21世纪高等院校教材

微积分

周性伟 主编

科学出版社
www.sciencep.com

21世纪高等院校教材

微 积 分

周性伟 主编

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书共 10 章，包括实数与函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数应用、不定积分、定积分、常微分方程简介、多元函数微分学、二重积分、无穷级数等内容．书后附有部分习题参考答案．

本书可作为高等院校非数学专业学生的教材，也可作为教师、学生和其他人员的参考书．

图书在版编目(CIP)数据

微积分/周性伟主编. —北京：科学出版社，2009

21 世纪高等院校教材

ISBN 978-7-03-023512-1

Ⅰ. 微… Ⅱ. 周… Ⅲ. 微积分 Ⅳ. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008) 第 185777 号

责任编辑：王静 房阳／责任校对：陈玉凤

责任印制：张克忠／封面设计：陈敬

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

新 蕾 印 刷 厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009 年 5 月第 一 版 开本：B5(720 × 1000)

2009 年 5 月第一次印刷 印张：12 1/4

印数：1—4 500 字数：235 000

定价：22.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈新蕾〉)

前　言

目前在我国高等学校, 几乎所有专业都把微积分 (或高等数学) 开设成必修课. 由于微积分的内容十分丰富, 各专业可根据自身的需要, 选取其中的一部分来讲解, 从而形成不同类型的微积分课. 而这种不同, 本质上是由专业和总学时数决定的. 一般来说, 总学时数多一些, 内容就可以多讲一些, 讲深一些, 例子可以多举一些, 习题可以多做一些等.

本教材是为 120 学时左右的微积分课编写的.

其实, 不管什么样的专业, 设置微积分课的根本目的都是为了实施素质教育, 是要向学生简要介绍人类文明中已有几百年历史的这部分内容的概貌, 从而使学生不仅学到 (进而初步掌握) 一种解决问题的方法, 更重要的是能逐步学会严密的逻辑推理, 学会对一些现象 (自然界的、社会的), 通过去粗取精, 提炼出其中最重要的一些因素的数量关系, 建立数学模型, 从而更好地揭示这些现象的本质、掌握其规律、预测其未来, 最终达到服务人类的目的.

毫无疑问, 微积分中与实际问题直接有关的是微分和积分, 它们在本教材中占了大部分篇幅. 但另一方面又必须强调, 微分和积分的基础是极限. 正是极限这个各种现象的高度概括及它的定量化描述, 才使我们从初等数学中那些静止的数字关系及图像中走出来, 进入一幅运动的、不断变化的图画中. 在这里我们看到: 瞬时速度, 是不断变化的平均速度的极限; 切线, 是不断变化的割线的极限; 一块边界弯曲的图形的面积, 是众多长方形面积之和的极限等. 不论哪一类微积分课, 成功的教学, 不仅要使学生能较熟练地 "微分" 和 "积分", 更重要的是使学生能较深刻地理解极限这个概念, 从而能较好地运用由此产生的微分和积分, 以研究和解决众多新的实际问题. 正是这个原因, 和其他同类型教材相比, 本教材对极限的方方面面给予了更多的关注.

本教材共分 10 章, 第 1~4 章由杨波执笔; 第 5~7 章由王志芹执笔; 第 8 章由冀有虎执笔; 第 9 章由李永平执笔; 第 10 章由姚静执笔. 周性伟参与了所有章节的编写.

我们诚恳希望读者对本教材提出各种宝贵意见和建议.

周性伟

2008 年 10 月于南开大学

目　　录

前言
第 1 章　实数与函数……1
1.1　实数……1
1.2　函数……2
1.3　复合函数与反函数……4
1.4　函数的一些属性……5
1.5　常用的一些不等式……6
习题 1……7
第 2 章　极限与连续……10
2.1　数列及其极限……10
2.2　函数在一点的极限与连续……14
2.3　函数在一点的单侧极限及连续……17
2.4　函数在无穷远处的极限……20
2.5　极限的性质……20
2.6　无穷小量与无穷大量……24
2.7　连续函数的性质……27
习题 2……29
第 3 章　导数与微分……32
3.1　导数的定义……32
3.2　一些基本初等函数的导数……35
3.3　导数的运算法则……36
3.4　高阶导数……42
3.5　微分……45
习题 3……46
第 4 章　微分中值定理与导数应用……50
4.1　微分中值定理……50
4.2　函数的单调性……53
4.3　函数的凸性……54
4.4　洛必达法则……61
4.5　最值问题……63

