

高中数学

解题方法

王朝璇 编著



WUHAN UNIVERSITY PRESS

武汉大学出版社

高中数学

解题方法

王朝璇 编著



WUHAN UNIVERSITY PRESS

武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学解题方法/王朝璇编著. —武汉: 武汉大学出版社,
2008. 12

ISBN 978-7-307-06675-5

I . 高… II . 王… III . 数学课—高中—解题 IV . G634. 605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 175983 号

责任编辑: 顾素萍

责任校对: 黄添生

版式设计: 马 佳

出版发行: 武汉大学出版社 (430072 武昌 珞珈山)

(电子邮件: cbs22@whu.edu.cn 网址: www.wdp.com.cn)

印刷: 湖北省荆州市今印印务有限公司

开本: 880 × 1230 1/32 印张: 13.25 字数: 368 千字 插页: 1

版次: 2008 年 12 月第 1 版 2008 年 12 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-307-06675-5/G · 1258 定价: 21.00 元

版权所有, 不得翻印; 凡购我社的图书, 如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请与当地图书销售部门联系调换。

以爱的名义

(代序)

李大春

寻芳陌上花如锦，折得东风第一枝。

在新一轮高三师生备战高考的关键时刻，朝璇老师的倾心之作——《高中数学解题方法》书香飘溢，被甜蜜的期待和信任所拥抱。无论是用科学发展的眼光来观照，还是用创新探究的精神来审视，无论是用课程标准的理念来品味，还是用选拔人才的尺度来衡量，这本书酿造的是决胜高考的信心与能力。这本书突破了高中数学板块之间的壁垒，集解题思路、解题过程、解题感悟于一体，融会贯通，举一反三，为解决当前高中数学教学中存在的困惑作出了一些思考，提供了一些思路，类举了一些方法，具有很强的实用性、针对性和探究性，是广大高中生增强数学兴趣和提高数学成绩的一剂良方。通览全书，我们为朝璇老师忠诚教育，热爱教育，把职业当做事业，把事业当做责任的精神而肃然起敬，为朝璇老师“数学与生活同样精彩”的教育格言而拍案叫绝，为朝璇老师有意识地培养学生良好的数学思维习惯而击节赞赏，这是朝璇老师一辈子教育人格、教育思想与教育智慧的精彩体现。

教书育人需要智慧作支撑，更需要思想来导航。在当前课程改革的大潮中，我们如何在知识和能力、过程和方法、情感态度和价值观念这个课程改革的体系中踏浪前行，这是我们每一位教师必须深思的问题。在“新教育、新课程、新江中”的新背景下，江陵中学涌现了一大批像朝璇老师这样优秀的教师，他们立足岗位，敬业，乐业，精业，善业，因而形成了一个优秀、和谐、创新的团队，这是教育的一种至高境界，也为江陵中学课程改革增添了一道

靓丽的风景。一位优秀的教师必须具备课堂教学能力和学术研究能力。我们要积极倡导专业引导、同伴互助、自我反思的课程革新理念和新方法，在教书育人的同时，逐步提高自己的教科研能力和水平；我们要怀着一份坦然、笃实的心态努力工作。这才是一个教师完整的人格体系和价值体系。

“莫道桑榆晚，为霞尚满天。”朝璇老师一辈子怀挚诚之心，秉纯粹之意，承教育之慧，勤恳授业，正直为人，年近六旬仍笔耕不辍，深受广大师生的爱戴和敬仰。

愿《高中数学解题方法》成为莘莘学子的翼下罡风，让其六月放歌，直上青云。



录

第一讲 集合与简易逻辑问题的解题方法	1
第二讲 函数问题的解题方法	10
第三讲 数列的通项的求法	36
第四讲 数列的求和方法	47
第五讲 三角函数问题的解题方法	57
第六讲 不等式的证明方法	74
第七讲 轮换式不等式的证明方法	89
第八讲 利用圆锥曲线的定义解题	96
第九讲 圆锥曲线的轨迹方程的探求方法	103
第十讲 圆锥曲线中最值问题的探求方法	112
第十一讲 平面几何知识在解析几何中的应用	124
第十二讲 立体几何中角度的求解方法	135
第十三讲 立体几何中距离的求法	154
第十四讲 排列组合问题的解题方法	165
第十五讲 概率问题的解题方法	175
第十六讲 利用函数和方程的思想解题	196
第十七讲 利用数形结合的思想解题	222
第十八讲 利用分类讨论的思想解题	240
第十九讲 利用转换和化归的思想解题	258
第二十讲 利用整体思维方法解题	279
第二十一讲 利用对称思维方法解题	296
第二十二讲 利用辩证思维方法解题	307
第二十三讲 逆向思维在解题中的应用	320
第二十四讲 利用变量代换的方法解题	331

