G634.6
J1
(Ⅱ B)

新訂 数学 ⅡB

小平邦彦 編

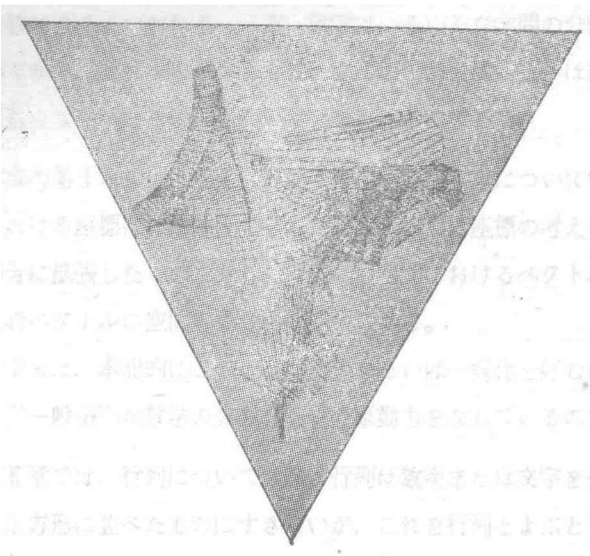
.6

G 634.6
J 1
(Ⅱ B)

昭和48年4月10日文部省検
昭和51年4月10日改訂検
高等学校数学科用

新訂 数学 ⅡB

小平邦彦 編



東京書籍株式会社

表紙と各扉のカットについて

表紙や各扉のカットは，電子計算機（コンピューター）による自動製図プログラムシステムにより制作したものです。

たとえば，Ⅲ章のカットは，円周上の1点が固定された円の上をころがってできる軌跡の上を，長方形が移動したものです。また，Ⅵ章のカットは，2つの四辺形の対応点を結んだ図形を数回，回転させたものです。

はじめに

本書は高等学校数学Ⅰの学習を終わった諸君のため，それに続く数学の教科書として編集したものである。

数学Ⅰのはじめに述べたように，数学者はおよそ考えることが可能なものをすべて自由に考えるものであって，数学は人間精神の自由な創造物であるといわれる。一方，数学はいろいろな学問の分野に広く応用されて，実に不思議なほど役に立つのであって，数学は森ら万象の根底をなしているのではないかと思われるのである。

本書の第Ⅰ章では，空間における座標とベクトルについて学ぶ。空間における座標は，数学Ⅰで学んだ平面上の点の座標の考えを，空間の場合に拡張したものである。同様に，空間におけるベクトルは，平面上のベクトルの空間の場合への拡張である。

数学者は，本能的にこのような拡張あるいは一般化を好むのであって，“一般化”が数学の発展の一つの原動力をなしているのである。

第Ⅱ章では，行列について学ぶ。行列は数字または文字を長方形または正方形に並べたものにすぎないが，これを行列とよぶとき，行列は一つの量を表していると考えるのであって，行列の加法，減法，乗法などの演算が定義される。

行列は数学だけでなく，物理学においても基本的に重要な役割を演じる。現代の物理学では，いろいろな量が原理的には，数でなく行列によって表されると考えるのである。ここに，数学が森ら万象の根底をなすということの一端が現れているといえよう。

次の第Ⅲ章で，数列と数学的帰納法について学ぶ。数学的帰納法は，数学において最も基本的な論証の方法であって，現代数学の大部分は，数学的帰納法なしには成立しないのである。

第Ⅳ章では，微分法について，第Ⅴ章では，積分法について学ぶ。一つの関数から，その変化の割合を表す関数を求めることが微分法であり，逆に変化の割合を表す関数から，もとの関数を求めるのが積分法である。

17世紀の後半に，ニュートンやライプニッツによってはじめられた微積分法の応用によって，18世紀以降に科学技術が，驚異的進歩を遂げたのである。

一般に，いくつかの自明な基本法則から出発して，論証によって学問の体系を構成することを公理的構成という。このとき，自明な基本法則を公理とよぶのである。

今世紀にはいってから，すべての数学が公理的に構成されるようになったが，その典型となったのはユークリッド幾何学である。第Ⅵ章で，ユークリッド平面幾何学の公理的構成について学ぶ。