习题 4 ··· 64
第 5 章　不定积分 ··· 67
5.1　原函数的概念 ··· 67
5.2　不定积分的概念 ··· 68
5.3　几个基本的不定积分计算法 ··· 69
习题 5 ··· 75
第 6 章　定积分 ··· 79
6.1　定积分的概念和性质 ··· 79
6.2　微积分基本定理 ··· 85
6.3　定积分的换元积分与分部积分法 ··· 87
6.4　定积分的应用 ··· 92
6.5　广义积分 ··· 96
习题 6 ··· 99
第 7 章　常微分方程简介 ··· 104
7.1　有关常微分方程的一些基本概念 ··· 104
7.2　导数可解出的一阶常微分方程 $F(x,y,y')=0$ ··· 105
7.3　可降阶的高阶微分方程 ··· 108
7.4　二阶常系数齐次线性微分方程 ··· 109
习题 7 ··· 111
第 8 章　多元函数微分学 ··· 113
8.1　预备知识 ··· 113
8.2　多元函数的极限与连续 ··· 118
8.3　偏导数与全微分 ··· 121
8.4　多元复合函数与隐函数微分法 ··· 124
8.5　多元函数的极值 ··· 129
习题 8 ··· 134
第 9 章　二重积分 ··· 136
9.1　二重积分的概念 ··· 136
9.2　二重积分的性质 ··· 138
9.3　直角坐标下二重积分的计算 ··· 140
9.4　极坐标下二重积分的计算 ··· 146
习题 9 ··· 150
第 10 章　无穷级数 ··· 152
10.1　常数项级数的概念和性质 ··· 152
10.2　正项级数 ··· 155

10.3 任意项级数 ……159
10.4 幂级数 ……161
10.5 函数的幂级数展开 ……166
习题 10 ……172
部分习题参考答案 ……175

第 1 章　实数与函数

本章讲述实数及一元函数的概念及其性质.

1.1　实　　数

在中学阶段, 我们已经知道正整数 (即自然数)、数 0、负整数、分数等这样一些数的概念, 这些数统称为**有理数**. 除了有理数外, 还存在像 $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi$ 等那样的无理数, 当然, 无理数远不只这些. 有理数和无理数统称为**实数**. 所有实数组成的集称为**实数系**.

关于实数系, 需要注意下面几条基本事实:

(1) 若 $\varepsilon > 0$ 和 $M > 0$ 是任意两个正实数, 则必存在正整数 N 使 $N\varepsilon > M$(这个事实有时也称为**阿基米德公理**);

(2) 实数之间可以像有理数那样进行加、减、乘、除四则运算, 此外, 在和有理数类似的条件下, 也可对实数进行对数、开方、三角函数、反三角函数等运算, 所有这些运算的结果都还是实数;

(3) 任何两个相异实数之间既存在有理数, 也存在无理数. 如果用数轴上的点来表示, 即数轴上任何两个相异点之间既有有理点, 也有无理点. 这个事实通常称为 "有理数和无理数在实数系中的**稠密性**".

下面一些符号经常被用到:

$\mathbb{N}$(自然数全体), $\mathbb{Z}$(整数全体), $\mathbb{Q}$(有理数全体), $\mathbb{Q}^c$(无理数全体), $\mathbb{R}$(实数全体).

又若 X 是一个集合, x 是 X 中的一个元, 则记 $x \in X$; 若 x 不是 X 中的元, 则记 $x \notin X$. 例如, $1 \in \mathbb{N}, -2 \in \mathbb{Z}, 0.1 \in \mathbb{Q}, \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ 等.

定义 1.1　(1) 设 $a < b$ 是两个实数, 则满足不等式 $a \leqslant x \leqslant b$ 的一切实数 x 组成的集合称为**闭区间**, 记为 $[a, b]$(图 1.1);

(2) 满足不等式 $a < x < b$ 的一切实数 x 组成的集合称为**开区间**, 记为 (a, b)(图 1.2).