第二十五讲 利用构造模型的方法解题	342
第二十六讲 探索性问题的解题方法	362
第二十七讲 类比型创新题的解题方法	370
第二十八讲 解题中的常见错误辨析	384
附文一 发掘教材 让我们享受数学内在美	400
附文二 让人文教育走进数学教学课堂	408
参考文献	417
后记	418

第1讲 数学解题的基本思想方法	第2讲 数学解题的基本策略	第3讲 数学解题的基本技巧	第4讲 数学解题的基本思想方法	第5讲 数学解题的基本策略	第6讲 数学解题的基本技巧	第7讲 数学解题的基本思想方法	第8讲 数学解题的基本策略	第9讲 数学解题的基本技巧	第10讲 数学解题的基本思想方法	第11讲 数学解题的基本策略	第12讲 数学解题的基本技巧	第13讲 数学解题的基本思想方法	第14讲 数学解题的基本策略	第15讲 数学解题的基本技巧	第16讲 数学解题的基本思想方法	第17讲 数学解题的基本策略	第18讲 数学解题的基本技巧	第19讲 数学解题的基本思想方法	第20讲 数学解题的基本策略	第21讲 数学解题的基本技巧	第22讲 数学解题的基本思想方法	第23讲 数学解题的基本策略	第24讲 数学解题的基本技巧	第25讲 数学解题的基本思想方法	第26讲 数学解题的基本策略	第27讲 数学解题的基本技巧	第28讲 数学解题的基本思想方法	第29讲 数学解题的基本策略	第30讲 数学解题的基本技巧	第31讲 数学解题的基本思想方法	第32讲 数学解题的基本策略	第33讲 数学解题的基本技巧	第34讲 数学解题的基本思想方法	第35讲 数学解题的基本策略	第36讲 数学解题的基本技巧	第37讲 数学解题的基本思想方法	第38讲 数学解题的基本策略	第39讲 数学解题的基本技巧	第40讲 数学解题的基本思想方法	第41讲 数学解题的基本策略	第42讲 数学解题的基本技巧																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180	181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200	201	202	203	204	205	206	207	208	209	210	211	212	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224	225	226	227	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260	261	262	263	264	265	266	267	268	269	270	271	272	273	274	275	276	277	278	279	280	281	282	283	284	285	286	287	288	289	290	291	292	293	294	295	296	297	298	299	300	301	302	303	304	305	306	307	308	309	310	311	312	313	314	315	316	317	318	319	320	321	322	323	324	325	326	327	328	329	330	331	332	333	334	335	336	337	338	339	340	341	342	343	344	345	346	347	348	349	350	351	352	353	354	355	356	357	358	359	360	361	362	363	364	365	366	367	368	369	370	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380	381	382	383	384	385	386	387	388	389	390	391	392	393	394	395	396	397	398	399	400	401	402	403	404	405	406	407	408	409	410	411	412	413	414	415	416	417	418	419	420	421	422	423	424	425	426	427	428	429	430	431	432	433	434	435	436	437	438	439	440	441	442	443	444	445	446	447	448	449	450	451	452	453	454	455	456	457	458	459	460	461	462	463	464	465	466	467	468	469	470	471	472	473	474	475	476	477	478	479	480	481	482	483	484	485	486	487	488	489	490	491	492	493	494	495	496	497	498	499	500	501	502	503	504	505	506	507	508	509	510	511	512	513	514	515	516	517	518	519	520	521	522	523	524	525	526	527	528	529	530	531	532	533	534	535	536	537	538	539	540	541	542	543	544	545	546	547	548	549	550	551	552	553	554	555	556	557	558	559	560	561	562	563	564	565	566	567	568	569	570	571	572	573	574	575	576	577	578	579	580	581	582	583	584	585	586	587	588	589	590	591	592	593	594	595	596	597	598	599	600	601	602	603	604	605	606	607	608	609	610	611	612	613	614	615	616	617	618	619	620	621	622	623	624	625	626	627	628	629	630	631	632	633	634	635	636	637	638	639	640	641	642	643	644	645	646	647	648	649	650	651	652	653	654	655	656	657	658	659	660	661	662	663	664	665	666	667	668	669	660	661	662	663	664	665	666	667	668	669	670	671	672	673	674	675	676	677	678	679	680	681	682	683	684	685	686	687	688	689	690	691	692	693	694	695	696	697	698	699	700	701	702	703	704	705	706	707	708	709	710	711	712	713	