高中数学

解题方法

王朝璇 编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

高中数学

解题方法

王朝璇　编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学解题方法/王朝璇编著.—武汉：武汉大学出版社，2008.12

ISBN 978-7-307-06675-5

Ⅰ.高…　Ⅱ.王…　Ⅲ.数学课—高中—解题　Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 175983 号

责任编辑:顾素萍　　责任校对:黄添生　　版式设计:马　佳

出版发行：武汉大学出版社　(430072　武昌　珞珈山)

(电子邮件：cbs22@whu.edu.cn　网址：www.wdp.com.cn)

印刷:湖北省荆州市今印印务有限公司

开本：880×1230　1/32　印张:13.25　字数:368 千字　插页:1

版次:2008 年 12 月第 1 版　2008 年 12 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-307-06675-5/G·1258　定价:21.00 元

以爱的名义

（代序）

李大春

寻芳陌上花如锦，折得东风第一枝。

在新一轮高三师生备战高考的关键时刻，朝璇老师的倾心之作——《高中数学解题方法》书香飘溢，被甜蜜的期待和信任所拥抱。无论是用科学发展的眼光来观照，还是用创新探究的精神来审视，无论是用课程标准的理念来品味，还是用选拔人才的尺度来衡量，这本书酿造的是决胜高考的信心与能力。这本书突破了高中数学板块之间的壁垒，集解题思路、解题过程、解题感悟于一体，融会贯通，举一反三，为解决当前高中数学教学中存在的困惑作出了一些思考，提供了一些思路，类举了一些方法，具有很强的实用性、针对性和探究性，是广大高中生增强数学兴趣和提高数学成绩的一剂良方。通览全书，我们为朝璇老师忠诚教育，热爱教育，把职业当做事业，把事业当做责任的精神而肃然起敬，为朝璇老师"数学与生活同样精彩"的教育格言而拍案叫绝，为朝璇老师有意识地培养学生良好的数学思维习惯而击节赞赏，这是朝璇老师一辈子教育人格、教育思想与教育智慧的精彩体现。

教书育人需要智慧作支撑，更需要思想来导航。在当前课程改革的大潮中，我们如何在知识和能力、过程和方法、情感态度和价值观念这个课程改革的体系中踏浪前行，这是我们每一位教师必须深思的问题。在"新教育、新课程、新江中"的新背景下，江陵中学涌现了一大批像朝璇老师这样优秀的教师，他们立足岗位，敬业，乐业，精业，善业，因而形成了一个优秀、和谐、创新的团队，这是教育的一种至高境界，也为江陵中学课程改革增添了一道

靓丽的风景。一位优秀的教师必须具备课堂教学能力和学术研究能力。我们要积极倡导专业引导、同伴互助、自我反思的课程改革新理念和新方法，在教书育人的同时，逐步提高自己的教科研能力和水平；我们要怀着一份坦然、笃实的心态努力工作。这才是一个教师完整的人格体系和价值体系。

“莫道桑榆晚，为霞尚满天。”朝璇老师一辈子怀挚诚之心，秉纯粹之意，承教育之慧，勤恳授业，正直为人，年近六旬仍笔耕不辍，深受广大师生的爱戴和敬仰。

愿《高中数学解题方法》成为莘莘学子的翼下罡风，让其六月放歌，直上青云。

2008 年 9 月 10 日

目　录

第一讲

集合与简易逻辑问题的解题方法

集合和简易逻辑是高中数学的起始章节，是承接初、高中数学知识的重要环节，体现了高中数学知识中众多的思想和方法. 其主要内容有：集合的概念、性质、运算，简易逻辑，4 种命题，充要条件. 高考中常常以选择题和填空题的形式出现，主要考查集合的关系判断和集合的运算、抽象集合的关系判断和集合的运算、集合语言和集合思想的运用、充要条件和复合命题真假的判断.