数学を学ぶには，本を読んで覚えるだけでは不十分であって，自分でよく考え，計算をしたり問題を解いたりしてみることがたいせつである。たとえば，水泳を習得するには，泳ぎ方の本を読んだだけではだめで，自分で水にはいって泳いでみなければならない。同様に，数学を習得するには，自分で数学を考えてみなければならないのである。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目次

Ⅰ章　空間における座標とベクトル

Ⅱ章　行列

Ⅲ章　数列

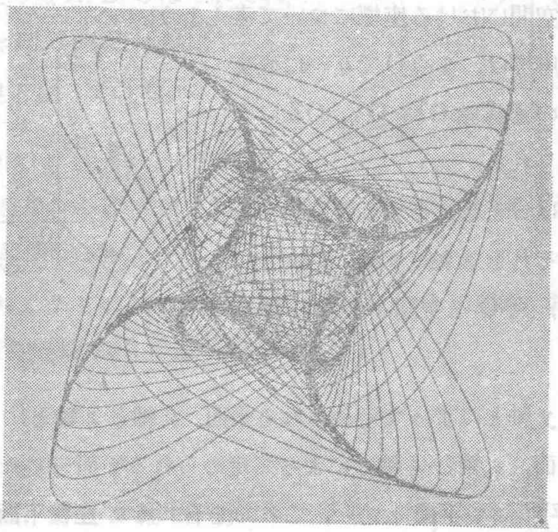
Ⅳ章　微分とその応用

Ⅴ章　積分とその応用

Ⅵ章　平面幾何の公理的構成

付録

Ⅰ・空間における座標とベクトル

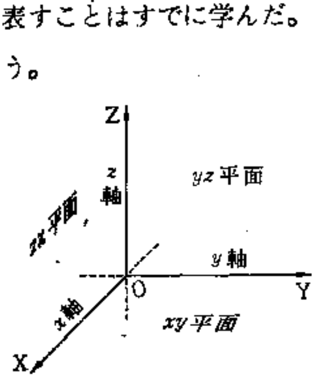


1節　空間の座標

1　空間の座標

直線上の点や平面上の点を座標を用いて表すことはすでに学んだ。ここでは空間における座標について考えよう。

空間の座標は，1点Oで互いに直交する3本の**座標軸** OX, OY, OZ によって定められる。



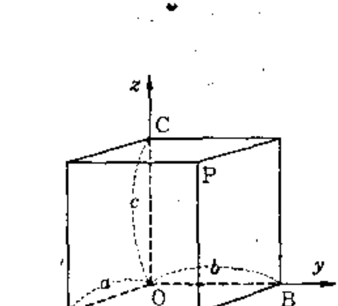
これらはOを原点とする数直線であり，それぞれを **x 軸**，**y 軸**，**z 軸** という。また，点 O を空間の座標の **原点** という。

x 軸と y 軸とによって定められる平面，y 軸と z 軸とによって定められる平面，z 軸と x 軸とによって定められる平面をそれぞれ **xy 平面**，**yz 平面**，**zx 平面** といい，これらを合わせて **座標平面** という。

問1　x 軸に垂直な座標平面は何か。また，zx 平面に直交する座標軸は何か。

Pを与えられた任意の点とする。

この点Pを通り yz 平面，zx 平面，xy 平面に平行な平面が，それぞれ x 軸，y 軸，z 軸と交わる点を A, B, C とする。

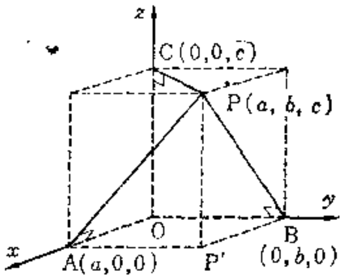


点 A, B, C の各座標軸上での座標がそれぞれ a, b, c であるとき，

この3つの数の組 $(a,\ b,\ c)$ を点Pの **空間座標** または単に **座標** といい，点Pの座標が $(a,\ b,\ c)$ であるとき $\mathrm{P}(a,\ b,\ c)$ と表す。

