

21 世纪高等院校教材

数学建模及其实验

严喜祖 宋中民 毕春加 编

食 营 养 学

21世纪高等院校教材

数学建模及其实验

严喜祖 宋中民 毕春加 编

图版(PP)扫描甄选图

ISBN 978-7-04-052728-0

数 学 建 模 及 其 实 验

ISBN 978-7-04-052729-7

数 学 建 模 及 其 实 验

ISBN 978-7-04-052730-3

数 学 建 模 及 其 实 验

ISBN 978-7-04-052731-0

数 学 建 模 及 其 实 验

ISBN 978-7-04-052732-7

数 学 建 模 及 其 实 验

ISBN 978-7-04-052733-4

数 学 建 模 及 其 实 验

ISBN 978-7-04-052734-1

数 学 建 模 及 其 实 验

ISBN 978-7-04-052735-8

数 学 建 模 及 其 实 验

ISBN 978-7-04-052736-5

数 学 建 模 及 其 实 验

ISBN 978-7-04-052737-2

数 学 建 模 及 其 实 验

ISBN 978-7-04-052738-9

数 学 建 模 及 其 实 验

ISBN 978-7-04-052739-6

数 学 建 模 及 其 实 验

ISBN 978-7-04-052740-2

数 学 建 模 及 其 实 验

ISBN 978-7-04-052741-9

数 学 建 模 及 其 实 验

ISBN 978-7-04-052742-6

数 学 建 模 及 其 实 验

ISBN 978-7-04-052743-3

数 学 建 模 及 其 实 验

ISBN 978-7-04-052744-0

数 学 建 模 及 其 实 验

ISBN 978-7-04-052745-7

数 学 建 模 及 其 实 验

ISBN 978-7-04-052746-4

数 学 建 模 及 其 实 验

ISBN 978-7-04-052747-1

数 学 建 模 及 其 实 验

ISBN 978-7-04-052748-8

数 学 建 模 及 其 实 验

科学出版社北京编辑部 2008年8月第1版

印制者: 北京市通州新华印刷厂有限公司

开本: 787×1092mm 1/16

印张: 12.5 字数: 350千字

印数: 1—30000

书名: 数学建模及其实验

作者: 严喜祖 宋中民 毕春加 编

定价: 35.00元

ISBN 978-7-04-052747-1

北京科学出版社(集团)有限公司

北京编辑部

北京 100037

邮购电话: 010-58514074

电子邮件: zgkx@bjtu.edu.cn

网 址: <http://www.sciencepress.com>

科学出版社

内 容 简 介

本书主要是根据“数学建模”课程的教学和“大学生数学建模竞赛”培训活动的实际需要,以及编者多年从事教学和培训工作的实践经验与体会编写而成的。考虑到课堂教学的特点和建模实验在整个建模过程中的重要性,本书在内容上体现了少而精和建模实验的实践性,目的是通过完整的建模过程训练,提高学生的建模能力和动手能力。本书包括引言、MATLAB 软件使用入门、LINGO 软件使用入门、代数几何模型、规划模型、微分方程模型、差分方程模型、图论模型、概率统计模型、灰色系统模型等 10 章。

本书可作为高等学校各专业学生“数学建模”课程的教材,亦可作为相关教师、研究生以及科技工作者的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

数学建模及其实验/严喜祖,宋中民,毕春加编. —北京:科学出版社,2009
21世纪高等院校教材

ISBN 978-7-03-024975-3

I. 数… II. ①严…②宋…③毕… III. ①数学模型-高等学校-教材
②高等数学-实验-高等学校-教材 IV. O141.4 O13-33

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 115856 号

责任编辑:王 静 房 阳 / 责任校对:陈玉凤
责任印制:张克忠 / 封面设计:陈 敬

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

丽源印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009 年 8 月第一版 开本:B5(720×1000)

2009 年 8 月第一次印刷 印张:18

印数:1—3 000 字数:352 000

定价: 29.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前　　言

数学是人类观察与认识世界的一种独特而有效的方法,它为创造性地研究自然和社会的各种问题提供了有力的理论基础和方法论指导.使数学能够发挥如此作用的武器就是数学建模,它也是数学发展的生命力所在.特别是 20 世纪以来,数学建模已成为各学科、各领域研究和解决问题的广泛而有效的手段.随着人们对数学建模的日益重视,特别是在功能强大的计算机工具的支持下,可以预料,也可以相信,数学建模必将在社会的诸多方面发挥越来越大的作用.