一、集　　合

(一) 集合的概念和性质

1. (2007 年全国卷 Ⅰ) 设 $a,b\in \mathbf{R}$，集合 $\{1,a+b,a\}=\left\{0,\dfrac{b}{a},b\right\}$，则 $b-a=$(　　).

A. 1　　B. -1　　C. 2　　D. -2

解　由题设知道 $a\neq 0$，故只有 $a+b=0$，即 $a=-b$. 所以 $\dfrac{b}{a}=-1$，从而 $b=1$，$a=-1$. 因此 $b-a=2$. 故选 C.

【解题感悟】　本小题考查两个集合相等的概念. 要注意集合的元素有三性：确定性，无序性，互斥性.

2. 已知集合 $A=\{x\,|\,|x-2a|\leqslant a+1\}$，$B=\{x\,|\,x^2-11x+10\geqslant 0\}$. 若 $A\cap B=\varnothing$，则实数 a 的取值范围是________.

解 若$A\cap B=\varnothing$，则有$A=\varnothing$或$A\neq\varnothing$两种情况.

若$A=\varnothing$，则有$a+1<0$，即$a\in(-\infty,-1)$.

若$A\neq\varnothing$，由$A=\{x|a-1\leqslant x\leqslant 3a+1\}$，$B=\{x|x\geqslant 10$或$x\leqslant 1\}$，有

$$\begin{cases}a-1>1,\\3a+1<10,\\3a+1\geqslant a-1,\end{cases}$$

即$a\in(2,3)$.

故$a\in(-\infty,-1)\cup(2,3)$.

【解题感悟】 本小题考查两个集合的交集为空集这一概念. 注意$A\cap B=\varnothing$包含两种情况：$A=\varnothing$或$A\neq\varnothing$. 解题时不要忘记$A=\varnothing$.

3.（2006年湖北卷）有限集合S中元素的个数记做card(S). 设A,B都为有限集合，给出下列命题：

① $A\cap B=\varnothing$的充要条件是$\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)$；

② $A\subseteq B$的必要条件是$\mathrm{card}(A)\leqslant\mathrm{card}(B)$；

③ $A\nsubseteq B$的充分条件是$\mathrm{card}(A)\leqslant\mathrm{card}(B)$；

④ $A=B$的充要条件是$\mathrm{card}(A)=\mathrm{card}(B)$.

其中真命题的序号是(　　).

A. ③,④　　B. ①,②　　C. ①,④　　D. ②,③

解 ① $A\cap B=\varnothing\Leftrightarrow$集合$A$与集合$B$没有公共元素，正确.

② $A\subseteq B\Leftrightarrow$集合$A$中的元素都是集合$B$中的元素，正确.

③ $A\nsubseteq B\Leftrightarrow$集合$A$中至少有一个元素不是集合$B$中的元素，因此$A$中元素的个数有可能多于$B$中元素的个数，错误.

④ $A=B\Leftrightarrow$集合A中的元素与集合B中的元素完全相同，两个集合的元素个数相同，并不意味着它们的元素相同，错误.

故选B.

【解题感悟】 本小题考查子集、交集、空集、集合相等以及充

要条件等概念. 要准确地理解各种概念. 此题也可以作出文氏图直接判断.

4. (2007年湖南卷) 设集合 $M=\{1,2,3,4,5,6\}$, $S_1,S_2,\cdots,S_k$ 都是 M 的含两个元素的子集, 且满足: 对任意的 $S_i=\{a_i,b_i\}$, $S_j=\{a_j,b_j\}$ ($i\neq j$, $i,j\in\{1,2,\cdots,k\}$), 都有

$$\min\left\{\frac{a_i}{b_i},\frac{b_i}{a_i}\right\}\neq\min\left\{\frac{a_j}{b_j},\frac{b_j}{a_j}\right\}$$

($\min\{x,y\}$ 表示两个数 x,y 中的较小者), 则 k 的最大值是(　　).