714	715	716	717	718	719	720	721	722	723	724	725	726	727	728	729	730	731	732	733	734	735	736	737	738	739	740	741	742	743	744	745	746	747	748	749	750	751	752	753	754	755	756	757	758	759	760	761	762	763	764	765	766	767	768	769	770	771	772	773	774	775	776	777	778	779	770	771	772	773	774	775	776	777	778	779	780	781	782	783	784	785	786	787	788	789	790	791	792	793	794	795	796	797	798	799	800	801	802	803	804	805	806	807	808	809	810	811	812	813	814	815	816	817	818	819	820	821	822	823	824	825	826	827	828	829	830	831	832	833	834	835	836	837	838	839	840	841	842	843	844	845	846	847	848	849	850	851	852	853	854	855	856	857	858	859	860	861	862	863	864	865	866	867	868	869	870	871	872	873	874	875	876	877	878	879	880	881	882	883	884	885	886	887	888	889	890	891	892	893	894	895	896	897	898	899	900	901	902	903	904	905	906	907	908	909	910	911	912	913	914	915	916	917	918	919	920	921	922	923	924	925	926	927	928	929	930	931	932	933	934	935	936	937	938	939	940	941	942	943	944	945	946	947	948	949	950	951	952	953	954	955	956	957	958	959	960	961	962	963	964	965	966	967	968	969	970	971	972	973	974	975	976	977	978	979	980	981	982	983	984	985	986	987	988	989	990	991	992	993	994	995	996	997	998	999	1000	1001	1002	1003	1004	1005	1006	1007	1008	1009	1010	1011	1012	1013	1014	1015	1016	1017	1018	1019	1020	1021	1022	1023	1024	1025	1026	1027	1028	1029	1030	1031	1032	1033	1034	1035	1036	1037	1038	1039	1040	1041	1042	1043	1044	1045	1046	1047	1048	1049	1050	1051	1052	1053	1054	1055	1056	1057	1058	1059	1060	1061	1062	1063	1064	1065	1066	1067	1068	1069	1070	1071	1072	1073	1074	1075	1076	1077	1078	1079	1080	1081	1082	1083	1084	1085	1086	1087	1088	1089	1090	1091	1092	1093	1094	1095	1096	1097	1098	1099	1100	1101	1102	1103	1104	1105	1106	1107	1108	1109	1110	1111	1112	1113	1114	1115	1116	1117	1118	1119	1120	1121	1122	1123	1124	1125	1126	1127	1128	1129	1130	1131	1132	1133	1134	1135	1136	1137	1138	1139	1140	1141	1142	1143	1144	1145	1146	1147	1148	1149	1150	1151	1152	1153	1154	1155	1156	1157	1158	1159	1160	1161	1162	1163	1164	1165	1166	1167	1168	1169	1170	1171	1172	1173	1174	1175	1176	1177	1178	1179	1180	1181	1182	1183	1184	1185	1186	1187	1188	1189	1190	1191	1192	1193	1194	1195	1196	1197	1198	1199	1200	1201	1202	1203	1204	1205	1206	1207	1208	1209	1210	1211	1212	1213	1214	1215	1216	1217	1218	1219	1220	1221	1222	1223	1224	1225	1226	1227	1228	1229	1230	1231	1232	1233	1234	1235	1236	1237	1238	1239	1230	1231	1232	1233	1234	1235	1236	1237	1238	1239	1240	1241	1242	1243	1244	1245	1246	1247	1248	1249	1240	1241	1242	1243	1244	1245	1246	1247	1248	1249	1250	1251	1252	1253	1254	1255	1256	1257	1258	1259	1250	1251	1252	1253	1254	1255	1256	1257	1258	1259	1260	1261	1262	1263	1264	1265	1266	1267	1268	1269	1260	1261	1262	1263	1264	1265	1266	1267	1268	1269	1270	1271	1272	1273	1274	1275	1276	1277	1278	1279	1270	1271	1272	1273	1274	1275	1276	1277	1278	1279	1280	1281	1282	1283	1284	1285	1286	1287	1288	1289	1280	1281	1282	1283	1284	1285	1286	1287	1288	1289	1290	1291	1292	1293	1294	1295	1296	1