因此,数学建模课顺应历史潮流进入了大学课堂,虽然数学建模已有 20 多年 的历史,但数学建模课尚无公认完整严密的教学体系,也无成熟的标准,而且不同学校、不同教师对课程指导思想的理解差异很大,听课学生对课程的期望也很不相同.另外,数学建模课所论问题的实践性、涉猎范围的广泛性、解决问题方法的多样性和对计算机及其软件的紧密联系性等特点,决定了它区别于传统的数学教学,随之而来的教学内容、教学方法、教学模式以及其他各个教学环节也必须改革而与之相适应.

数学建模课主要是案例教学,考虑到该课程的特点、课堂教学的需要以及建模实验在整个建模过程中的重要性,为了使本书具有以下特色:内容生动丰富,少而精;模型案例具有一定的代表性;模型规模适当;模型模块完整;教学与实验结合,我们根据多年教学经验和体会,选取了一些适当的案例编写成册,作为教学教材和学习参考书.目的是通过完整的建模过程训练,提高学生的建模能力和动手能力.

本书在编写过程中得到了烟台大学数学与信息科学学院各级领导的关心和支持,得到了山东省基础学科建设专项资金项目和山东省精品课程建设项目的资助,在此一并表示衷心的感谢.

由于编者水平有限,书中不妥之处在所难免,恳请读者不吝赐教.

编　　者

2009 年 3 月

目 录

前言

第1章 引言	1
1.1 数学模型与数学建模	1
1.2 数学建模的发展概况	1
1.3 数学建模的基本步骤	3
第2章 MATLAB 软件使用入门	10
2.1 MATLAB 简介	10
2.2 变量与函数	13
2.3 MATLAB 的数值计算功能	16
2.4 MATLAB 的图形功能	24
2.5 程序设计	34
习题	42
第3章 LINGO 软件使用入门	43
3.1 LINGO 操作界面简介	43
3.2 LINGO 模型的基本特征	45
3.3 LINGO 的运算符和函数	47
3.4 LINGO 软件求解案例	52
习题	68
附录 LINGO 出错信息	69
第4章 代数几何模型	76
4.1 投入产出问题	76
4.2 选举问题	80
4.3 名额分配问题	86
4.4 合作博弈问题	92
4.5 层次分析法	99
4.6 流水线设计问题	112
习题	119

第 5 章 规划模型	121
5.1 有限资源的生产分配问题	121
5.2 配料问题	125
5.3 生产与存储问题	129
5.4 资金的最优使用	132
5.5 组合投资问题	135
5.6 生产计划的目标管理	138
5.7 渡河问题	143
5.8 森林救火问题	145
习题	147
第 6 章 微分方程模型	151
6.1 减肥问题	151
6.2 种群增长问题	155
6.3 战争问题	162
6.4 过滤嘴问题	168
6.5 万有引力定律	173
6.6 三级火箭发射卫星问题	179
习题	184
第 7 章 差分方程模型	187
7.1 宏观经济管理问题	187
7.2 供需平衡问题	189
7.3 湖水污染问题	194
7.4 森林管理问题	197
7.5 斐波那契数列与黄金分割问题	202
7.6 年龄结构的种群增长问题	206
习题	210
第 8 章 图论模型	212
8.1 最优连线问题	212
8.2 最短通路问题	215
8.3 储藏问题	217
8.4 最大流问题	219

8.5 循环赛名次问题	222
8.6 排课表问题	225
习题.....	228
第 9 章 概率统计模型.....	230
9.1 库存问题	230
9.2 维修问题	235
9.3 风险决策的咨询价值	236
9.4 对策问题	239
9.5 统计预测问题	244
9.6 试验设计问题	248
习题.....	252
第 10 章 灰色系统模型	254
10.1 灰关联分析模型.....	254
10.2 灰色序列生成.....	264
10.3 灰色预测模型.....	270
习题.....	278
参考文献.....	279