A. 10　　　B. 11　　　C. 12　　　D. 13

解　方法1　由 $\min\left\{\frac{a_i}{b_i},\frac{b_i}{a_i}\right\}\neq\min\left\{\frac{a_j}{b_j},\frac{b_j}{a_j}\right\}$, 可知 S_i 与 S_j 中两元素之比的最小值不相等, 故这种子集最多有 $\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{1,6\},\{2,5\},\{3,4\},\{3,5\},\{4,5\},\{4,6\},\{5,6\}$ 共11个. 因此选 B.

方法2　集合 M 的二元子集共有 $C_6^2=15$ 个. 当 $\frac{a_i}{b_i}=\frac{1}{2}$ 时, $S_i=\{1,2\},\{2,4\},\{3,6\}$, 此时有

$$\min\left\{\frac{a_i}{b_i},\frac{b_i}{a_i}\right\}=\min\left\{\frac{a_j}{b_j},\frac{b_j}{a_j}\right\},$$

不满足题意. 因此, 这种子集只能有一个. 同理, 当 $\frac{a_i}{b_i}=\frac{1}{3}$ 和 $\frac{a_i}{b_i}=\frac{2}{3}$ 时, 这种子集也只能各有一个. 所以这种子集最多有 $15-2-1-1=11$ 个, 因此 k 的最大值是11. 故选 B.

【解题感悟】　本小题以集合为载体, 以排列、组合为平台, 综合考查集合和排列组合的有关知识以及创新意识. 要求考生对题目提供的信息进行理解、分析、组合和迁移. 方法1用的是列举法, 方法2用的是逆向思维方法.

(二) 集合的运算

5. (2008年辽宁卷 Ⅰ) 已知集合 $M=\left\{x\left|\frac{x+3}{x-1}<0\right.\right\}$, $N=$

$\{x|x\leqslant -3\}$，则集合$\{x|x\geqslant 1\}=($　　$)$.

A. $M\cap N$　　　　B. $M\cup N$

C. $\complement_{\mathbf{R}}(M\cap N)$　　　　D. $\complement_{\mathbf{R}}(M\cup N)$

解　由$\dfrac{x+3}{x+1}<0$，有$-3<x<1$，即$M=\{x|-3<x<1\}$. 又$N=\{x|x\leqslant -3\}$，所以$M\cup N=\{x|x<1\}$. 因此

$$\complement_{\mathbf{R}}(M\cup N)=\{x|x\geqslant 1\}.$$

故选D.

【解题感悟】　本小题考查分式不等式的解法以及集合的并集、补集的运算.

6.（2007年安徽卷）若$A=\{x\in\mathbf{Z}|2\leqslant 2^{2-x}<8\}$，$B=\left\{x\in\mathbf{R}\middle|\,|\log_2 x|>1\right\}$，则$A\cap\complement_{\mathbf{R}}B$的元素个数为(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

解　$A=\{x\in\mathbf{Z}|2\leqslant 2^{2-x}<8\}=\{0,1\}$. 由$|\log_2 x|>1$有$\log_2 x>1$或$\log_2 x<-1$，即$x>2$或$0<x<\dfrac{1}{2}$，所以

$$B=\left\{x\middle|x>2\text{或}0<x<\frac{1}{2}\right\},$$

因此$\complement_{\mathbf{R}}B=\left\{x\middle|\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 2\text{或}x\leqslant 0\right\}$，从而$A\cap\complement_{\mathbf{R}}B=\{0,1\}$. 故选C.

【解题感悟】　本小题考查指数不等式、对数不等式和绝对值不等式的运算，考查交集和补集的运算.

7.（2006年江苏卷）若A,B,C为三个集合，$A\cup B=B\cap C$，则一定有(　　).

A. $A\subseteq C$　　B. $C\subseteq A$　　C. $A\neq C$　　D. $A=\varnothing$

解　因为$A\subseteq A\cup B$且$C\cap B\subseteq C$，又$A\cup B=C\cap B$，所以$A\subseteq C$. 故选A.