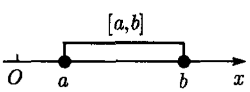

图 1.1

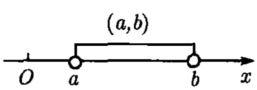

图 1.2

类似地, 可定义下面一些区间:

$[a,b)$ 表示满足不等式 $a \leqslant x < b$ 的一切实数 x 组成的集;

$(a,b]$ 表示满足不等式 $a < x \leqslant b$ 的一切实数 x 组成的集;

$(a,+\infty)$ 表示满足不等式 $x > a$ 的一切实数 x 组成的集;

$[a,+\infty)$ 表示满足不等式 $x \geqslant a$ 的一切实数 x 组成的集;

$(-\infty,b)$ 表示满足不等式 $x < b$ 的一切实数 x 组成的集;

$(-\infty,b]$ 表示满足不等式 $x \leqslant b$ 的一切实数 x 组成的集;

$(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$.

定义 1.2　形如 $(a-\delta,a+\delta)$ 的开区间称为 a 的**邻域**, 其中 $\delta>0$, 记为 $N(a,\delta)$.

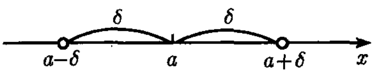

图 1.3

由定义, $N(a,\delta)$ 就是以 a 为中心, 以 δ 为半径的开区间 $(a-\delta,a+\delta)$, 它也就是满足不等式 $|x-a|<\delta$ 的实数 x 的全体 (图 1.3).

此外, 我们经常把满足 $0<|x-a|<\delta$ 的一切 x 组成的集称为 a 的**空心邻域**, 它也就是邻域 $N(a,\delta)$ 中取走中心 a 以后的集合.

1.2　函　　数

在中学阶段, 我们已学过下列一些函数:

$y=C$　(常数函数);

$y=a^x$　(指数函数);

$y=x^\lambda$　(幂函数);

$y=\log_a x$　(以 $a>0$ 为底的对数函数);

$y=\sin x,\quad \cos x,\quad \tan x,\quad \cot x$　(三角函数);

$y=\arcsin x,\quad \arccos x,\quad \arctan x,\quad \operatorname{arc\,cot} x$　(反三角函数).

上述六类函数统称为**基本初等函数**, 它们虽然有各自的定义域及图像, 但有一个共同点, 即对其定义域中的每一个 x, 都通过一定的法则对应于唯一的一个 y 值. 例如,

$$x \xrightarrow{\text{对应法则}a^x} y(=a^x), \quad x \xrightarrow{\text{对应法则}x^\lambda} y(=x^\lambda).$$

把这种共同点一般化, 就得到一般函数的概念.

定义 1.3　设 X,Y 是两个实数集. 若按照某种法则, 对每一 $x\in X$, 有唯一的一个 $y\in Y$ 与之对应, 则我们就说给出了从 X 到 Y 的一个**函数**. 若用 f 表示该法则, 这个函数通常写成

$$f: X \to Y,$$

而上述 x 和 y 之间的关系可写成

$$y=f(x).$$

此时称 x 为**自变量**, y 为**应变量**, X 为 f 的**定义域**, $f(X)$(即值 $f(x)$ 全体) 为 f 的**值域**.

于是, 基本初等函数都是函数. 注意, 只要法则相同, 自变量和应变量可以用不同的符号来表示. 例如 $y=\sin x, u=\sin t$ 表示的是同一个函数, 即正弦函数.

下面列举几个特别的函数.

例 1　设 A 是一个实数集. 定义

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A,\\ 0, & x\notin A,\end{cases}$$

$\chi_A(x)$ 称为集合 A 的**特征函数**.