数学是研究现实世界的空间形式和数量关系的科学,作为一门重要的基础学科和精密的科学语言是众所周知的。当代科学技术的进步,特别是计算机科学技术的飞速发展,极大地推动了数学的理论和方法以前所未有的广度和深度向各个领域渗透,促进了数学同更多学科的结合,这为数学更广泛的应用,为在更多领域的数学建模研究提供了强有力的武器。同时也促使了一些新的交叉学科的诞生,如生物数学、经济数学、金融数学、地质数学等的形成和完善。有远见的科学家曾深刻地指出:“高科技本质上是一种数学技术”,这个观点现已被越来越多的人所接受。所谓“数学技术”实质上就是数学建模,所以数学建模越来越受到关注和重视。

第1章 引言

数学是研究现实世界的空间形式和数量关系的科学,作为一门重要的基础学科和精密的科学语言是众所周知的。当代科学技术的进步,特别是计算机科学技术的飞速发展,极大地推动了数学的理论和方法以前所未有的广度和深度向各个领域渗透,促进了数学同更多学科的结合,这为数学更广泛的应用,为在更多领域的数学建模研究提供了强有力的武器。同时也促使了一些新的交叉学科的诞生,如生物数学、经济数学、金融数学、地质数学等的形成和完善。有远见的科学家曾深刻地指出:“高科技本质上是一种数学技术”,这个观点现已被越来越多的人所接受。所谓“数学技术”实质上就是数学建模,所以数学建模越来越受到关注和重视。

1.1 数学模型与数学建模

数学模型(mathematical model),通常是指针对现实世界的一个特定对象,为了某种目的,依其自身的内在规律,进行一些必要的、合理的简化假设,运用适当的数学工具,得到的一个数学结构;或者说是由数字、字母或其他数学符号组成的,近似描述现实对象数量规律的数学公式、图形或算法。简单地说就是一种现实对象的数学表述。

数学建模(mathematical modeling),是指建立数学模型并对其进行分析、解释的全过程。也就是说,将实际问题依其自身的特点和规律,弄清所要讨论的问题及与之相关的各种因素和信息,经过去粗取精、去伪存真,抓住主要矛盾,进行抽象简化和合理假设,用数学的语言和方法转化为数学问题,然后选择适当的数学方法和工具,给予数学的分析与解答,再将所给出的结果返回到所论实际问题中去进行检验,若符合实际,数学建模成功,否则再从头开始,如此反复多次,直至通过实践检验为止。本教材的重点就是讨论建立数学模型的这种全过程。

1.2 数学建模的发展概况

数学建模已有悠久历史,但作为一个词汇问世,不过是近几十年的事。在人类发展的历史长河中有许多事例可以说明数学建模曾获得过成功。20世纪,数学建模取得了巨大成功,计量经济学、控制论、生物数学、地质数学、金融数学、运筹学等都是最好的说明。教育要跟踪、反映并满足社会的需要,于是数学建模作为一门课

程,20世纪70年代末由欧美一些发达国家开始开设,1985年美国出现了一种称为MCM(Mathematical Contest in Modeling)的一年一度的大学生数学建模竞赛.该竞赛与以往的竞赛不同,学生面对的是一些实际问题.这些问题没有现成的答案,没有固定的求解方法,没有指定的参考书,没有规定的数学工具与手段,也没有已经成型的数学问题,从建立数学模型开始就要求学生自己进行思考和研究,并以团队形式进行,最后提交论文.该竞赛一经推出,就受到世界各国的关注,现已成为一个世界性的大学生数学建模竞赛.受此影响,世界各国陆续开设了数学建模课,并组织相应的竞赛.我国在20世纪80年代初开始开设数学建模课,国内第一本数学建模教材在1987年出版,1992年开始,我国每年举行一次大学生数学建模竞赛.教学改革的发展和深入,全国大学生数学建模竞赛活动的蓬勃开展,都极大地推动了数学建模活动在我国高校中的推广与普及,同时也大大地促进了数学建模课程教学向纵深方向发展.作为数学教学改革的成果,作为培养高素质人才和提高大学生综合素质的一个重要环节,教育部已将数学建模课程列为数学类专业的必修课程,并作为选修课鼓励高校面向理工科大学生开设.实践证明,这门课程的开设对学生应用数学和计算机技能的训练,对学生“用数学”分析问题、解决实际问题能力的培养,对大学生综合素质的提高,都起到了很好的作用,深受学生们的欢迎.

