



$$\sin A = \frac{a}{c} \quad \cos A = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b} \quad \operatorname{ctg} A = \frac{b}{a}$$

辽宁省中学试用课本

数 学

第四册

数学

PDC

目 录

第一章 解直角三角形	1
第一节 勾股定理	2
第二节 锐角三角函数的概念	7
2.1 锐角三角函数	7
2.2 互余两角三角函数	11
2.3 特殊角的三角函数值	12
2.4 三角函数表	
第三节 解直角三角形	
3.1 直角三角形的解法	
3.2 解直角三角形的应用	
第二章 圆	40
第一节 圆的一些重要性质	40
1.1 圆的概念	40
1.2 不在一条直线上的三点确定一个圆	42
1.3 直径与弦	45
1.4 圆心角与弧	50
1.5 圆周角与弧	53
第二节 等分圆周和正多边形	61
2.1 圆周的四等分、六等分和五等分	61
2.2 圆周的任意等分	64
2.3 正多边形的概念	65
2.4 正多边形的计算	66
第三节 直线和圆相切	76
3.1 直线和圆的位置关系	77
3.2 切线的判定和性质	79

3.3	切线的画法	81
3.4	切线长定理	83
3.5	弦切角	91
3.6	公切线及其画法	95
3.7	线段与弧的连接	97
第四节	圆和圆相切	105
4.1	圆和圆的位置关系	105
4.2	弧与弧的连接	110
第五节	轨迹	120
5.1	逆定理	120
5.2	点的轨迹	121
第三章	生产队会计	125
第一节	单据	126
1.1	单据的作用	126
1.2	单据的种类	126
1.3	单据的审查、整理和保管	129
第二节	账簿	131
2.1	账簿的作用	131
2.2	账簿的设置	131
第三节	记账方法	141
3.1	记账规律	141
3.2	简易收付记账法的特点和注意事项	144
第四节	月份结算	146
4.1	月份结账	146
4.2	查找和更正错误的方法	147
4.3	编制月份收支结存表	149
4.4	账目公开	151

第一章 解直角三角形

在三大革命实践中，经常遇到有关直角三角形的计算问题。例如：已知人字形房架的横梁和立柱的长，求人字梁的长(图1.1(1))，实际上就是已知直角三角形的两直角边，求斜边的问题；已知高射炮到敌机的距离和敌机的仰角，求敌机的飞行高度(图1.1(2))，实际上就是已知直角三角形的斜边和一锐角，求直角边的问题。怎样解决这些问题呢？

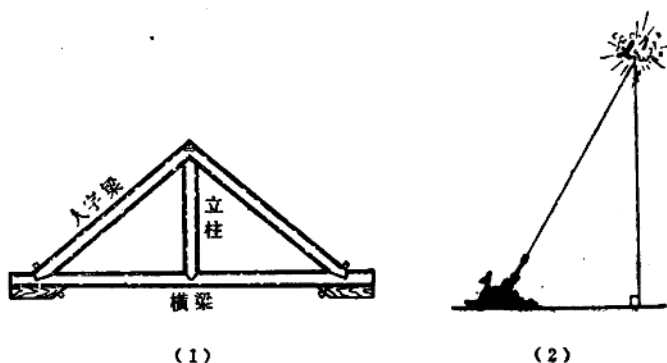


图 1.1

毛主席指出：“一切客观事物本来是互相联系的和具有内部规律的”。掌握了直角三角形边、角之间的互相联系和内部规律，就可以解决上面提出的问题。

第一节 勾股定理

我们先来研究直角三角形三边之间的关系。

“中国是世界文明发达最早的国家之一”。早在三千多年前，我国劳动人民就对直角三角形三边之间的关系有了认识，把直角三角形的两条直角边分别叫做勾和股，把斜边叫做弦（图1.2）。并指出有“勾三、股四、弦五”的规律。以后又进一步总结出勾、股、弦之间的关系是：