また，a，b，c をそれぞれ点Pの **x 座標**，**y 座標**，**z 座標** という。

なお，上の点A，B，Cはそれぞれ点Pから x 軸，y 軸，z 軸に下ろした垂線の足となっている。

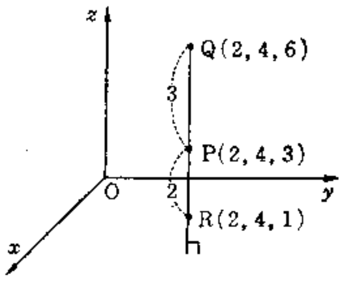


問2　点 $\mathrm{P}(5,\ 4,\ 2)$ から xy 平面に下ろした垂線の足 P' の座標をいえ。また，他の座標平面に下ろした垂線の足の座標をいえ。

問3　点 $\mathrm{P}(3,\ 7,\ -4)$ の xy 平面に関する対称点 Q の座標，および原点Oに関する対称点 R の座標を求めよ。

平行移動と座標

点 $\mathrm{P}(2,\ 4,\ 3)$ を z 軸に平行に3だけ移動した点をQとすれば，点Qの座標は明らかに $(2,\ 4,\ 6)$ となる。また，点 P を z 軸に平行に -2 だけ移動した点 R の座標は $(2,\ 4,\ 1)$ となる。



問4　点 $\mathrm{P}(2,\ 7,\ 3)$ を x 軸に平行に4だけ移動した点の座標をいえ。また，点Pを y 軸に平行に -5 だけ移動した点の座標をいえ。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

一般に，点 $P(x, y, z)$ を x 軸に平行に α だけ移動した点の座標は $(x+\alpha, y, z)$ となる。

また，y 軸に平行に β だけ移動した点の座標は $(x, y+\beta, z)$，z 軸に平行に γ だけ移動した点の座標は $(x, y, z+\gamma)$ となる。

このような移動を続けて行うと，それも1つの平行移動である。これを原点を点 (α, β, γ) に移す平行移動とよぶ。この平行移動について次のことがわかる。

> 原点 $O(0, 0, 0)$ を点 (α, β, γ) に移す平行移動によって，任意の点 (x, y, z) は，点 $(x+\alpha, y+\beta, z+\gamma)$ に移される。
>
> 平行移動と座標

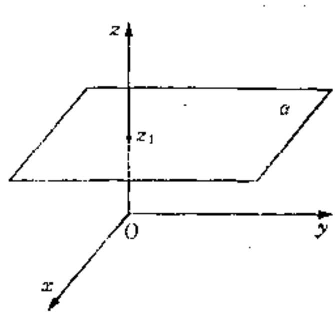
問5　原点を点 $(1, -1, 2)$ に移す平行移動によって，次の各点はどのような点に移されるか。

$$(2,\ 3,\ 4),\qquad (-1,\ -3,\ -5),\qquad (-1,\ 1,\ -2)$$

問6　ある平行移動によって点 $(4, 2, -3)$ が点 $(-1, 6, 8)$ に移ったとすれば，点 $(1, 1, 1)$ はどのような点に移されるか。

座標平面に平行な平面の方程式

座標平面，たとえば xy 平面に平行な平面を α とすると，α は z 軸と交わる。その交点の座標を z_1 とすれば，平面 α 上の任意の点の z 座標はつねに z_1 である。



逆に，z 座標が z_1 である点は平面 α の上にある。

すなわち，この平面は，集合 $\{(x,\ y,\ z)\mid z=z_1\}$ にほかならない。

この $z=z_1$ が xy 平面に平行な平面 α の方程式である。

問7　$x=0$ はどのような平面を表すか。

問8　点 $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ を通り yz 平面に平行な平面の方程式を求めよ。また，zx 平面に平行な平面の方程式を求めよ。