第一讲

集合与简易逻辑问题的解题方法

集合和简易逻辑是高中数学的起始章节，是承接初、高中数学知识的重要环节，体现了高中数学知识中众多的思想和方法。其主要内容有：集合的概念、性质、运算，简易逻辑，4种命题，充要条件。高考中常常以选择题和填空题的形式出现，主要考查集合的关系判断和集合的运算、抽象集合的关系判断和集合的运算、集合语言和集合思想的运用、充要条件和复合命题真假的判断。

一、集 合

(一) 集合的概念和性质

1. (2007年全国卷I) 设 $a, b \in \mathbb{R}$, 集合 $\{1, a+b, a\} = \left\{0, \frac{b}{a}, b\right\}$, 则 $b-a = (\quad)$.
- A. 1 B. -1 C. 2 D. -2

解 由题设知道 $a \neq 0$, 故只有 $a+b=0$, 即 $a=-b$. 所以 $\frac{b}{a}=-1$, 从而 $b=1$, $a=-1$. 因此 $b-a=2$. 故选C.

【解题感悟】 本小题考查两个集合相等的概念. 要注意集合的元素有三性：确定性，无序性，互斥性.

2. 已知集合 $A = \{x \mid |x-2a| \leq a+1\}$, $B = \{x \mid x^2 - 11x + 10 \geq 0\}$. 若 $A \cap B = \emptyset$, 则实数 a 的取值范围是_____.

解 若 $A \cap B = \emptyset$, 则有 $A = \emptyset$ 或 $A \neq \emptyset$ 两种情况.

若 $A = \emptyset$, 则有 $a+1 < 0$, 即 $a \in (-\infty, -1)$.

若 $A \neq \emptyset$, 由 $A = \{x | a-1 \leq x \leq 3a+1\}$, $B = \{x | x \geq 10\}$ 或 $x \leq 1\}$, 有

$$\begin{cases} a-1 > 1, \\ 3a+1 < 10, \\ 3a+1 \geq a-1, \end{cases}$$

即 $a \in (2, 3)$.

故 $a \in (-\infty, -1) \cup (2, 3)$.

【解题感悟】 本小题考查两个集合的交集为空集这一概念. 注意 $A \cap B = \emptyset$ 包含两种情况: $A = \emptyset$ 或 $A \neq \emptyset$. 解题时不要忘记 $A = \emptyset$.

3. (2006 年湖北卷) 有限集合 S 中元素的个数记做 $\text{card}(S)$. 设 A, B 都为有限集合, 给出下列命题:

- ① $A \cap B = \emptyset$ 的充要条件是 $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$;
- ② $A \subseteq B$ 的必要条件是 $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$;
- ③ $A \not\subseteq B$ 的充分条件是 $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$;
- ④ $A = B$ 的充要条件是 $\text{card}(A) = \text{card}(B)$.

其中真命题的序号是().

- A. ③,④ B. ①,② C. ①,④ D. ②,③

解 ① $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow$ 集合 A 与集合 B 没有公共元素, 正确.

② $A \subseteq B \Leftrightarrow$ 集合 A 中的元素都是集合 B 中的元素, 正确.

③ $A \not\subseteq B \Leftrightarrow$ 集合 A 中至少有一个元素不是集合 B 中的元素, 因此 A 中元素的个数有可能多于 B 中元素的个数, 错误.

④ $A = B \Leftrightarrow$ 集合 A 中的元素与集合 B 中的元素完全相同, 两个集合的元素个数相同, 并不意味着它们的元素相同, 错误.

故选 B.