特别地, 有理数全体 $\mathbb{Q}$ 的特征函数 $D(x)$ 称为**狄利克雷函数**, 即

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数},\\ 0, & x\text{为无理数}.\end{cases}$$

例 2　函数

$$\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$$

称为**符号函数**(图 1.4). 很明显, 对任何 x,

$$x\cdot\operatorname{sgn} x=|x|.$$

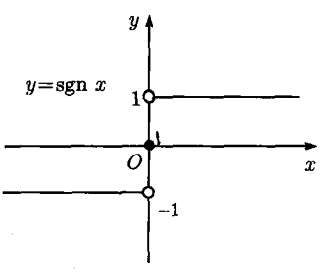

图 1.4

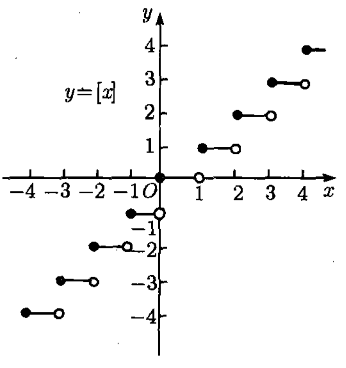

图 1.5

例 3　对每一实数 x, 定义

$$[x] = \text{不大于}x\text{的最大整数}.$$

$[x]$ 称为**取整函数**(图 1.5).

例如, $[1.2]=1, [0.3]=0, [-2.3]=-3$, $[5]=5$ 等. 很明显, 对任何 x,

$$[x] \leqslant x < [x]+1.$$

我们知道每一个有理数 x 可唯一地表示为一个分数 $\dfrac{q}{p}$, 其中 p 是正整数, q 是整数, p 和 q 既约 (即没有大于 1 的公因子). 于是可以有下面的定义.

例 4　定义

$$R(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{p}, & x = \dfrac{q}{p}, \\ 0, & x\text{为无理数}, \end{cases}$$

上述 $R(x)$ 称为**黎曼函数**.

1.3　复合函数与反函数

设 $g: X \to Y, f: Y \to Z$ 是两个函数. 此时对每一 $x \in X$, 按法则 g, 得到实数 $y = g(x) \in Y$. 又对这个 y, 按法则 f, 得到实数 $z = f(y) = f(g(x)) \in Z$. 这样由这两个函数 g 和 f, 我们得到一个新的从 X 到 Z 的函数:

$$x \xrightarrow{g} y = g(x) \xrightarrow{f} z = f(y) = f(g(x)).$$

这个函数称为函数 g 和 f 的**复合函数**, 记为 $f \circ g$.

例如, 若 $f(x) = \sin x, g(x) = x^2$, 则

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sin(g(x)) = \sin x^2,$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = [f(x)]^2 = \sin^2 x.$$

再设 $f: X \to Y$ 是一个函数. 若对 X 中任何 $x_1 \neq x_2$ 有 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 则称 f 是 X 到 Y 的一个**单射**; 若对每一 $y \in Y$, 有 $x \in X$ 使 $y = f(x)$, 则称 f 是 X 到 Y 的一个**满射**; 若 f 既是单射, 也是满射, 则称 f 是 X 到 Y 的一个**双射**.

若 $f: X \to Y$ 是一个双射, 则对每一 $y \in Y$, X 中有且只有一个 x 使 $y = f(x)$, 这样就得到一个从 Y 到 X 的对应法则, 记为 $f^{-1}: Y \to X$, 并称它是 $f: X \to Y$ 的**反函数**. 此时很明显, 为使 $x = f^{-1}(y)$, 当且仅当 $y = f(x)$.

例如, $\sin x: \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ 是双射, 它的反函数是 $\arcsin x: [-1,1] \to$

$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. 再如, $x^2 : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ 是双射, 它的反函数是 $\sqrt{x} : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$.

由基本初等函数通过有限次加、减、乘、除及复合得到的函数称为**初等函数**. 特别地,

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \quad a_n \neq 0$$

称为 n**阶多项式**, 它是初等函数. 两个多项式的商称为**有理函数**, 它也是初等函数.

1.4 函数的一些属性

(1) **有界性**. 设 $f(x)$ 定义在实数集 D 上.

若有实数 M, 使对任何 $x \in D$ 有 $f(x) \leqslant M$, 则称 $f(x)$ 在 D 上是**有上界的**, 并称 M 是 $f(x)$ 的一个**上界**;

若有实数 m, 使对任何 $x \in D$ 有 $f(x) \geqslant m$, 则称 $f(x)$ 在 D 上是**有下界的**, 并称 m 是 $f(x)$ 的一个**下界**;

若 $f(x)$ 在 D 上既有上界, 也有下界, 则称 $f(x)$ 在 D 上**有界**. 不是有界的函数称为**无界函数**.