【解题感悟】　本小题主要考查对集合之间关系的理解和集合

的子、交、并集运算，考查三个抽象集合之间的关系．对于这种类型的题目，还可以考虑利用文氏图解题，使之形象化、具体化．

8.（2006年安徽卷）设集合 $A=\{x\,|\,|x-2|\leqslant 2,\ x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{y\,|\,y=-x^2,\ -1\leqslant x\leqslant 2\}$，则 $\complement_{\mathbf{R}}(A\cap B)$ 等于（　　）．

A. $\mathbf{R}$　　B. $\{x\,|\,x\in\mathbf{R},\ x\neq 0\}$　　C. $\{0\}$　　D. $\varnothing$

解　方法1　$A=[0,2]$，$B=[-4,0]$，因此 $A\cap B=\{0\}$，所以 $\complement_{\mathbf{R}}(A\cap B)=\{x\,|\,x\in\mathbf{R},\ x\neq 0\}$，故选B．

方法2　注意到选项A和D互斥，选项B和C互斥，而选项A和D与题设的特点不相符，所以排除A，D；又显然有 $0\in A\cap B$，所以排除C；故选B．

【解题感悟】　本小题是集合部分的典型题目，以不等式和二次函数为载体考查集合的运算．解题时，首先要弄清楚集合 B 的含义，这是数集而不是点集，其次要知道选项中的互斥关系．

此题还可以利用德·摩尔根定理求解，即设 U 为全集，集合 A，B 是集合 U 的子集，则有

$$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=\complement_U(A\cap B),$$
$$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\complement_U(A\cup B).$$

9.（2006年全国卷Ⅱ）设 $a\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=ax^2-2x-2a$．若 $f(x)>0$ 的解集为 A，$B=\{x\,|\,1<x<3\}$，$A\cap B\neq\varnothing$，求实数 a 的取值范围．

解　若 $a=0$，则 $A=\{x\,|\,x<0\}$，$A\cap B=\varnothing$，不满足题意．

若 $a\neq 0$，$f(x)$ 为二次函数，令 $f(x)=0$，解得其两根为

$$x_1=\frac{1}{a}-\sqrt{2+\frac{1}{a^2}},\quad x_2=\frac{1}{a}+\sqrt{2+\frac{1}{a^2}},$$

且有 $x_1<0$，$x_2>0$．

① 当 $a>0$ 时，$A=\{x\,|\,x<x_1$ 或 $x>x_2\}$，$A\cap B\neq\varnothing$ 的充要条件是 $x_2<3$，即 $\frac{1}{a}+\sqrt{2+\frac{1}{a^2}}<3$，解得 $a>\frac{6}{7}$．

② 当$a<0$时，$A=\{x|x_1<x<x_2\}$，$A\cap B\neq\varnothing$的充要条件是$x_2>1$，即$\frac{1}{a}+\sqrt{2+\frac{1}{a^2}}>1$，解得$a<-2$.

综上，使$A\cap B\neq\varnothing$成立的a的取值范围为

$$(-\infty,-2)\cup\left(\frac{6}{7},+\infty\right).$$

【解题感悟】 本小题考查含参数的一元二次不等式的解法和交集、空集的概念. 注意解参数不等式时对参数的讨论.

二、简易逻辑

(一) 逻辑联结词及4种命题

10. (2005年江苏卷) 命题"若$a>b$，则$2^a>2^b-1$"的否命题为________.

解 "$a>b$"的否定是"$a\leqslant b$"，"$2^a>2^b-1$"的否定是"$2^a\leqslant 2^b-1$"，故原命题的否命题是"若$a\leqslant b$，则$2^a\leqslant 2^b-1$".

【解题感悟】 原命题的逆命题是"若$2^a>2^b-1$，则$a>b$"；原命题的逆否命题是"若$2^a\leqslant 2^b-1$，则$a\leqslant b$". 4种命题可以表示为

① 原命题：若p则q；

② 逆命题：若q则p；

③ 否命题：若$\neg p$则$\neg q$；

④ 逆否命题：若$\neg q$则$\neg p$.