【解题感悟】 本小题考查子集、交集、空集、集合相等以及充

要条件等概念。要准确地理解各种概念。此题也可以作出文氏图直接判断。

4. (2007年湖南卷) 设集合 $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, S_1, S_2, \dots, S_k 都是 M 的含两个元素的子集, 且满足: 对任意的 $S_i = \{a_i, b_i\}$, $S_j = \{a_j, b_j\}$ ($i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$), 都有

$$\min\left\{\frac{a_i}{b_i}, \frac{b_i}{a_i}\right\} \neq \min\left\{\frac{a_j}{b_j}, \frac{b_j}{a_j}\right\}$$

($\min\{x, y\}$ 表示两个数 x, y 中的较小者), 则 k 的最大值是()。

- A. 10 B. 11 C. 12 D. 13

解 方法1 由 $\min\left\{\frac{a_i}{b_i}, \frac{b_i}{a_i}\right\} \neq \min\left\{\frac{a_j}{b_j}, \frac{b_j}{a_j}\right\}$, 可知 S_i 与 S_j 中两元素之比的最小值不相等, 故这种子集最多有 $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 6\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}$ 共 11 个。因此选 B。

方法2 集合 M 的二元子集共有 $C_6^2 = 15$ 个。当 $\frac{a_i}{b_i} = \frac{1}{2}$ 时, $S_i = \{1, 2\}, \{2, 4\}, \{3, 6\}$, 此时有

$$\min\left\{\frac{a_i}{b_i}, \frac{b_i}{a_i}\right\} = \min\left\{\frac{a_j}{b_j}, \frac{b_j}{a_j}\right\},$$

不满足题意。因此, 这种子集只能有一个。同理, 当 $\frac{a_i}{b_i} = \frac{1}{3}$ 和 $\frac{a_i}{b_i} = \frac{2}{3}$ 时, 这种子集也只能各有一个。所以这种子集最多有 $15 - 2 - 1 - 1 = 11$ 个, 因此 k 的最大值是 11。故选 B。

【解题感悟】 本小题以集合为载体, 以排列、组合为平台, 综合考查集合和排列组合的有关知识以及创新意识。要求考生对题目提供的信息进行理解、分析、组合和迁移。方法1用的是列举法, 方法2用的是逆向思维方法。

(二) 集合的运算

5. (2008年辽宁卷 I) 已知集合 $M = \left\{x \mid \frac{x+3}{x-1} < 0\right\}$, $N =$

$\{x|x \leq -3\}$, 则集合 $\{x|x \geq 1\} = (\quad)$.

- A. $M \cap N$
B. $M \cup N$
C. $C_{\mathbb{R}}(M \cap N)$
D. $C_{\mathbb{R}}(M \cup N)$

解 由 $\frac{x+3}{x+1} < 0$, 有 $-3 < x < 1$, 即 $M = \{x|-3 < x < 1\}$.

又 $N = \{x|x \leq -3\}$, 所以 $M \cup N = \{x|x < 1\}$. 因此

$$C_{\mathbb{R}}(M \cup N) = \{x|x \geq 1\}.$$

故选 D.

【解题感悟】本小题考查分式不等式的解法以及集合的并集、补集的运算.

6. (2007 年安徽卷) 若 $A = \{x \in \mathbb{Z} | 2 \leq 2^{2-x} < 8\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | |\log_2 x| > 1\}$, 则 $A \cap C_{\mathbb{R}}B$ 的元素个数为().

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

解 $A = \{x \in \mathbb{Z} | 2 \leq 2^{2-x} < 8\} = \{0, 1\}$. 由 $|\log_2 x| > 1$ 有 $\log_2 x > 1$ 或 $\log_2 x < -1$, 即 $x > 2$ 或 $0 < x < \frac{1}{2}$, 所以

$$B = \left\{x \mid x > 2 \text{ 或 } 0 < x < \frac{1}{2}\right\},$$

因此 $C_{\mathbb{R}}B = \left\{x \mid \frac{1}{2} \leq x \leq 2 \text{ 或 } x \leq 0\right\}$, 从而 $A \cap C_{\mathbb{R}}B = \{0, 1\}$. 故

选 C.

【解题感悟】本小题考查指数不等式、对数不等式和绝对值不等式的运算, 考查交集和补集的运算.

7. (2006 年江苏卷) 若 A, B, C 为三个集合, $A \cup B = B \cap C$, 则一定有().