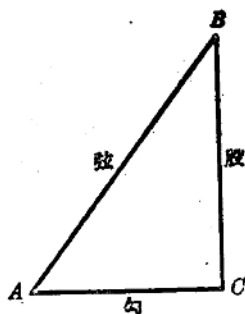


图 1.2

$$\text{勾}^2 + \text{股}^2 = \text{弦}^2.$$

这个关系称为勾股定理，下面我们运用相似三角形的性质来证明这个定理。

勾股定理 在直角三角形中，两直角边的平方和等于斜边的平方。

已知：在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ （图1.3）。

求证： $AC^2 + BC^2 = AB^2$ 。

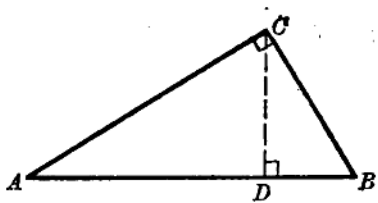
证明：作 $CD \perp AB$ ，交 AB 于 D 。

在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle ABC$ 中，

$$\angle CAD = \angle BAC,$$

$$\angle ADC = \angle ACB$$

$$= 90^\circ,$$

则 $\triangle ACD \sim \triangle ABC$. 

$$\therefore \frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC},$$

图 1.3

即 $AC^2 = AB \cdot AD$ (1)

同理, 得

$$BC^2 = AB \cdot DB. (2)$$

(1)、(2) 两式相加, 得

$$\begin{aligned} AC^2 + BC^2 &= AB \cdot AD + AB \cdot DB \\ &= AB(AD + DB) \\ &= AB \cdot AB \\ &= AB^2. \end{aligned}$$

$$\therefore AC^2 + BC^2 = AB^2.$$

反过来, 如果一个三角形的两边的平方和等于第三边的平方, 那么, 这个三角形一定是直角三角形 (证明从略).

例1 朝阳生产队的贫下中农为下乡知识青年盖新房. 已知人字形房架的横梁 AB 长 1.6 丈, 立柱 CD 长 0.66 丈 (图 1.4),

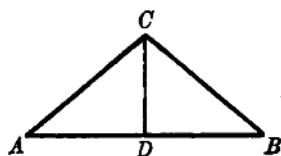


图 1.4

问人字梁 AC 的长是多少 (保留到两位小数)?

解: 已知 $AC = BC$, $CD \perp AB$.

在直角三角形 ACD 中,

$$AD = \frac{1}{2} AB = \frac{1.6}{2} = 0.8(\text{丈}),$$

$$CD = 0.66\text{丈}.$$

由勾股定理, 得

$$\begin{aligned} AC^2 &= AD^2 + CD^2 = 0.8^2 + 0.66^2 \\ &= 0.64 + 0.4356 = 1.0756, \end{aligned}$$

$$\therefore AC = \sqrt{1.0756} = 1.037 \approx 1.04(\text{丈}).$$

答: 人字梁的长约为1.04丈.

例2 新农大队的贫下中农牢记毛主席关于“水利是农业的命脉”的教导, 大搞农田水利建设. 图1.5是水渠的横截面图, 它是一个等腰梯形, 渠底宽 $AB = 0.6$ 米, 渠口宽 $DC = 2$ 米, 边坡长 $AD = 1.1$ 米, 求渠深 AE (保留到一位小数).

解: 如图1.5, 在直角三角形 ADE 中,

$$AD = 1.1\text{米},$$

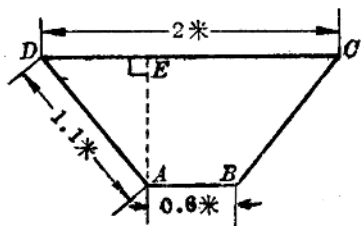


图 1.5

$$DE = \frac{1}{2} (DC - AB) = \frac{1}{2} (2 - 0.6) = 0.7(\text{米}).$$

由勾股定理，得

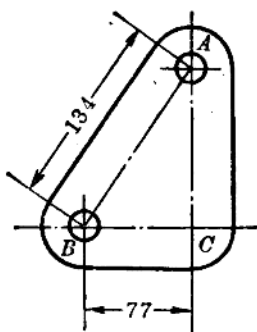
$$AE^2 = AD^2 - DE^2 = 1.1^2 - 0.7^2 = 0.72,$$

