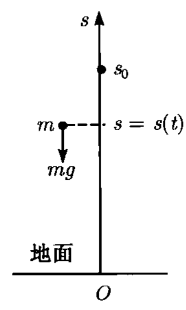

图 1.1

其中 $k>0$ 为阻尼系数, g 是重力加速度.

式 (1.1) 就是一个微分方程, 其中 s 是未知函数, t 是自变量. 现在还不能方便地求解方程 (1.1). 但是, 考虑 $k=0$ 的情形, 方程 (1.1) 可化为

$$\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=-g, \tag{1.2}$$

将式 (1.2) 对 t 积分两次得

$$s(t)=-\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2, \tag{1.3}$$

其中 C_1 和 C_2 是两个独立的任意常数, 它是方程 (1.2) 的解.

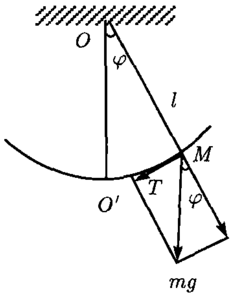

图 1.2

例 1.2 (数学摆)　数学摆是系于一根长度为 l 的线上而质量为 m 的质点 M, 在重力作用下, 它在垂直于地面的平面上沿圆周运动, 如图 1.2 所示, 试确定摆的运动方程.

解　如图 1.2, 取逆时针方向为摆与铅垂线所成的角 φ 的正方向, 由于重力 mg 沿切向分解的力为 $mg\sin\varphi$, 点 M 处的切向加速度为 $l\dfrac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}$, 据牛顿第二定律, 可得到摆的运动方程为

$$ml\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}=-mg\sin\varphi \quad \text{或} \quad \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{g}{l}\sin\varphi. \tag{1.4}$$

如果只研究摆的微小振动, 即当 φ 比较小时, 那么, 由 $\sin\varphi$ 的 Taylor 展开式, $\sin\varphi$ 可以用 φ 作为近似值, 代入式 (1.4), 就得到做微小振动时摆的运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}+\frac{g}{l}\varphi=0. \tag{1.5}$$

如果摆是在一个有黏性的介质中做微小振动, 那么, 沿着摆的运动方向将存在一个阻力, 它与速度 $l\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$ 成反比. 若阻力系数为 μ, 则有摆的运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mu}{m}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}+\frac{g}{l}\varphi=0. \tag{1.6}$$

如果摆在微小振动时还沿着摆的运动方向受到一个外力 $F(t)$ 的作用, 这时摆的运动称为强迫微小振动, 摆的运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mu}{m}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}+\frac{g}{l}\varphi=\frac{1}{ml}F(t). \tag{1.7}$$

一般说来, **微分方程**就是联系自变量、未知函数以及未知函数的某些导数或微分的关系式. 如果其中未知函数是一元函数, 则称为**常微分方程**; 如果未知函数是多元函数, 并且在方程中出现偏导数, 则称为**偏微分方程**. 本书主要介绍常微分方程, 也简称微分方程或方程. 在一个微分方程中, 出现的未知函数导数的最高阶数, 称为**方程的阶**. 以 y 为未知函数, x 为自变量的一阶常微分方程的一般形式可表为

$$F(x,y,y')=0. \tag{1.8}$$

如果在 (1.8) 中能将 y' 解出, 则得到方程

$$y'=f(x,y) \tag{1.9}$$

或

$$M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y = 0. \tag{1.10}$$

我们也称 (1.8) 为一阶隐式微分方程,(1.9) 为一阶显式微分方程,(1.10) 为一阶微分方程的微分形式.

n阶隐式方程的一般形式为

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)}) = 0. \tag{1.11}$$

n阶显式方程的一般形式为

$$y^{(n)} = f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}). \tag{1.12}$$

方程 (1.11) 中, 如果函数 F 对未知函数 y 和它的各阶导数 $y',y'',\cdots,y^{(n)}$ 都是一次的, 则称其为线性常微分方程, 否则, 称其为非线性常微分方程. 以 y 为未知函数,x 为自变量的 **n阶线性微分方程**具有如下形式:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x). \tag{1.13}$$

1.1.2 微分方程的解——通解与特解

定义 1.1 设函数 $y=\varphi(x)$ 在区间 I 上具有直到 n 阶的导数. 如果把 $y=\varphi(x)$ 代入方程 (1.11), 有

$$F(x,\varphi(x),\varphi'(x),\cdots,\varphi^{(n)}(x)) = 0$$

在区间 I 上关于 x 恒成立, 则称 $y=\varphi(x)$ 为方程 (1.11) 在区间 I 上的一个解.