数学建模作为一门课程开设,有许多实际意义.

首先,这是社会发展的需要.由于数学理论和方法不断向各学科各领域渗透,产生了大量的交叉学科和理论,并在社会的诸多方面发挥了重要作用.这种渗透和作用是数学建模的结果.于是数学建模成了人们研究和解决问题的一种基本方法.

其次,这是数学教育改革的需要.一方面,数学建模是数学的一个重要组成部分,它是数学产生和发展的生命力所在,缺少它,数学教育是不完整的;另一方面,传统的数学课程教学注重数学的高度抽象性、推理的严密性和理论的系统性等特点,忽略了各种数学概念和理论产生的实际背景,忽略了数学应用的广泛性和实践性.“学数学”与“用数学”是不同的.会学数学和掌握了数学的人不一定就会用数学,这同样需要学习和训练.缺乏数学建模的学习和训练,致使学生学习数学多年,却不了解其来源,更不知其用于何处和怎样运用所学的数学知识去解决实际问题,从而也影响了学生学习数学的积极性和数学素养的提高.数学建模课的开设,恰好弥补了这种缺陷和不足.

再次,这是人才培养、能力培养的需要.它通过向学生展示各种不同实际领域中的数学建模,通过对一系列来自不同领域的实际问题的提出、分析、建模和求解的学习与实践,培养学生们“用数学”的意识,培养学生们应用数学知识分析和解决实际问题的能力,使学生们认识到数学是人类观察与认识世界的一种独特而有效的方法,它为创造性地研究自然和社会的各种问题提供了有力的理论基础和方法.

论指导,从而大大提高学生学习数学的积极性,培养了他们的创新意识和创新能力。

1.3 数学建模的基本步骤

一个数学模型是一个现实对象的理想(简化的)表达形式。这个对象可以是已经存在的,也可以是未来计划的。前一种情况下,模型的目的是表述和分析这个对象;后一种情况,则是指出未来这个对象的结构形式。现实对象的复杂性是由于控制对象的元素(变量)比较多,如何将这些元素引入模型是建模的困难所在。虽然现实对象包含的元素很多,但一般主要支配对象的元素却是一小部分。因此,用一个模型来简化现实对象,主要集中在确定支配元素和影响它们的相互关系上。通过确定支配元素,把一个复杂的现实对象变成一个“假定对象”。模型是“假定对象”的一个抽象,它把支配元素之间的相互关系确定下来,并简化为一个适合于分析的形式。

比如,一种产品的需求 Q ,与它的功能 g 、价格 p 、国民收入 x 、同类产品的价格 y 、消费年龄 t 、民族习惯 u 等很多因素有关,即

$$Q = f(g, p, x, y, t, u, \dots),$$

以上因素中的每一个都直接或间接地影响需求,但是要想在这些因素和需求之间建立一个明确的关系是一件困难的事。

抽象工作的第一步是按照支配因素来确定“假定对象”。考虑到产品功能、同类产品价格、年龄、习惯等的特殊性,不妨假定它们是不变的(常量)。于是“假定的对象”为

$$Q = f(p, x),$$

按“假定对象”来考虑问题就比较容易了。根据价格与需求的递减关系、收入与需求的递增关系以及历史纪录,就可以统计拟合出一个从“假定对象”中抽象而来的模型。

再如,一种产品的制造,从设计到销售再到顾客手中,要经过许多工序。在设计确定以后,就要把订单下到生产部门,而生产部门又要向材料供应部门索取必要的材料,材料部门或者从它的库存满足这种需要,或者向采购部门发出采购单,当产品完成后,销售部门连同营业部门负责把产品销售给顾客。企业如何来考虑他的产量?从整个问题来看,许多因素影响着产量。生产部门:现有设备的利用、现有劳动力的利用、设备上规定的作业顺序、生产过程中的库存、次品的数量、检验率等;材料部门:现有材料的库存、购入材料的交货率、存储限额等;营业部门:销售预测、广告的作用、销售能力、产品的竞争力等。