很明显, 为使 $f(x)$ 在 D 上有界, 充要条件是有 $L > 0$, 使对一切 $x \in D$ 有 $|f(x)| \leqslant L$.

容易验证, $\sin x, \cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是有界的; $x^2, 2^x$ 在 $[0,1]$ 上是有界的; 此外, 特征函数、符号函数、黎曼函数也都是有界的.

例 1 求证 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上无界.

证明 由定义, 只需证明 $f(x)$ 没有上界. 事实上任给 $M > 1$, 取 $x_0 = \frac{1}{2M}$, 则 $x_0 \in (0,1)$ 并且 $f(x_0) = \frac{1}{x_0} = 2M > M$. 这说明任何 $M > 1$ 都不是 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上的上界. 因此 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上是无界的.

(2) **单调性**. 设 $f(x)$ 定义在实数集 D 上.

若对 D 中任何两点 x_1, x_2, 只要 $x_1 < x_2$, 就有 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ $(f(x_1) < f(x_2))$, 则称 $f(x)$ 在 D 上是**单增的**(**严格单增的**);

若对 D 中任何两点 x_1, x_2, 只要 $x_1 < x_2$, 就有 $f(x_1) \geqslant f(x_2)(f(x_1) > f(x_2))$, 则称 $f(x)$ 在 D 上是**单减的**(**严格单减的**).

例如, x^2 在 $(-\infty, 0]$ 上是严格单减的, 在 $[0,+\infty)$ 上是严格单增的; 符号函数和取整函数都是单增的, 但不是严格单增的.

(3) **奇偶性**. 设 $f(x)$ 定义在形如 $(-a,a)$ 的对称区间上.

若对任何 $x \in (-a,a)$ 有 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 是**偶函数**;

若对任何 $x \in (-a,a)$ 有 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 是**奇函数**.

例如, $x, \sin x, \operatorname{sgn} x$ 都是 $(-\infty,+\infty)$ 上的奇函数; $|x|, \cos x$ 都是偶函数.

(4) **周期性**. 设 $f(x)$ 定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上. 若有 $T > 0$, 使对任何 x 有 $f(x+T) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 是**周期函数**, 并称 T 是 $f(x)$ 的一个**周期**.

例如, 2π 是 $\sin x, \cos x$ 的周期, 而且是最小的正周期. 容易验证, 任何正有理数都是狄利克雷函数的周期. 因此狄利克雷函数没有最小的正周期.

1.5　常用的一些不等式

不等式在分析问题的证明中经常出现.

(1) **三角不等式**. 对任何实数 a, b,

$$||a| - |b|| \leqslant |a+b| \leqslant |a| + |b|.$$

事实上, 由于 $-|a|\,|b| \leqslant ab \leqslant |a|\,|b|$, 因此

$$a^2 - 2|a|\,|b| + b^2 \leqslant a^2 + 2ab + b^2 \leqslant a^2 + 2|a|\,|b| + b^2,$$

即

$$(|a| - |b|)^2 \leqslant (a+b)^2 \leqslant (|a| + |b|)^2.$$

由此得 $||a| - |b|| \leqslant |a+b| \leqslant |a| + |b|$.

(2) **算术–几何不等式**. 对任何 n 个正数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$,

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

上式左端称为**几何平均值**, 右端称为**算术平均值**.

事实上, 当 $n = 2$ 时, 由 $a_1 - 2\sqrt{a_1 a_2} + a_2 = \left(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}\right)^2 \geqslant 0$ 就可得所要的不等式. 又若令 $x = \sqrt{a_1 a_2}, y = \sqrt{a_3 a_4}$, 则利用 $n = 2$ 时的不等式, 得到

$$\sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4} = \sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_3 + a_4}{2}\right) = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4},$$

即当 $n = 4 = 2^2$ 时不等式成立. 用归纳法, 容易证明对任何 $n = 2^k$ 不等式成立.