依据定义 1.1 可以直接验证:

(1) 函数 $y=\sin(\arcsin x + C)$ 是方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$ 在区间 (−1,1) 上的解, 其中 C 是任意常数. 另外, 该方程还有两个解 $y=\pm 1$ $(x\in(-1,1))$, 它们不包含在前面解中.

(2) 函数 $x=C_1\cos t + C_2\sin t$ 是方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + x = 0$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的解, 其中 C_1 和 C_2 是独立的任意常数. 当然,$x=\sin t$, $x=\cos t$ 都是方程的解, 它们包含在前面解中.

从上面的讨论中看到事实: 微分方程的解可以包含任意常数, 其任意常数的个数可以多到与方程的阶数相等, 也可以不含任意常数. n 阶常微分方程 (1.11) 的含有 n 个独立的任意常数 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 的解 $y=\varphi(x,C_1,C_2,\cdots,C_n)$ 称为该方程的**通解**, 而方程满足给定条件的解 $y=\varphi(x)$ 称为**特解**. 一般地, 方程的特解可由其通解中任意常数取确定的常数导出. 以隐函数形式表示的通解称为**通积分**, 而以隐

函数形式表示的特解称为**特积分**, 对于通解或者通积分的说法或使用, 通常是不加区分的. 另外, 方程的通解不一定表示方程的**所有解**.

为了便于研究方程解的性质, 常常需要考虑解的图像, 或者以图形方式表示微分方程的解. 一阶方程的一个特解 $y=\varphi(x)$ 的图像是 xOy 平面上的一条曲线, 称为方程的**积分曲线**, 而通解 $y=\varphi(x,C)$ 的函数图像是平面上的一族曲线, 称为**积分曲线族**. 例如, 方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\cos x$ 的解 $y=\sin x$ 是过点 (0,0) 的一条积分曲线, 而通解 $y=\sin x+C$ 是 xOy 平面上的一族正弦曲线.

1.1.3　初值问题

式 (1.3) 表示的函数是方程 (1.2) 的通解, 由于 C_1 和 C_2 是两个任意常数, 这表明方程 (1.2) 有无数个解. 而实际情况是, 一个自由落体运动只能有唯一的运动轨迹. 产生这种多解性的原因是方程 (1.2) 表达的是任何一个自由落体运动所满足的方程, 并未考虑落体运动的初始状态. 因此, 通过积分得到的通解 (1.3) 所描述的是任何一个自由落体的运动规律. 在确定的初始时刻, 由不同的高度, 以不同初速度自由下落的物体, 应有不同的运动轨迹. 为了求解一个自由落体运动满足**初始条件**的解, 可以把例 1.1 中给出的两个初始值条件, 即初始位置 $s(0)=s_0$ 和初始速度 $\dot{s}(0)=v_0$ 代入到通解中, 导出具体的常数: $C_1=v_0$, $C_2=s_0$. 于是, 得到满足上述初值条件的特解为

$$s=s(t)=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t+s_0, \tag{1.14}$$

它描述了初始高度为 s_0, 初始速度为 v_0 的自由落体运动规律.

求微分方程满足初始条件的解的问题称为**初值问题**.

称 (1.14) 是初值问题 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=-g,\\ s(0)=s_0, \dot{s}(0)=v_0\end{cases}$ 的解.

对于一个 n 阶方程, **初始条件的一般提法**是

$$y(x_0)=y_0,\quad y'(x_0)=y_0',\quad \cdots,\quad y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}, \tag{1.15}$$

其中 x_0 是自变量的某个取定值, 而 $y_0,y_0',\cdots,y_0^{(n-1)}$ 是相应的未知函数及导数的给定值. 方程 (1.12) 的初值问题常记为

$$\begin{cases} y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}),\\ y(x_0)=y_0,\quad y'(x_0)=y_0',\quad \cdots,\quad y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}. \end{cases} \tag{1.16}$$

初值问题也称为**柯西**(Cauchy)**问题**.

对于一阶方程, 若已求出其通解 $y=\varphi(x,C)$, 那么, 一般只要把初始条件 $y(x_0)=y_0$ 代入通解中, 得到方程 $y_0=\varphi(x_0,C)$, 从中解出 $C=C_0$, 代入通解, 即可得到初值问题的解 $y=\varphi(x,C_0)$.