- A. $A \subseteq C$ B. $C \subseteq A$ C. $A \neq C$ D. $A = \emptyset$

解 因为 $A \subseteq A \cup B$ 且 $C \cap B \subseteq C$, 又 $A \cup B = C \cap B$, 所以 $A \subseteq C$. 故选 A.

【解题感悟】本小题主要考查对集合之间关系的理解和集合

的子、交、并集运算，考查三个抽象集合之间的关系。对于这种类型的题目，还可以考虑利用文氏图解题，使之形象化、具体化。

8. (2006 年安徽卷) 设集合 $A = \{x \mid |x - 2| \leq 2, x \in \mathbb{R}\}$, $B = \{y \mid y = -x^2, -1 \leq x \leq 2\}$, 则 $\complement_{\mathbb{R}}(A \cap B)$ 等于 ()。

- A. \mathbb{R} B. $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$ C. $\{0\}$ D. \emptyset

本题方法1 $A = [0, 2]$, $B = [-4, 0]$, 因此 $A \cap B = \{0\}$, 所以 $\complement_{\mathbb{R}}(A \cap B) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$, 故选 B.

方法2 注意到选项 A 和 D 互斥, 选项 B 和 C 互斥, 而选项 A 和 D 与题设的特点不相符, 所以排除 A, D; 又显然有 $0 \in A \cap B$, 所以排除 C; 故选 B.

【解题感悟】 本小题是集合部分的典型题目, 以不等式和二次函数为载体考查集合的运算。解题时, 首先要弄清楚集合 B 的含义, 这是数集而不是点集, 其次要知道选项中的互斥关系。

此题还可以利用德·摩尔根定理求解, 即设 U 为全集, 集合 A, B 是集合 U 的子集, 则有

$$\begin{aligned} (\complement_U A) \cup (\complement_U B) &= \complement_U(A \cap B), \\ (\complement_U A) \cap (\complement_U B) &= \complement_U(A \cup B). \end{aligned}$$

9. (2006 年全国卷 II) 设 $a \in \mathbb{R}$, 函数 $f(x) = ax^2 - 2x - 2a$. 若 $f(x) > 0$ 的解集为 A, $B = \{x \mid 1 < x < 3\}$, $A \cap B \neq \emptyset$, 求实数 a 的取值范围.

解 若 $a = 0$, 则 $A = \{x \mid x < 0\}$, $A \cap B = \emptyset$, 不满足题意.

若 $a \neq 0$, $f(x)$ 为二次函数, 令 $f(x) = 0$, 解得其两根为

$$x_1 = \frac{1}{a} - \sqrt{2 + \frac{1}{a^2}}, \quad x_2 = \frac{1}{a} + \sqrt{2 + \frac{1}{a^2}},$$

且有 $x_1 < 0$, $x_2 > 0$.

- ① 当 $a > 0$ 时, $A = \{x \mid x < x_1 \text{ 或 } x > x_2\}$, $A \cap B \neq \emptyset$ 的充要条件是 $x_2 < 3$, 即 $\frac{1}{a} + \sqrt{2 + \frac{1}{a^2}} < 3$, 解得 $a > \frac{6}{7}$.

② 当 $a < 0$ 时, $A = \{x | x_1 < x < x_2\}$, $A \cap B \neq \emptyset$ 的充要条件是 $x_2 > 1$, 即 $\frac{1}{a} + \sqrt{2 + \frac{1}{a^2}} > 1$, 解得 $a < -2$.

综上, 使 $A \cap B \neq \emptyset$ 成立的 a 的取值范围为

$$(-\infty, -2) \cup \left(\frac{6}{7}, +\infty\right).$$

【解题感悟】 本小题考查含参数的一元二次不等式的解法和交集、空集的概念. 注意解参数不等式时对参数的讨论.

二、简易逻辑

(一) 逻辑联结词及 4 种命题

10. (2005 年江苏卷) 命题“若 $a > b$, 则 $2^a > 2^b - 1$ ”的否命题为_____.

解 “ $a > b$ ”的否定是“ $a \leq b$ ”, “ $2^a > 2^b - 1$ ”的否定是“ $2^a \leq 2^b - 1$ ”, 故原命题的否命题是“若 $a \leq b$, 则 $2^a \leq 2^b - 1$ ”.