其次, 若对某个 n 不等式成立, 可证它对 $n-1$ 也成立. 事实上, 若令 $b = \dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k$, 则

$$b = \frac{1}{n} \cdot nb = \frac{1}{n}\left[(n-1)b + b\right] = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + b) \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_{n-1} b}.$$

于是 $b^{\frac{n-1}{n}} \geqslant \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_{n-1}}$, 即 $b \geqslant \sqrt[n-1]{a_1a_2\cdots a_{n-1}}$, 这就是所要的 $n-1$ 时的不等式.

这样, 先用一次 "朝后" 归纳法, 再用一次 "朝前" 归纳法, 就证明了所要的不等式.

(3) **柯西不等式**. 对任何实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 及 $b_1, b_2, \cdots, b_n$,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}.$$

事实上, 对任意实数 x,

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n}(a_k x - b_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot x^2 - 2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \cdot x + \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

从而上式右端关于 x 的二次式的判别式非正, 即

$$4\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 - 4\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \leqslant 0.$$

由此得上述柯西不等式.

(4) **一个三角函数不等式**. 对任何 $0 < x < \frac{\pi}{2}$,

$$\sin x < x < \tan x.$$

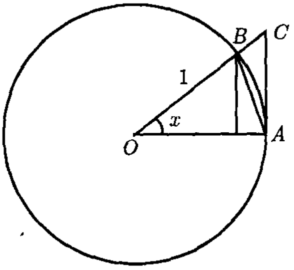

图 1.6

事实上, 作单位圆 (图 1.6). 在 $A(1,0)$ 作切线 AC. 圆心角 $\angle AOB = x$. 延长 OB 交 AC 于 C, 则

$$S_{\triangle OAB} < S_{\text{扇形}OAB} < S_{\triangle OAC},$$

即

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x.$$

由此得所要的不等式.

习 题 1

1. 设实数 $a \geqslant 0$. 若对任何 $\varepsilon > 0$ 有 $a < \varepsilon$, 求证 $a = 0$.
2. 给定实数 a, b. 若对任何 $\varepsilon > 0$ 有 $a \leqslant b + \varepsilon$, 求证 $a \leqslant b$.
3. 求下列函数的定义域:

(1) $y = \sqrt{3x - x^2}$; (2) $y = \lg(x+3) + \lg(x-3)$;

(3) $y=\sqrt{\cos x^2}$;　　(4) $y=\arcsin\left(\lg\dfrac{x}{10}\right)$.

4. 设 $f(u)$ 的定义域是 $(0,1)$, 求 $f(\sin x), f(\lg x)$ 及 $f\left(\dfrac{[x]}{x}\right)$ 的定义域.

5. 下列函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同?

(1) $f(x)=\lg x^2,\ g(x)=2\lg x$;

(2) $f(x)=\sqrt{x^2-1},\ g(x)=x\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}$.

6. 设 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$, 求 $f(f(x)), f(f(f(x)))$.

7. 设 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$, 求 $f(0), f(-x), f(x+1), f(x)+1, f\left(\dfrac{1}{x}\right), \dfrac{1}{f(x)}$.

8. 若 $f\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=\dfrac{3x-1}{3x+1}$, 求 $f(x)$.

9. 研究下列函数在指定区间上的单调性:

(1) $x^2, 0\leqslant x<+\infty$;　　(2) $\sin x, -\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$;

(3) $\cos x, 0\leqslant x\leqslant\pi$;　　(4) $\tan x, -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$;

(5) $\cot x, 0<x<\pi$;　　(6) $2x+\sin x, -\infty<x<+\infty$.

10. 研究下列函数的单调性:

(1) $f(x)=ax+b$;　　(2) $f(x)=ax^2+bx+c$;

(3) $f(x)=x^3$;　　(4) $f(x)=a^x(a>0)$.

11. 判断下列函数在 $(-\infty,+\infty)$ 上的奇偶性:

(1) $f(x)=x^2-\cos x$;　　(2) 狄利克雷函数;

(3) $f(x)=x(x-1)(x+1)$;　　(4) $f(x)=\sin x\cos x$.

12. 求证: 任何一个定义在 $(-l,l)$ 上的函数都可以表示成一个奇函数与一个偶函数之和, 且表示法唯一.