对于 n 阶方程, 若已求出通解 $y = \varphi(x, C_1, C_2, \cdots, C_n)$ 后, 代入初始条件 (1.15), 得到 n 个方程:

$$\begin{cases} y_0 = \varphi(x_0, C_1, C_2, \cdots, C_n), \\ y_0' = \varphi'(x_0, C_1, C_2, \cdots, C_n), \\ \cdots\cdots \\ y_0^{(n-1)} = \varphi^{(n-1)}(x_0, C_1, C_2, \cdots, C_n). \end{cases} \tag{1.17}$$

如果能从式 (1.17) 中确定出 $C_1^0, C_2^0, \cdots, C_n^0$, 代回通解, 即得所求初值问题的解

$$y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0, \cdots, C_n^0).$$

例 1.3 由方程 $\ddot{x} + x = 0$ 的通解 $x = C_1 \sin t + C_2 \cos t$, 求其满足初始条件 $x\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1, \dot{x}\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -1$ 的解①.

解 由通解 $x = C_1 \sin t + C_2 \cos t$, 求导数后有 $\dot{x} = C_1 \cos t - C_2 \sin t$. 将初值条件代入, 得到方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{2} C_1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2} C_2 = 1, \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} C_1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2} C_2 = -1. \end{cases}$$

再解出 C_1 和 C_2 得 $C_1 = 0, C_2 = \sqrt{2}$, 要求的特解为 $x = \sqrt{2} \cos t$.

1.1.4 初等积分法

本章的其余部分, 将主要讨论某些具体类型常微分方程的**初等解法**, 或者**初等积分法**. 之所以称为初等积分法, 是因为这样解法的最后都把求解的问题化成求积分, 并且将方程的解用初等函数及其积分通过有限次运算表示出来 (显式的或隐式的). 凡是能做到这一点的常微分方程, 就称为**可积方程**. 下面几节就是介绍一些可积方程的解法. 它们虽然简单, 但都是常微分方程求解的基本内容, 而且在实际中具有广泛的用处.

1.2 变量可分离方程

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y) \tag{1.18}$$

或

$$M_1(x)N_1(y)\mathrm{d}x + M_2(x)N_2(y)\mathrm{d}y = 0 \tag{1.19}$$

① $\dot{x}$ 是函数 x 对自变量 t 求导, $\ddot{x}$ 是 x 对 t 的二阶导数, y' 是函数 y 对自变量 x 求导.

的方程称为**变量可分离方程**. 也分别称 (1.18), (1.19) 为显式变量可分离方程和微分形式变量可分离方程.

例如, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=xy$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{x+y}$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x}{y}$, $xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{e}^y\mathrm{d}y=0$ 都是变量可分离方程. 方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x+y$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x}{x+y}$, $(x+y)\mathrm{d}x+(x^2+\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y=0$ 都不是变量可分离方程.

1.2.1 方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y)$ 的解法

变量可分离方程是最基本的微分方程类型, 也是应用中最常见的微分方程类. 这里给出一个有别于流行教材的简明叙述如下:

设 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上连续, 而 $g(y)$ 在区间 (α,β) 上连续, 若 $y=y(x)$ 是方程 (1.18) 的任意一个解, 由解的定义可知, 有恒等式

$$y'(x)\equiv f(x)g(y(x)),\quad x\in(a,b). \tag{1.20}$$

若 $g(y)\neq 0$, 则式 (1.20)(**变量分离法**) 可等价地写成

$$\frac{y'}{g(y)}\equiv f(x),\quad x\in(a,b), \tag{1.21}$$

将式 (1.21) 两端求 x 的不定积分得 $\displaystyle\int\frac{y'}{g(y)}\mathrm{d}x\equiv\int f(x)\mathrm{d}x+C$, 即

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}\equiv\int f(x)\mathrm{d}x+C \tag{1.22}$$

确定的隐函数是方程 (1.18) 的通解.

若存在 y_0, 使得 $g(y_0)=0$, 则代入方程验证后可知 $y=y_0\ (x\in(a,b))$ 是方程 (1.18) 的一个解, 这样的解也称为**常数解**, 它的定义域由 $f(x)$ 的定义域确定.

附注 当 $g(y)\neq 0$ 时, 由 (1.22) 确定的函数 $y=y(x,C)$ 是 (1.18) 的通解, 而且 (1.22) 是通解的隐式表达式, 也是方程 (1.18) 的通积分. 在求解过程中, 对于通积分 (1.22) 应该尽量把它演算到底, 即用初等函数表达出来. 但是, 并不强求从其中求出解的显式表达式. 如果积分不能用初等函数表达出来, 此时我们也认为微分方程 (1.18) 已经解出来了, 因为从微分方程求解的意义上讲, 留下的是一个积分问题, 而不是一个方程问题了. 另外, 如果方程 (1.18) 还有常数解 $y=y_0\ (x\in(a,b))$, 它的定义域是随 $f(x)$ 的定义域确定的. 而且, 这样的解有时不能由其通解中的任意常数取某个确定的数得到, 这时**方程的通解并不表示方程的所有解**, 这里需要特别说明.