注意原命题与逆否命题等价，逆命题与否命题等价.

11. (2007年山东卷) 命题"对任意的$x\in\mathbf{R}$，$x^3-x^2+1\leqslant 0$"的否定是(　　).

A. 不存在$x\in\mathbf{R}$，使$x^3-x^2+1\leqslant 0$

B. 存在$x\in\mathbf{R}$，使$x^3-x^2+1\geqslant 0$

C. 存在$x\in\mathbf{R}$，使$x^3-x^2+1>0$

D. 对任意的 $x\in\mathbf{R}$，使 $x^3-x^2+1>0$

解 方法1 "对任意的 $x\in\mathbf{R}$，$x^3-x^2+1\leqslant 0$"的意思是"对所有的实数 x，$x^3-x^2+1\leqslant 0$"，即是"不存在实数 x，使 $x^3-x^2+1>0$"，因此，原命题的否定是"存在 $x\in\mathbf{R}$，使 $x^3-x^2+1>0$". 故选 C.

方法2 选项 A 仅是对原命题条件的否定；选项 B 与原命题是包含关系；选项 D 是原命题的充分不必要条件. 故选 C.

【解题感悟】 本小题考查简易逻辑.

要区分两个不同的概念：命题的否定和否命题. 命题的否定只是否定原命题的结论，而否命题则是同时否定原命题的条件和结论.

要根据复合命题的真假判断理论："或"的否定是"且"；"且"的否定是"或"；"都是"的否定是"不都是"；"没有一个"的否定是"至少有一个". 方法1正是基于这种思路进行思考的，方法2是利用排除法进行筛选的，这是解选择题的常用方法.

(二) 充分必要条件

12. (2008 年湖北卷) 若非空集合 A,B,C 满足 $A\cup B=C$，且 B 不是 A 的子集，则(　　).

A. "$x\in C$"是"$x\in A$"的充分条件但不是必要条件

B. "$x\in C$"是"$x\in A$"的必要条件但不是充分条件

C. "$x\in C$"是"$x\in A$"的充要条件

D. "$x\in C$"既不是"$x\in A$"的充分条件也不是"$x\in A$"的必要条件

解 由题意知道，非空集合 A,B,C 可以用图来表示，如图 1-1. 若 $x\in C$，不一定有 $x\in A$. 而 $x\in A$，则必有 $x\in C$. 所以"$x\in C$"是"$x\in A$"的必要条件但不是充分条件. 故选 B.

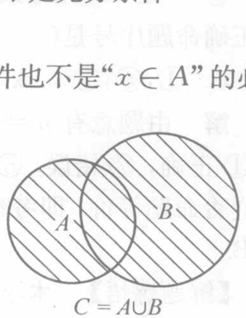

图 1-1

【解题感悟】 本小题考查集合之间的关系以及充分、必要条件. 注意利用图形解题一目了然.

13.（2008 年福建卷）设集合 $A=\left\{x\left|\frac{x}{x-1}<0\right.\right\}$，$B=\{x|0<x<3\}$，那么"$m\in A$"是"$m\in B$"的（　　）.

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

解　因为

$$A=\left\{x\left|\frac{x}{x-1}<0\right.\right\}=\{x|0<x<1\},$$

所以 $A\neq B$. 当 $m\in A$ 时，必有 $m\in B$；而当 $m\in B$ 时，不一定有 $m\in A$. 所以"$m\in A$"是"$m\in B$"的充分而不必要条件. 故选 A.

【解题感悟】　本小题以集合为载体考查充分条件和必要条件的概念.

14.（2007年湖北卷）已知 p 是 r 的充分条件而不是必要条件，q 是 r 的充分条件，s 是 r 的必要条件，q 是 s 的必要条件. 现有下列命题：

① s 是 q 的充要条件；

② p 是 q 的充分条件而不是必要条件；

③ r 是 q 的必要条件而不是充分条件；

④ $\neg p$ 是 $\neg s$ 的必要条件而不是充分条件；

⑤ r 是 s 的充分条件而不是必要条件，

则正确命题序号是（　　）.