内分点，外分点

例題　2点 $A(x_1,\ y_1,\ z_1)$，$B(x_2,\ y_2,\ z_2)$ を結ぶ線分 AB を $m:n$ に内分する点 C の座標は，次のように表されることを証明せよ。

$$\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \frac{my_2+ny_1}{m+n},\ \frac{mz_2+nz_1}{m+n}\right)$$

〔証明〕　点 C の座標を $(x,\ y,\ z)$ とする。

点 A，B，C から xy 平面に下ろした垂線の足をそれぞれ A′，B′，C′とすれば，それらの点の座標はそれぞれ

$$(x_1,\ y_1,\ 0),\quad (x_2,\ y_2,\ 0),\quad (x,\ y,\ 0)$$

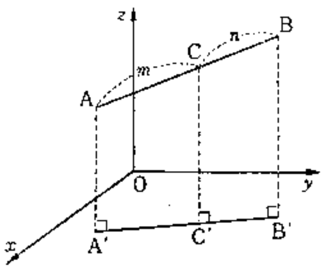
となり，さらに次の関係が成り立つ。

$$AC:CB=A'C':C'B'=m:n$$

平面上の内分点の公式から，

$$x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n}$$

$$y=\frac{my_2+ny_1}{m+n}$$



同様に，点 A，B，C から yz 平面に垂線を下ろして考えれば，

$$z=\frac{mz_2+nz_1}{m+n}$$

が得られる。

問 9　(1)　前ページの例題で，線分 AB を $m:n$ に外分する点 D の座標は，

$$\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n},\ \frac{my_2-ny_1}{m-n},\ \frac{mz_2-nz_1}{m-n}\right)$$

となることを証明せよ。（ただし，$m \neq n$，$m>0$，$n>0$）

(2)　線分 AB の中点の座標を求めよ。

問 10　A(2, 1, −3)，B(−4, 5, −1) のとき，線分 AB を 3:1 に内分する点 C，および 5:3 に外分する点 D の座標を求めよ。

2　2 点間の距離，球の方程式

空間における 2 点間の距離も，平面の場合と同様に座標を用いて表すことができる。

例題 1　原点 O と点 P$(x,\ y,\ z)$ との距離 OP は，

$$OP = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

と表されることを証明せよ。

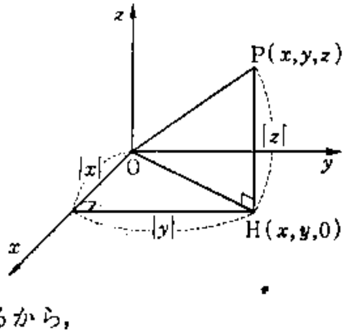
〔証明〕　点 P から xy 平面に下ろした垂線の足を H とすれば，

点 H の座標は $(x,\ y,\ 0)$

また，$PH = |z|$ である。

線分 OH の長さは，平面の場合の距離の公式から

$$OH = \sqrt{x^2+y^2}$$



ところが，△POH は ∠H を直角とする直角三角形であるから，

$$OP^2 = OH^2 + PH^2 = x^2+y^2+z^2$$

$$\therefore\quad OP = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

問1　次の3点のうち，原点から最も遠くにあるものはどれか。

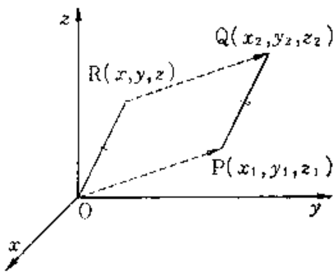
$\mathrm{A}(2,\ 3,\ 5)$，　$\mathrm{B}(4,\ -4,\ 2)$，　$\mathrm{C}(5,\ 0,\ 4)$

次に，任意の2点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1,\ z_1)$，$\mathrm{Q}(x_2,\ y_2,\ z_2)$ の距離を求めよう。