例如, 应用变量分离法, 可得方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$ 的通解 $\arcsin y=\arcsin x+C$, 即 $y=\sin(\arcsin x+C)$, 但是, $y=\pm1$ $(x\in(-1,1))$ 也是所给方程的解, 它们不包含在其通解中.

约定 在本书的前面或后面内容中出现的没特别说明的字母 $C,C_1,C_2,\cdots$ 都表示在一定范围上取任意实数值的常数.

例 1.4 求解方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{x}$.

解 当 $y\neq0$ 时, 由分离变量法, 方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$, 两端积分, 可得通积分

$$\ln|y|=\ln|x|+C_1 \quad 或 \quad \ln|y|=\ln|Cx|,$$

解出 y, 得所给方程通解 $y=Cx$. 另外, $y=0$ 也是所给方程的解, 在通解 $y=Cx$ 中, 由任意常数取零可以得到.

例 1.5 某厂房容积为 $45\mathrm{m}\times15\mathrm{m}\times6\mathrm{m}$, 经测定空气中含有 0.2% 的 CO_2, 开动通风设备, 以 $360\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$ 的速度输入含有 $0.05\%CO_2$ 的新鲜空气, 同时又排出同等数量的室内空气. 问 30min 后室内所含 CO_2 的百分比?

解 设在时刻 t, 车间内 CO_2 的百分比为 $x(t)\%$, 当时间经过 $\mathrm{d}t$ 之后, 室内 CO_2 的改变量为

$$45\times15\times6\times\mathrm{d}x\%=360\times0.05\%\times\mathrm{d}t-360\times x\%\times\mathrm{d}t.$$

于是, 有关系式

$$4050\mathrm{d}x=360(0.05-x)\mathrm{d}t \quad 或 \quad \mathrm{d}x=\frac{4}{45}(0.05-x)\mathrm{d}t,$$

初值条件为 $x(0)=0.2$, 使用分离变量法并积分, 可得

$$\int_{0.2}^{x}\frac{\mathrm{d}x}{0.05-x}=\int_0^t\frac{4}{45}\mathrm{d}t,$$

$$x=0.05+0.15\mathrm{e}^{-\frac{4}{45}t}.$$

以 $t=30\,\mathrm{min}=1800\mathrm{s}$ 代入上式, 得到 $x\approx0.05$, 即开动通风设备 $30\,\mathrm{min}$ 后, 室内的 CO_2 含量接近 0.05%, 基本上已是新鲜空气了.

1.2.2 方程 $M_1(x)N_1(y)\mathrm{d}x+M_2(x)N_2(y)\mathrm{d}y=0$ 解法

方程 (1.19) 与方程 (1.18) 的解法是类似的, 但需要强调的是: 在方程 (1.19) 中的 x 与 y 都可以被认为是自变量或函数, 也称 x 和 y 在方程中地位是 "平等" 的. 为此, 通过例题解析说明如下.

例 1.6　求解方程 $x\left(y^2-1\right)\mathrm{d}x+y\sqrt{x^2-1}\mathrm{d}y=0$.

解　当 $x\neq\pm1$, $y\neq\pm1$ 时, 原方程即 $\dfrac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}}+\dfrac{y\mathrm{d}y}{y^2-1}=0$, 由积分可得

$$\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}}+\int\frac{y\mathrm{d}y}{y^2-1}=C,$$

进而可得 $\sqrt{x^2-1}+\ln\left|y^2-1\right|=c$, 即 $\left(y^2-1\right)\mathrm{e}^{\sqrt{x^2-1}}=C$ 是所给方程的通解. 另外, 由代入验证知 $y=\pm1\,(x\in(-1,1))$, $x=\pm1\,(y\in\mathbf{R})$ 都是方程的常数解, 其中 $y=\pm1\,(x\in(-1,1))$ 包含在通解中, 由任意常数 C 取零可以得到; $x=\pm1\,(y\in\mathbf{R})$ 不包含在通解中, 无论 C 取何值都不能得到.

一般地, 方程 (1.19) 的通解由

$$\int\frac{N_2(y)}{N_1(y)}\mathrm{d}y+\int\frac{M_1(x)}{M_2(x)}\mathrm{d}x=C \tag{1.23}$$

给出, 若 $N_1(y_0)=0$ 或 $M_2(x_0)=0$, 则 $y=y_0$ 或 $x=x_0$ 是方程 (1.19) 的常数解.