【解题感悟】 原命题的逆命题是“若 $2^a > 2^b - 1$, 则 $a > b$ ”; 原命题的逆否命题是“若 $2^a \leq 2^b - 1$, 则 $a \leq b$ ”. 4 种命题可以表示为

① 原命题: 若 p 则 q ;

② 逆命题: 若 q 则 p ;

③ 否命题: 若 $\neg p$ 则 $\neg q$;

④ 逆否命题: 若 $\neg q$ 则 $\neg p$.

注意原命题与逆否命题等价, 逆命题与否命题等价.

11. (2007 年山东卷) 命题“对任意的 $x \in \mathbb{R}$, $x^3 - x^2 + 1 \leq 0$ ”的否定是() .

A. 不存在 $x \in \mathbb{R}$, 使 $x^3 - x^2 + 1 \leq 0$

B. 存在 $x \in \mathbb{R}$, 使 $x^3 - x^2 + 1 \geq 0$

C. 存在 $x \in \mathbb{R}$, 使 $x^3 - x^2 + 1 > 0$

- D. 对任意的 $x \in \mathbf{R}$, 使 $x^3 - x^2 + 1 > 0$

解 方法1 “对任意的 $x \in \mathbf{R}$, $x^3 - x^2 + 1 \leq 0$ ”的意思是“对所有的实数 x , $x^3 - x^2 + 1 \leq 0$ ”, 即是“不存在实数 x , 使 $x^3 - x^2 + 1 > 0$ ”, 因此, 原命题的否定是“存在 $x \in \mathbf{R}$, 使 $x^3 - x^2 + 1 > 0$ ”. 故选 C.

方法2 选项 A 仅是对原命题条件的否定; 选项 B 与原命题是包含关系; 选项 D 是原命题的充分不必要条件. 故选 C.

【解题感悟】本小题考查简易逻辑.

要区分两个不同的概念: 命题的否定和否命题. 命题的否定只是否定原命题的结论, 而否命题则是同时否定原命题的条件和结论.

要根据复合命题的真假判断理论: “或”的否定是“且”; “且”的否定是“或”; “都是”的否定是“不都是”; “没有一个”的否定是“至少有一个”. 方法1正是基于这种思路进行思考的, 方法2是利用排除法进行筛选的, 这是解选择题的常用方法.

(二) 充分必要条件

12. (2008年湖北卷) 若非空集合 A, B, C 满足 $A \cup B = C$, 且 B 不是 A 的子集, 则() .

- A. “ $x \in C$ ”是“ $x \in A$ ”的充分条件但不是必要条件
- B. “ $x \in C$ ”是“ $x \in A$ ”的必要条件但不是充分条件
- C. “ $x \in C$ ”是“ $x \in A$ ”的充要条件
- D. “ $x \in C$ ”既不是“ $x \in A$ ”的充分条件也不是“ $x \in A$ ”的必要条件

解 由题意知道, 非空集合 A, B, C 可以用图来表示, 如图 1-1. 若 $x \in C$, 不一定有 $x \in A$. 而 $x \in A$, 则必有 $x \in C$. 所以“ $x \in C$ ”是“ $x \in A$ ”的必要条件但不是充分条件. 故选 B.

【解题感悟】本小题考查集合之间的关系以及充分、必要条件. 注意利用图形解题一目了然.

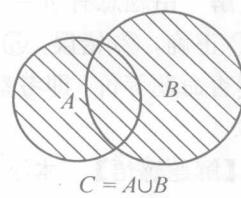


图 1-1

13. (2008 年福建卷) 设集合 $A = \left\{ x \mid \frac{x}{x-1} < 0 \right\}$, $B = \{x \mid 0 < x < 3\}$, 那么“ $m \in A$ ”是“ $m \in B$ ”的().

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

解 因为

$$A = \left\{ x \mid \frac{x}{x-1} < 0 \right\} = \{x \mid 0 < x < 1\},$$

所以 $A \neq B$. 当 $m \in A$ 时, 必有 $m \in B$; 而当 $m \in B$ 时, 不一定有 $m \in A$. 所以“ $m \in A$ ”是“ $m \in B$ ”的充分而不必要条件. 故选 A.

【解题感悟】 本小题以集合为载体考查充分条件和必要条件的概念.