以上因素都影响产量,但要建立一个明确关系是困难的。按支配因素来确定“假定的对象”,可以看出整个问题受两个因素支配:生产率和消费率。确定生产率,像现有设备的利用、现有劳动力的利用、作业顺序、材料的可获量等这些因素必须加以考虑。消费率可按照与营业部门有关的因素来确定,即从“现实对象”到“假定对象”的简化是把现实对象中的几个因素归并到假定对象中的一个因素的方法来完成的。按“假定对象”来考虑问题就比较容易了,根据生产率和消费率,可以对一个给定的产量确定存货剩余或短缺的数量,这样可以构造一个从“假定对象”中抽象出来的模型。

一般来说,从“现实对象”到“假定对象”,再从“假定对象”抽象出模型并没有固定的规则可以引用。把控制“现实对象”的因素减少到相当少的支配因素以及从“假定对象”中抽象出一个模型,与其说是一门技术,不如说是一种技巧、一种艺术。因为模型在表述“现实对象”的有效性方面主要取决于建模者的创造性、远见和想象力。这种个人的特性不可能用建立模型的固定规则来统一,所以数学建模过程是一种灵活性很强的创造性过程,很难用一种统一的模式和方法来确定它。下面通过几个实例来看一看它的大致步骤。

示例 1 哥尼斯堡(Königsberg)七桥问题。18世纪时,在哥尼斯堡城的普雷格尔(Pregel)河上,有7座桥把河的两岸和河中的岛连接了起来,如图1.1所示。

当时有一个问题,就是能否有人从这四块陆地中的任何一块开始,通过每一座桥正好一次,再回到出发点。很多人作了尝试,然而,任何尝试都没能成功。这个问题难住了哥尼斯堡人,成了当时一个没有解决的著名问题,即哥尼斯堡七桥问题。1736年,欧拉解决了这个问题,欧拉解决七桥问题就是采用了数学建模法。

建模既然岛与陆地通过桥梁连接,那么不妨把4块陆地缩小(抽象)成4个点,并把7座桥表示(抽象)成7条边,便得到了七桥问题的模拟图,如图1.2所示。

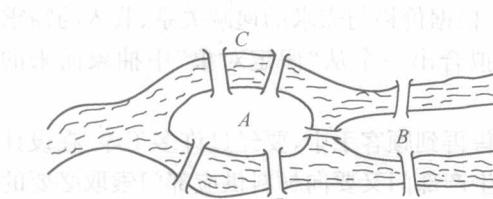


图 1.1

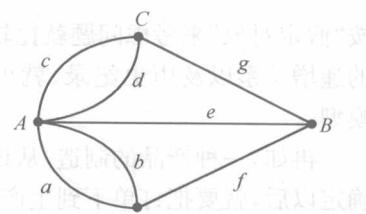


图 1.2

于是人们试图一次无重复地走过7座桥的问题就等价于一笔画出上述图形的问题(每条边必须且只需经过一次),即一笔画问题。由此得到了七桥问题的一个图模型。进一步,欧拉考查了一笔画的结构特征,除起始点与终点外,一笔画中出现的交点处的边总是一进一出,故交点所涉及边的总和为偶数,由此欧拉给出了如下结论:

- (1) 连接奇数个桥的陆地仅有一个或超过两个以上,不能实现一笔画;
- (2) 连接奇数个桥的陆地仅有两个时,则从任一陆地出发,可以实现一笔画而停在另一陆地;
- (3) 每个陆地都连接有偶数个桥时,则从任一陆地出发都能一笔画,而回到出发点.

应用 对于图 1.2,显然不能一笔画.著名的七桥问题解决了.欧拉并不限于处理这种特殊情形,他推广了这个问题,并给出了一个图可以一笔画的一个判定法则.欧拉用图模型不仅解决了七桥问题,而且解决了一笔画问题,从而使他成了图论和拓扑学的创始人.