1.3　齐次方程

1.3.1　齐次方程的解法

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=g\left(\frac{y}{x}\right) \tag{1.24}$$

的方程称为**齐次方程**.

解　令 $u=\dfrac{y}{x}$, 则有 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$, 代入方程 (1.24) 得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{g(u)-u}{x}, \tag{1.25}$$

它是一个变量可分离方程, 当 $g(u)-u\neq0$ 时, 分离变量并积分, 得到它的通积分为

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{g(u)-u}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}+\ln|C_1|, \tag{1.26}$$

进而有 $C_1x=\mathrm{e}^{\int\frac{\mathrm{d}u}{g(u)-u}}$, 即 $x=C\mathrm{e}^{\varphi(u)}$, 其中 $\varphi(u)=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}u}{g(u)-u}$, $C=\dfrac{1}{C_1}$, 以 $u=\dfrac{y}{x}$ 代入, 可得到原方程 (1.24) 的通积分 $x=C\mathrm{e}^{\varphi\left(\frac{y}{x}\right)}$. 若存在常数 u_0, 使 $g(u_0)-u_0=0$, 则 $u=u_0$ 是 (1.25) 的解, 由 $u=\dfrac{y}{x}$, 得 $y=u_0x$ 也是原方程 (1.24) 的解.

例 1.7　求解方程 $x^2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=xy-y^2$.

解 原方程可写成齐次方程形式 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{x}-\left(\dfrac{y}{x}\right)^2$, 令 $y=xu$, 代入上式可得

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=-u^2.$$

当 $u\neq 0$ 时, 分离变量得 $-\dfrac{\mathrm{d}u}{u^2}=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$, 两端积分后得 $u=\dfrac{1}{\ln|x|+C}$, 将 u 换成 $\dfrac{y}{x}$, 并解出 y, 可得到原方程的通解 $y=\dfrac{x}{\ln|x|+C}$; 当 $u=0$ 时, 有 $y=0$, 也是原方程的解.

例 1.8 (探照灯设计问题) 在平面解析几何中已经指出并证明了如下结论: 探照灯的反射面设计为旋转抛物面, 即将抛物线绕对称轴旋转一周所成的曲面. 若光源安装在抛物线的焦点处, 光线经镜面反射成为平行光线. 现在我们来说明具有这一性质的曲线只有抛物线.

解 见图 1.3, 由对称性, 只需考虑过旋转轴的一个平面的一侧平面中的轮廓线 l, 设旋转轴为 Ox, 光源放在原点 O 处, l 的方程为 $y=y(x)\,(>0)$, 由点 O 发出光线经反射后的光线平行于 Ox 轴. MT 是曲线 l 上点 $M(x,y)$ 处的切线, 由光的反射定律 (入射角等于反射角), 并结合三角公式, 可得

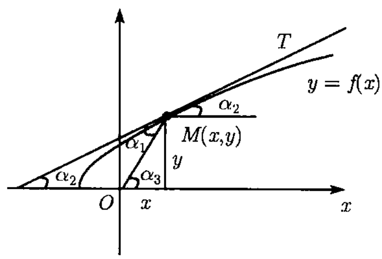

图 1.3

$$\tan\alpha_3=\tan(\alpha_1+\alpha_2)=\tan 2\alpha_2=\frac{2\tan\alpha_2}{1-\tan^2\alpha_2},$$

而且有 $\tan\alpha_2=y'\,(>0)\,,\tan\alpha_3=\dfrac{y}{x}$, 代入上式解出 y' 可得

$$y'=\sqrt{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}-\frac{x}{y},$$

这是一个齐次方程, 取变换 $u=\dfrac{y}{x}$ 去求解, 接着往下推导比较繁. 这里考虑其等价的 "倒数" 方程形式 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\left(\sqrt{1+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2}-\dfrac{x}{y}\right)^{-1}$, 它是一个以 x 为未知函数的齐次方程, 取变换 $v=\dfrac{x}{y}$, 代入上式便得 $v+y\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}=\dfrac{1}{\sqrt{1+v^2}-v}=\sqrt{1+v^2}+v$, 分离变量, 有 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\sqrt{1+v^2}}=\dfrac{\mathrm{d}y}{y}$, 积分可得 $\ln\left(v+\sqrt{1+v^2}\right)=\ln y+\ln|C|$, 将 $v=\dfrac{x}{y}$ 代入并整理可得 $\sqrt{x^2+y^2}=-x+\dfrac{y^2}{C}$, 即 $y^2=C(C+2x)=2C\left(x+\dfrac{C}{2}\right)$, 是以原点为焦点的抛物线.