14. (2007 年湖北卷) 已知 p 是 r 的充分条件而不是必要条件, q 是 r 的充分条件, s 是 r 的必要条件, q 是 s 的必要条件. 现有下列命题:

- ① s 是 q 的充要条件;
- ② p 是 q 的充分条件而不是必要条件;
- ③ r 是 q 的必要条件而不是充分条件;
- ④ $\neg p$ 是 $\neg s$ 的必要条件而不是充分条件;
- ⑤ r 是 s 的充分条件而不是必要条件,

则正确命题序号是().

- A. ①, ④, ⑤ B. ①, ②, ④ C. ②, ③, ⑤ D. ②, ④, ⑤

解 由题意有 $p \Rightarrow r$, $q \Rightarrow r$, $r \Rightarrow s$, $s \Rightarrow q$, 所以 $q \Leftrightarrow s \Leftrightarrow r$, 即 ① 正确, ③ 错误, ⑤ 错误. 由 $p \Rightarrow q$ 知 ② 正确. ④ 根据原命题和逆否命题等价, 即考察 s 是 p 的什么条件. 由 $p \Rightarrow s$ 有 ④ 正确. 故选 B.

【解题感悟】 本小题考查充要条件的概念以及命题之间的关系. 解题时要根据题意罗列出各种条件的表达式, 然后再作出正确判断.

15. 证明: 在 $\triangle ABC$ 中, $\sin A > \sin B$ 的充要条件是 $\angle A > \angle B$.

证 先证充分性. 若 $\angle A > \angle B$, 分如下两种情况讨论.

① 若 $\angle A, \angle B$ 都是锐角, 由 $y = \sin x$ 当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时单调递增, 有 $\sin A > \sin B$.

② 若 $\angle A$ 是钝角, $\angle B$ 是锐角, 则有 $\angle A + \angle B < \pi$, 即

$$0 < \angle B < \pi - \angle A < \frac{\pi}{2}.$$

由 $y = \sin x$ 当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时单调递增, 有

$$\sin B < \sin(\pi - A) = \sin A,$$

即 $\sin A > \sin B$.

所以 $\angle A > \angle B \Rightarrow \sin A > \sin B$.

再证必要性. 若 $\sin A > \sin B$, 即 $\sin A - \sin B > 0$, 则

$$2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} > 0.$$

由 $0 < \frac{\angle A + \angle B}{2} < \frac{\pi}{2}$, 有 $\cos \frac{A+B}{2} > 0$, 所以 $\sin \frac{A-B}{2} > 0$. 又

因为 $-\frac{\pi}{2} < \frac{\angle A - \angle B}{2} < \frac{\pi}{2}$, 所以 $0 < \frac{\angle A - \angle B}{2} < \frac{\pi}{2}$, 即有

$\angle A > \angle B$. 因此 $\sin A > \sin B \Rightarrow \angle A > \angle B$.

故 $\sin A > \sin B$ 的充要条件是 $\angle A > \angle B$.

【解题感悟】 本小题考查充要条件的证明方法. 要注意分清充分性和必要性. 此题若去掉条件 $\triangle ABC$, 其结论面目全非, $\sin A > \sin B$ 是 $\angle A > \angle B$ 既非充分又非必要条件.



函数问题的解题方法

函数是高中数学中极为重要的内容，函数的观点和方法贯穿整个高中数学的全过程。函数是高考考查的重点，考查主要体现在三个方面：一是考查函数的基本概念和基本性质，多采用选择题和填空题；二是函数和其他内容（方程、不等式、数列、立体几何和解析几何）交汇的综合题，这种类型的题目有一定的难度，对学生综合能力的要求比较高；三是和函数有关的应用题，题目不难，解题的关键是准确理解题意，正确建立函数关系。

一、求函数的定义域

1. (1) (2008 年湖北卷) 函数

$$f(x) = \frac{1}{x} \ln(\sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{-x^2 - 3x + 4})$$

的定义域为()。

- A. $(-\infty, -4] \cup [2, +\infty)$ B. $(-4, 0) \cup (0, 1)$
C. $[-4, 0) \cup (0, 1]$ D. $[-4, 0) \cup (0, 1)$

(2) 函数 $y = \frac{\lg(2-x)}{\sqrt{12+x-x^2}} + (x-1)^0$ 的定义域为_____。

解 (1) 解不等式组

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geqslant 0, \\ -x^2 - 3x + 4 \geqslant 0, \\ x \neq 0, \end{cases}$$