$$\therefore AE = \sqrt{0.72} = 0.8485 \approx 0.8 (\text{米}).$$

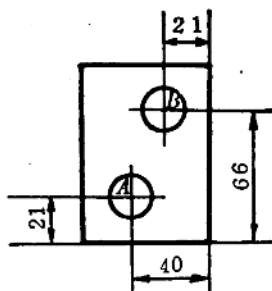
答：渠深约为 0.8 米。

练 习 一

1. 在直角三角形 ABC 中， C 是直角，根据下列条件求第三条边：
 - (1) 已知 $a=8$, $b=15$, 求 c ;
 - (2) 已知 $a=16$, $b=12$, 求 c ;
 - (3) 已知 $a=5$, $c=13$, 求 b ;
 - (4) 已知 $b=1\frac{1}{2}$, $c=2\frac{1}{2}$, 求 a .
2. 判断边长分别为下列各组数值的三角形是不是直角三角形？
 - (1) 6, 8, 10;
 - (2) 7, 4, 5;
 - (3) 20, 24, 15;
 - (4) 12, 22.5, 25.5.
3. 向阳木材厂想把小头直径是 450 毫米的圆木做成方木，可以得到边长最长是多少的方木（保留到个位）。
4. 一车床的齿轮箱壳要冲两个圆孔（如图），两圆的中心距是 134 毫米，两圆心的水平距离是 77 毫米，求两圆心的垂直距离（保留到一位小数）。
5. 一个工件的平面图如图所示，求两个圆孔中心之间的距离 AB （保留到两位小数）。

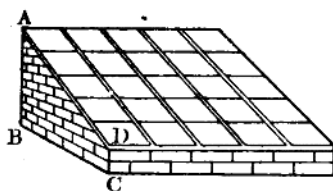


(第4题)



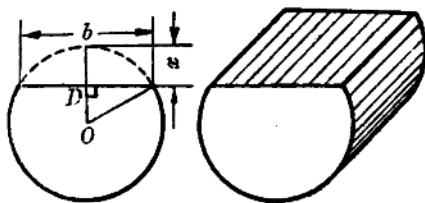
(第5题)

6. 东方红人民公社在一块土地上修建温床 (如图)。温床的底宽 BC 是 2 米, 前墙高 DC 是 0.5 米, 后墙高 AB 是 2.8 米, 求安装玻璃的顶盖 AD 的长 (保留到两位小数)。



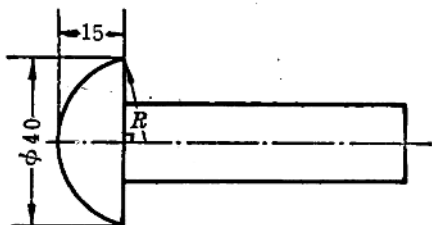
(第6题)

7. 某机械厂要制造一批机器支援亚、非、拉人民。下图是机器上的轴, 它是用半径为 50 毫米的圆钢刨去一部分得到的。加工时要求 $b = 90$ 毫米, 求图中的 α (保留到一位小数)。



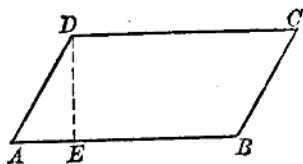
(第7题)

8. 一艘轮船以每小时18浬的速度离开港口向北航行，跟它同时，另一艘轮船以每小时24浬的速度离开港口向西航行，问它们离开港口一小时半后相距多远？
9. 下图为一个圆头铆钉的轴截面图，试计算圆头的半径 R （保留到个位）。



(第9题)

10. 已知平行四边形 $ABCD$ 的一组邻边 AD 和 CD 分别长 8cm 和 15cm ， $\angle ADC = 120^\circ$ ，求平行四边形 $ABCD$ 的面积（保留到一位小数）。



(第10题)

第二节 锐角三角函数的概念

2.1 锐角三角函数

勾股定理反映了直角三角形边和边之间的关系。下面再来研究直角三角形边和角之间的关系。

在直角三角形 ABC 的斜边 AB （或 AB 的延长

线)上任取一点 B' , 过 B' 作 AC 的垂线, 交 AC (或 AC 的延长线) 于 C' (图1.6).