示例 2 放射性废物的处理问题.人类在利用核能的同时也产生了大量的核废料,如何处理这些核废料是人类所面临的难题.某国的原子能机构曾这样处理放射性废物,他们把这些废物装入密封性能很好的圆桶中,然后把它们扔到水深 300ft(1ft=0.3048m)的海底.这种做法是否会造成放射性污染,很自然地引起了生态学家及社会各界的关注.该机构一再保证,圆桶非常坚固,决不会破漏,这种做法是绝对安全的,然而一些工程师们却对此表示怀疑,他们认为圆桶在和海底相撞时有可能发生破裂.

究竟谁的意见正确呢?看来只能让事实说话.

模型准备 问题的关键在于圆桶到底能承受多大速度的碰撞,圆桶和海底碰撞时的速度有多大?工程师们搜集了有关的信息,该机构使用的是 55gal(1gal=3.785L)的圆桶,装满放射性废物时的圆桶重量为 $W=527.436\text{lb}$.

模型假设 圆桶所受的海水阻力与圆桶的速度成正比,为 $D=Cv$.

工程师们做了大量的实验,测得 $C=0.08$,海水的浮力 $B=470.327\text{lb}$,并发现圆桶在直线速度为 40ft/s 的冲撞下会发生破裂.

模型建立 圆桶在沉入 300ft 深的海底时,其末速度究竟有多大呢?工程师们建立了以下微分方程模型.取一个垂直向下的坐标,并以海平面为坐标原点($y=0$).于是根据牛顿第二定律,圆桶下沉时应满足微分方程

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = W - B - D.$$

注意到 $m=W/g$, $D=Cv$, $dy/dt=v$,从而有圆桶下沉时的微分方程模型

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} + \frac{Cg}{W}v = \frac{g}{W}(W-B), \\ v(0) = 0. \end{cases}$$

模型求解 对模型求解得

$$v(t) = \frac{W-B}{C} \left(1 - e^{-\frac{Cgt}{W}}\right).$$

由已知数据可计算出圆桶的极限速度

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \frac{W - B}{C} \approx 713.86(\text{ft/s}),$$

如果极限速度不超过 40ft/s,那么工程师们也就罢了. 然而事实上, 和 40ft/s 的承受能力相比, 圆桶的极限速度竟是如此之大, 使人们不得不开始相信, 工程师们也许是对的.

为了求出圆桶与海底的碰撞速度 $v(t)$, 首先必须求出圆桶的下沉时间 t , 然而要做到这一点却是比较困难的. 改变计算方法, 将速度 v 表示成下沉深度 y 的函数, 即改写成

$$v(t) = v(y(t)).$$

根据复合函数求导法则

微分方程可以改写成

$$\begin{cases} m \frac{dy}{dt} \frac{dv}{dy} = W - B - Cv, \\ v(0) = 0, \quad y(0) = 0 \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} \frac{v}{W - B - Cv} \frac{dv}{dy} = \frac{g}{W}, \\ v(0) = 0, \quad y(0) = 0. \end{cases}$$

两边积分得到

$$-\frac{v}{C} + \frac{W - B - Cv}{C^2} \ln \frac{W - B - Cv}{W - B} = \frac{gy}{W}.$$

这是一个超越方程, 无法从中解出 $v = v(y)$, 并进而计算 $v(300)$. 借助数值计算方法, 可求出 $v(300)$ 的近似值. 计算结果是 $v(300) \approx 45.1\text{ft/s} > 40\text{ft/s}$, 这表明工程师们的猜测是正确的.

模型应用 为此, 该机构改变了他们处理放射性废物的方法, 并明确规定禁止将放射性废物抛入海中.

示例 3 汽车刹车距离. 为了避免两车追尾及其他交通事故, 考虑汽车的刹车距离问题.

问题分析 汽车的刹车距离比较显然的是由反应距离和制动距离两部分组成. 反应距离就是从司机意识到要停车到汽车制动器开始起作用汽车走过的距离.

制动距离就是制动器开始起作用到汽车完全停下来所滑行的距离.

反应距离由反应时间和车速决定, 反应时间取决于司机的个人状况(灵巧、机警、视野等)和制动系统的灵敏性(从司机脚踩刹车板到制动器真正起作用的时间). 考虑到一般情况, 视反应时间为常数(平均值), 且在这段时间内车速不变.