13. 求证: $y=\lg x$ 在 $(0,1)$ 上无界.

14. 指出下列函数中哪些是周期函数, 哪些不是:

(1) $y=\cos(2x-1)$;　　(2) $y=|\sin x|$;

(3) $y=\sin^2 x$;　　(4) $\cos x^2$.

15. 求下列函数的反函数:

(1) $y=\dfrac{x-1}{x+1}$;　　(2) $y=\dfrac{10^x-10^{-x}}{2}$.

16. 若 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 0, & |x|=1,\\ -1, & |x|>1,\end{cases}$ $g(x)=10^x$, 求 $f(g(x)), g(f(x))$.

17. 若

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ x, & x>0,\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ -x^2, & x>0,\end{cases}$$

求 $f(g(x)), g(g(x)), f(f(x)), g(f(x))$.

18. 求方程 $[3x+1]=2x-\dfrac{1}{2}$ 的解.

19. 设 a,b 为正数, 且 $a+b=ab$, 求 $a+b$ 的最小值.

20. 若 $3x^2+2y^2=6x$, 求 x^2+y^2 的最大值、最小值.

21. 若 $f(x),g(x)$ 的定义域和值域都是 $\mathbb{R}$, 且均存在反函数, 求 $y=f^{-1}\left(g^{-1}\left(f\left(x\right)\right)\right)$ 的反函数.

22. 求证: $y=\dfrac{\sin x}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上有界.

第 2 章 极限与连续

本章讲述函数的变化趋势. 先介绍几个符号.

符号 "→" 读作 "越来越接近" 或 "趋向". 例如, "当 x 越来越接近 2 时, x^2 越来越接近 4" 可以表示为 "当 $x \to 2$ 时 $x^2 \to 4$".

符号 "$+\infty$" "$-\infty$" 及 "∞" 分别读作 "正无穷大" "负无穷大" 和 "无穷大", 它们都表示变化趋势. 例如, "$x \to +\infty$" 表示变量 x 沿实线正方向无限地增大; "$x \to -\infty$" 表示变量 x 沿实线负方向无限地减小. 如果把 $+\infty$ 和 $-\infty$ 想象成两个 "数", 那么 $+\infty$ 表示一个比任何数都大的 "数", $-\infty$ 表示一个比任何数都小的 "数". 此时 "$x \to +\infty$" 可以读作 "x 越来越接近 $+\infty$" 或 "x 趋向 $+\infty$"; "$x \to -\infty$" 可以读作 "x 越来越接近 $-\infty$" 或 "x 趋向 $-\infty$". 显然当 $x \to +\infty$ 时 $-x \to -\infty$, 反之亦然. 最后 "$x \to \infty$" 表示变量 x 的绝对值 $|x|$ 沿实线正方向无限地增大, 即 "$|x| \to +\infty$".

在上面这些符号的介绍中, 我们使用了 "越来越接近"、"趋向"、"无限地增大" 及 "无限地减小" 等语言. 从直观上看, 这些语言表达的都是一种变化趋势, 因而是运动的, 而不是静止的. 本章讲述的就是当自变量沿一个确定的方向变化时, 应变量的变化趋势.

2.1 数列及其极限

只对正整数有定义的函数称为**数列**, 通常用 x_n, y_n, z_n 等符号表示, 其中 n 为正整数, x_n, y_n, z_n 分别表示对应的函数值. 例如, $x_n = \dfrac{1}{n}, y_n = \dfrac{n}{n+1}, z_n = (-1)^n n$ 等都是数列. 有时为了直观起见, 经常也把数列对应于 $n = 1, 2, 3, \cdots$ 的若干项写出来. 例如, 上面几个数列可以写成:

$$x_n : 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots.$$
$$y_n : \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots.$$
$$z_n : -1, 2, -3, \cdots, (-1)^n n, \cdots.$$

由于一个数列 x_n 的自变量 n 只能取正整数, 因此 n 的变化趋势只有一种, 即 $n \to +\infty$. 至于 x_n 的变化趋势, 就要视 x_n 的具体情况而定. 例如, 直观上容易得