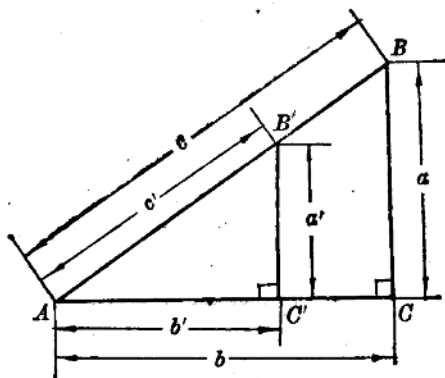


图 1.6

$$\because \triangle ABC \sim \triangle AB'C',$$

$$\therefore \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

因此 $\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}, \quad \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'},$

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}, \quad \frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}.$$

从这四个等式可以看出, 当锐角 A 的大小不变时, 不管边的长度如何变化, 上面四个比值总是不变的; 当锐角 A 的大小变化时, 这四个比值则随之变化. 这就说明, 直角三角形的边和角是互相联系、互相影响的.

在直角三角形
 ABC (图1.7)中,
 锐角 A 的对边与斜
 边的比,叫做锐角
 A 的正弦,记作
 “ $\sin A$ ”,即

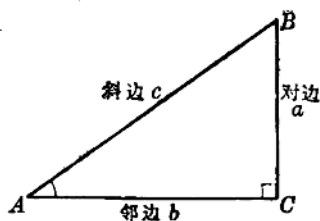


图 1.7

$$\sin A = \frac{A \text{ 的对边}}{\text{斜边}} = \frac{a}{c};$$

锐角 A 的邻边与斜边的比,叫做锐角 A 的余弦,
 记作 “ $\cos A$ ”, 即

$$\cos A = \frac{A \text{ 的邻边}}{\text{斜边}} = \frac{b}{c};$$

锐角 A 的对边与邻边的比,叫做锐角 A 的正切,
 记作 “ $\operatorname{tg} A$ ”, 即

$$\operatorname{tg} A = \frac{A \text{ 的对边}}{A \text{ 的邻边}} = \frac{a}{b};$$

锐角 A 的邻边与对边的比,叫做锐角 A 的余切,
 记作 “ $\operatorname{ctg} A$ ”, 即

* 在这里, 我们把 $\angle A$ 简记为 A , 其余同此。

$$\operatorname{ctg} A = \frac{A \text{ 的邻边}}{A \text{ 的对边}} = \frac{b}{a}.$$

锐角 A 的正弦、余弦、正切和余切，都叫做锐角 A 的三角函数。

例1 在直角三角形 ABC (图 1.8) 中，已知 $a=4$ ， $b=3$ 。求锐角 A 的正弦、余弦、正切和余切的值。

解：由勾股定理，得

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5,$$

$$\therefore \sin A = \frac{4}{5},$$

$$\cos A = \frac{3}{5},$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{4}{3} = 1 \frac{1}{3},$$

$$\operatorname{ctg} A = \frac{3}{4}.$$

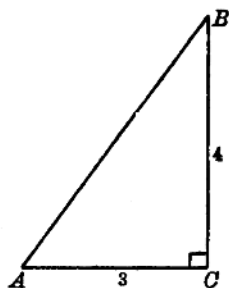


图 1.8

例2 在直角三角形 ABC (图 1.9) 中，已知 $\cos B = \frac{1}{3}$ ，求锐角 B 的其他三角函数的值。

$$\text{解: } \cos B = \frac{a}{c} = \frac{1}{3}.$$

这就说明如果把 a 看作 1 个长度单位, 那么 c 为 3 个长度单位.

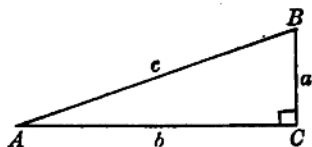


图 1.9

由勾股定理, 得

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{3^2 - 1^2} = \sqrt{8} \\ &= 2\sqrt{2} \text{ (长度单位),} \end{aligned}$$

$$\therefore \sin B = \frac{b}{c} = \frac{2}{3}\sqrt{2},$$

$$\operatorname{tg} B = \frac{b}{a} = 2\sqrt{2},$$

$$\operatorname{ctg} B = \frac{a}{b} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{4}\sqrt{2}.$$

2.2 互余两角三角函数间的关系

由于同一个直角三角形的两个锐角互为余角. 因此, 在直角三角形 ABC (图 1.10) 中, $B = 90^\circ - A$.