制动距离与制动器作用力(制动力)、车重、车速以及道路、气候等因素有关, 制动器是一个能量耗散装置, 制动力所做的功被汽车动能的改变所抵消. 设计制动器的一个合理原则是, 最大制动力大体上与车的质量成正比, 使汽车的减速度基本上是常数, 这样司机和乘客少受剧烈的冲击. 至于道路、气候等因素, 考虑到一般情况, 可看成是固定的.

模型假设 基于上述分析, 作以下假设:

(1) 刹车距离 d 等于反应距离 d_1 与制动距离 d_2 之和;

(2) 反应距离 d_1 与车速 v 成正比, 比例系数为反应时间 t_1 ;

(3) 刹车时使用最大制动力 F 所做的功等于汽车动能的改变, 且 F 与车的质量 m 成正比.

模型建立 由假设(2),

$$d_1 = t_1 v.$$

由假设(3), 在 F 作用下行驶距离 d_2 所做的功 Fd_2 时车速从 v 变到 0, 动能的变化为 $mv^2/2$, 有 $Fd_2 = mv^2/2$, 又由 $F \propto m$ 和牛顿第二定律 $F = ma$ 可知, 刹车时的加速度 a 是常数, 于是

$$d_2 = kv^2, \quad k = \frac{1}{2a},$$

则刹车距离为

$$d = t_1 v + kv^2.$$

模型检验 为了将这个模型用于实际, 需要知道其中的参数 t_1 和 k . 通常有经验估计和数据拟合两种方法. 下面是交通部门提供的一组测试观察数据(表 1.1, 1mile=1609m, 1ft=0.3048m).

表 1.1

速率/(mile/h)	反应距离/ft	制动距离/ft	刹车距离/ft
20	22	20	42
30	33	40.5	73.5
40	44	72	116
50	55	118	173
60	66	182	248
70	77	266	343
80	88	376	464

利用表 1.1 中的数据,可以得到 $t_1 = 1.104$, $k = 0.0542$, 于是 $d = 1.104v + 0.0542v^2$.

图 1.3 给出了实际刹车距离和计算刹车距离的比较.

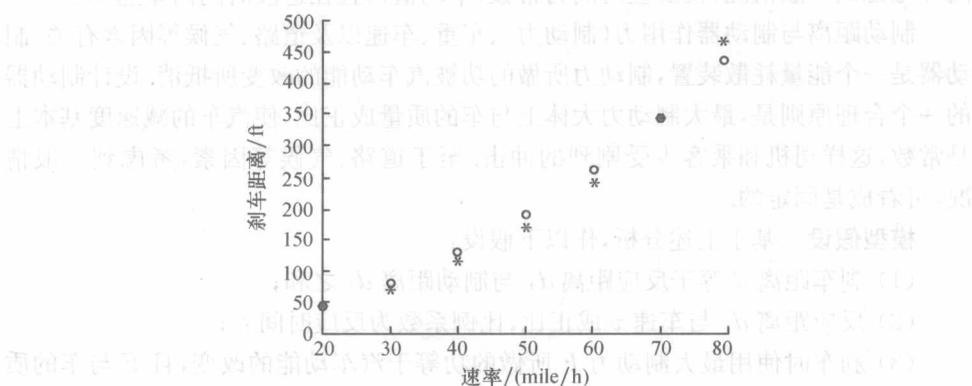


图 1.3

图中符号“*”表示实际刹车距离,“○”表示计算刹车距离. 可见拟合得较好.

模型应用 根据计算距离,可以计算出刹车时间(表 1.2).

表 1.2

速率/(mile/h)	刹车时间/s	速率/(mile/h)	刹车时间/s
0~10	1	40~60	3
10~40	2	60~80	4

参考表 1.2 的刹车时间,司机可以确定尾随距离,以避免发生追尾.