原点 O を点 P に移す平行移動によって，ある点 $\mathrm{R}(x,\ y,\ z)$ が点 Q に移されるとすれば，

$$x+x_1=x_2,\quad y+y_1=y_2,\quad z+z_1=z_2$$

なる関係が成り立つ。



したがって，点 R の座標は

$(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)$

となる。

一方，平行移動によって線分の長さは変わらないから，

$$\mathrm{PQ}=\mathrm{OR}$$

これと例題1の結果とから，次のことがわかる。

> 2点 $(x_1,\ y_1,\ z_1)$，$(x_2,\ y_2,\ z_2)$ 間の距離を d とすれば
>
> $$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$
>
> 2点間の距離

問2　次の2点 A，B 間の距離を求めよ。

(1)　$\mathrm{A}(-2,\ 3,\ -1)$，　$\mathrm{B}(4,\ 0,\ -3)$

(2)　$\mathrm{A}(1,\ 0,\ 3)$，　$\mathrm{B}(0,\ 1,\ 2)$

例題2　2点 $\mathrm{A}(4,-1,\ 2)$，$\mathrm{B}(1,\ 1,\ 3)$ がある。xy 平面上に点 C をとり △ABC が正三角形となるようにせよ。

〔解〕 点 C の座標を $(x, y, 0)$ とする。

$AC^2 = AB^2$ であるから

$$(x-4)^2+(y+1)^2+4 = 14 \qquad ①$$

$BC^2 = AB^2$ であるから

$$(x-1)^2+(y-1)^2+9 = 14 \qquad ②$$

①－② をつくって

$$-6x+4y+10 = 0$$

$$\therefore\ y = \frac{3x-5}{2} \qquad ③$$

③を②に代入して

$$(x-1)^2+\frac{(3x-7)^2}{4}+9 = 14$$

整理すると

$$13x^2-50x+33 = 0$$

$$(x-3)(13x-11) = 0$$

$$\therefore\ x = 3,\quad \frac{11}{13}$$

これを③に代入して，

$$y = 2,\quad -\frac{16}{13}$$

よって求める点 C の座標は

$$(3,\ 2,\ 0),\quad \left(\frac{11}{13},\ -\frac{16}{13},\ 0\right)$$

問 3　2点$A(2, -1, -1)$, $B(-2, 4, 2)$がある。z軸上に点 C をとって $AC = BC$ となるようにせよ。

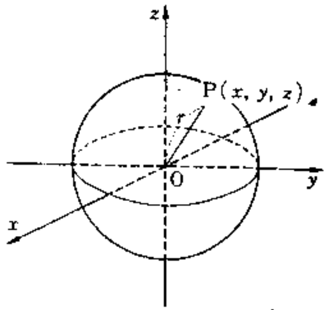
球の方程式

定点 O から一定の距離 r にある空間の点の集合を，O を中心とし，半径が r の **球面** あるいは単に **球** という。

いま，r を正の定数とするとき，方程式

$$x^2+y^2+z^2=r^2 \qquad (1)$$

は，原点 O と点 P(x, y, z) との距離が r であることを示している。



したがって，(1) は原点を中心とし，半径が r の球の方程式である。

同様に，2 点間の距離の公式から

> 点 (a, b, c) を中心とし，半径が r の球の方程式は
>
> $$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$
>
> 球の方程式

問 4 次の球の方程式を求めよ。

(1) $(2, 0, 3)$ を中心とする半径 5 の球

(2) $(3, -2, 5)$ を中心として yz 平面に接する球

例題 3 $x^2+y^2+z^2=2x+4z$ は球の方程式であることを示し，その中心，半径を求めよ。

〔解〕 $$x^2+y^2+z^2-2x-4z=0$$

$$\therefore\ (x^2-2x+1)+y^2+(z^2-4z+4)=1+4$$

すなわち，与えられた方程式は次のようになる。

$$(x-1)^2+y^2+(z-2)^2=(\sqrt{5})^2$$

これは，中心が $(1, 0, 2)$，半径 $\sqrt{5}$ の球の方程式である。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com