A. ①,④,⑤　B. ①,②,④　C. ②,③,⑤　D. ②,④,⑤

解　由题意有 $p\Rightarrow r$，$q\Rightarrow r$，$r\Rightarrow s$，$s\Rightarrow q$，所以 $q\Leftrightarrow s\Leftrightarrow r$，即 ① 正确，③ 错误，⑤ 错误. 由 $p\Rightarrow q$ 知 ② 正确. ④ 根据原命题和逆否命题等价，即考察 s 是 p 的什么条件. 由 $p\Rightarrow s$ 有 ④ 正确. 故选 B.

【解题感悟】　本小题考查充要条件的概念以及命题之间的关系. 解题时要根据题意罗列出各种条件的表达式，然后再作出正确判断.

15. 证明：在 $\triangle ABC$ 中，$\sin A > \sin B$ 的充要条件是 $\angle A > \angle B$.

证　先证充分性. 若 $\angle A > \angle B$，分如下两种情况讨论.

① 若 $\angle A$，$\angle B$ 都是锐角，由 $y = \sin x$ 当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时单调递增，有 $\sin A > \sin B$.

② 若 $\angle A$ 是钝角，$\angle B$ 是锐角，则有 $\angle A + \angle B < \pi$，即

$$0 < \angle B < \pi - \angle A < \frac{\pi}{2}.$$

由 $y = \sin x$ 当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时单调递增，有

$$\sin B < \sin(\pi - A) = \sin A,$$

即 $\sin A > \sin B$.

所以 $\angle A > \angle B \Rightarrow \sin A > \sin B$.

再证必要性. 若 $\sin A > \sin B$，即 $\sin A - \sin B > 0$，则

$$2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2} > 0.$$

由 $0 < \frac{\angle A + \angle B}{2} < \frac{\pi}{2}$，有 $\cos\frac{A+B}{2} > 0$，所以 $\sin\frac{A-B}{2} > 0$. 又因为 $-\frac{\pi}{2} < \frac{\angle A - \angle B}{2} < \frac{\pi}{2}$，所以 $0 < \frac{\angle A - \angle B}{2} < \frac{\pi}{2}$，即有 $\angle A > \angle B$. 因此 $\sin A > \sin B \Rightarrow \angle A > \angle B$.

故 $\sin A > \sin B$ 的充要条件是 $\angle A > \angle B$.

【解题感悟】　本小题考查充要条件的证明方法. 要注意分清充分性和必要性. 此题若去掉条件 $\triangle ABC$，其结论面目全非，$\sin A > \sin B$ 是 $\angle A > \angle B$ 既非充分又非必要条件.

第二讲

函数问题的解题方法

函数是高中数学中极为重要的内容，函数的观点和方法贯穿整个高中数学的全过程. 函数是高考考查的重点，考查主要体现在三个方面：一是考查函数的基本概念和基本性质，多采用选择题和填空题；二是函数和其他内容(方程、不等式、数列、立体几何和解析几何) 交汇的综合题，这种类型的题目有一定的难度，对学生综合能力的要求比较高；三是和函数有关的应用题，题目不难，解题的关键是准确理解题意，正确建立函数关系.

一、求函数的定义域

1. (1) (2008 年湖北卷) 函数

$$f(x)=\frac{1}{x}\ln(\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{-x^2-3x+4})$$

的定义域为(　　).

A. $(-\infty,-4]\cup[2,+\infty)$　　B. $(-4,0)\cup(0.1)$

C. $[-4,0)\cup(0,1]$　　D. $[-4,0)\cup(0,1)$

(2) 函数 $y=\dfrac{\lg(2-x)}{\sqrt{12+x-x^2}}+(x-1)^0$ 的定义域为________.

解 (1) 解不等式组

$$\begin{cases}x^2-3x+2\geqslant 0,\\ -x^2-3x+4\geqslant 0,\\ x\neq 0,\end{cases}$$