通过以上实例,大致可以归纳建模基本步骤如下:

(1) 模型的准备 了解问题的实际背景,明确建模目的,搜集有关的信息,弄清现实对象的主要特征,形成一个比较清晰的“问题”,即提出问题;

(2) 模型的假设 在提出问题的基础上,根据对象的特征和建模目的,抓住问题的本质,忽略次要因素,作出必要“合理”的简化假设,得到一个“假定对象”;

(3) 模型的建立 根据假设的对象,用数学语言和符号表述其元素与元素之间的关系,抽象出一个数学模型,如优化模型、方程模型、图模型等;

(4) 模型的求解 对抽象出的数学模型,利用相关的数学知识和方法进行求解,现今特别是利用数学软件和计算机技术求解;

(5) 模型的分析 对模型的求解结果进行数学上的分析,如结果的误差分析、统计分析、数据的灵敏度分析、假设的强健性分析等;

(6) 模型的检验 把求解和分析的结果翻译回实际问题,与实际的现象、数据

比较,检验模型的合理性和适用性;

(7) 模型的应用 建模的目的就是为了应用,用数学建模来研究和解决问题.

以上步骤并不是一个标准,但一般是可以接受的.各步没有固定的规则,各步间也没有明显的界限,需要我们发挥分析、抽象、推理、洞察、想象能力.建模主要依靠个人的能力和团体的合作,而不是依靠固定的规则和标准.

学习数学建模,首先应从学习、分析、评价、改造前人所做的模型开始,弄懂他们的问题,分析他们所用的方法,评价他们的优缺点,并试图去加以改进;其次是模拟,亲自动手完整地做几个实际问题,积累建模的经验.提高建模能力需要训练,本课程就是试图通过各个领域里不同数学方法建模的大量实例对学生加以训练,拓宽他们的视野,培养他们的意识,提高他们建模和解决实际问题的能力.

1.3.1 建模的一般步骤

在对“如何构造模型”这一问题进行深入探讨之前,先看一个简单的例子.

例1 试用要求,通过向量的和与差,把向量的加法与减法结合起来.

设向量的和与差是通过向量的加法与减法结合起来的,那么向量的加法与减法是如何结合起来的呢?为了回答这个问题,我们先从向量的加法与减法的定义入手.

向量的加法与减法是通过向量的加法与减法结合起来的,那么向量的加法与减法是如何结合起来的呢?为了回答这个问题,我们先从向量的加法与减法的定义入手.

第 2 章 MATLAB 软件使用入门

MATLAB 是 Matrix Laboratory(矩阵实验室)的缩写,是由美国 MathWorks 公司于 20 世纪 80 年代初推出的一套以矩阵计算为基础的、适合多学科、多种工作平台的功能强劲的大型软件。MATLAB 将数值计算、可视化和编程功能集成在非常便于使用的环境中,具有编程效率高、用户使用方便、扩充能力强、移植性好等特点。经过 MathWorks 公司的不断完善,目前 MATLAB 已经发展成为国际上最优秀的高性能科学与工程计算软件之一。

2.1 MATLAB 简介

2.1.1 MATLAB 的工作环境

假定在您的计算机里已经安装了 MATLAB7.0,在 Windows 桌面上就会出现 MATLAB7.0 的图标,双击此图标,进入 MATLAB 的工作界面。MATLAB7.0 的工作界面主要由菜单、工具栏、命令窗口、工作空间管理窗口、命令历史窗口和当前目录窗口组成。

1. 菜单和工具栏

MATLAB 的菜单和工具栏界面与 Windows 程序的界面类似,只要稍加实践就可以掌握其功能和使用方法。

2. 命令窗口

MATLAB 命令窗口(Command Window)是用来接受 MATLAB 命令的窗口。在命令窗口中直接输入命令,可以实现显示、清除、储存、调出、管理、计算和绘图等功能。MATLAB 命令窗口中的符号“>>”为运算提示符,表示 MATLAB 处于准备状态。当在提示符后输入一段程序或一段运算式后按回车键,MATLAB 会给出计算结果并将其保存在工作空间管理窗口中,然后再次进入准备状态。

在命令窗口中实现管理功能的常用命令有以下几个:

- | | |
|-------|--------------------|
| >>cd | 显示当前工作目录; |
| >>dir | 显示当前工作目录或指定目录下的文件; |
| >>clc | 清除命令窗口中的所有内容; |