根据三角函数的定义:

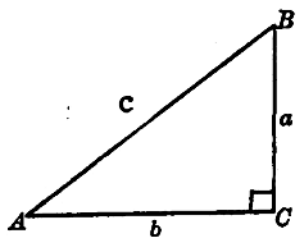


图 1.10

$$\sin A = \frac{a}{c},$$

$$\cos(90^\circ - A) = \cos B = \frac{a}{c},$$

$$\therefore \sin A = \cos(90^\circ - A).$$

$$\cos A = \frac{b}{c},$$

$$\sin(90^\circ - A) = \sin B = \frac{b}{c},$$

$$\therefore \cos A = \sin(90^\circ - A).$$

即

$$\begin{aligned} \sin A &= \cos(90^\circ - A), \\ \cos A &= \sin(90^\circ - A). \end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} A &= \operatorname{ctg}(90^\circ - A), \\ \operatorname{ctg} A &= \operatorname{tg}(90^\circ - A). \end{aligned}$$

“一切矛盾都依一定条件向它们的反面转化着。”

从以上关系式看出，在将一个锐角换成它的余角的条件下，正弦和余弦、正切和余切就互相转化了。通常把正弦和余弦、正切和余切叫做互为余函数。这样就有：一个锐角的三角函数等于它的余角的余函数。

例 把下列各三角函数化为它们的余角的余函数：

$$\sin 30^\circ, \cos 43^\circ, \operatorname{tg} 15^\circ, \operatorname{ctg} 80^\circ 26'.$$

$$\text{解: } \sin 30^\circ = \cos(90^\circ - 30^\circ) = \cos 60^\circ,$$

$$\cos 43^\circ = \sin(90^\circ - 43^\circ) = \sin 47^\circ,$$

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \operatorname{ctg}(90^\circ - 15^\circ) = \operatorname{ctg} 75^\circ,$$

$$\operatorname{ctg} 80^\circ 26' = \operatorname{tg}(90^\circ - 80^\circ 26') = \operatorname{tg} 9^\circ 34'.$$

2.3 特殊角的三角函数值

30° 、 45° 、 60° 这些特殊角的三角函数值，可以根据锐角三角函数的定义直接计算出来。因此，我们首先学习求这些特殊角的三角函数值。

(一) 30° 、 60° 角的三角函数值

在直角三角形 ABC (图1.11) 中, $A = 30^\circ$, 则 $B = 60^\circ$ 。因为有一锐角是 30° 的直角三角形, 它的斜边等于 30° 角所对的直角边的两倍。所以, 设 $BC = a$, 就有 $AB = 2a$, $AC = \sqrt{(2a)^2 - a^2}$

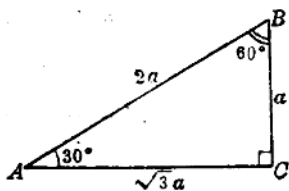


图 1.11

$$= \sqrt{3} a.$$

因此 $\sin 30^\circ = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2},$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}a}{a} = \sqrt{3}.$$

同理 $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2},$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}, \quad \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(二) 45°角的三角函数值

在直角三角形 ABC (图1.12) 中, $A = B = 45^\circ$.
 设 $BC = a$, 则 $AC = a$, $AB = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a$.

因此 $\sin 45^\circ = \frac{a}{\sqrt{2}a}$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos 45^\circ = \frac{a}{\sqrt{2}a}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2},$$

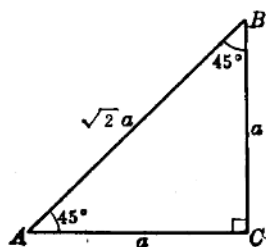


图 1.12

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{a}{a} = 1, \quad \operatorname{ctg} 45^\circ = \frac{a}{a} = 1.$$