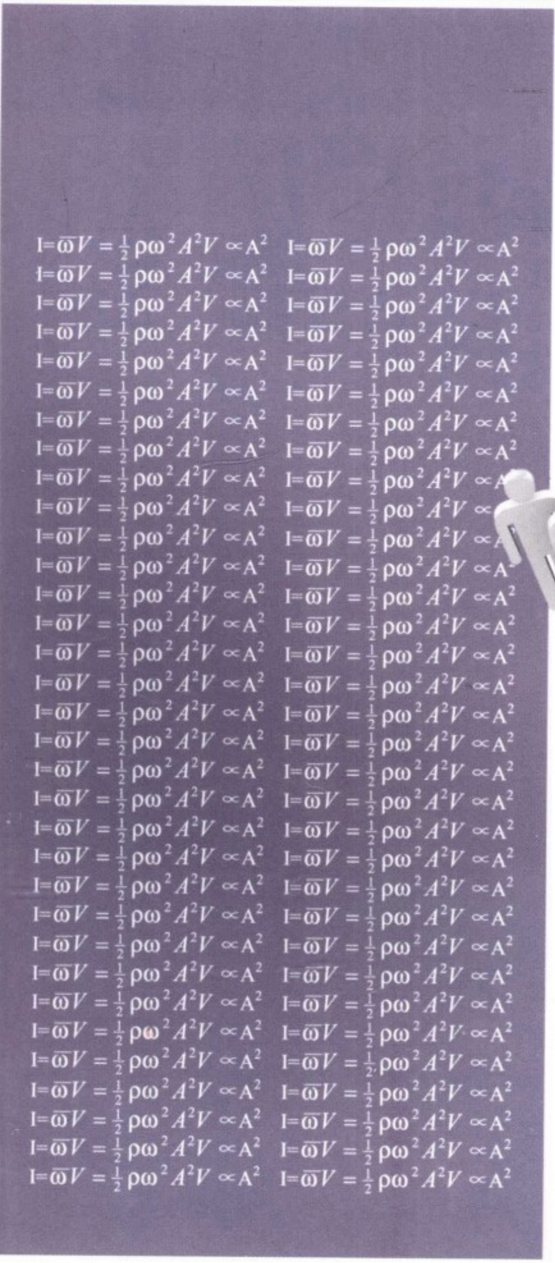
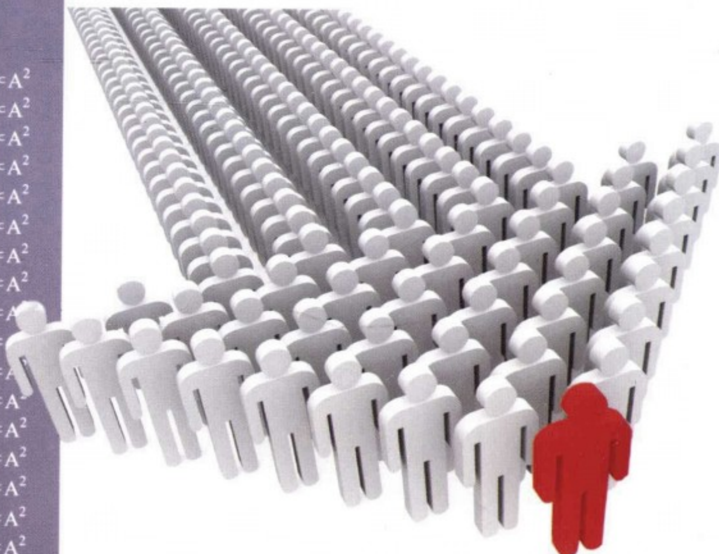
大学自主招生试题解析与模拟

丛书主编　范小辉
本册主编　范小辉

物理 • Physics





南京师范大学出版社
NANJING NORMAL UNIVERSITY PRESS

责任编辑：周　璇
封面设计：张颖

大学自主招生试题解析与模拟·语文

大学自主招生试题解析与模拟·英语

大学自主招生试题解析与模拟·数学

大学自主招生试题解析与模拟·物理

大学自主招生试题解析与模拟·化学

ISBN 978-7-81101-989-6

9 787811 019896 >

定价：32.00元

第一章　一般物体的平衡

一、共点力作用下物体的平衡

1. 平衡包括静止(不是瞬时速度为零)和匀速直线运动两种状态.

2. 平衡条件:合力为零.

如果是三个力作用下的平衡问题,可以由任两个力的合力同第三个力等大反向作平行四边形求解.若平行四边形中有直角三角形,根据函数关系或勾股定理列方程.如果平行四边形中无直角三角形,则可由正弦定理或相似三角形的相似比相等列方程.

如果是三个以上共点力的平衡问题,可由正交分解法列方程,当然有时也可将同一方向的几个力先合成为一个力,或者将不同方向的力先合成为一个力,如同一点的弹力和摩擦力可合成为一个力(俗称全反力).

二、有固定转动轴物体的平衡

1. 力臂:转轴到力的作用线的垂直距离.

2. 平衡条件:对转轴的合力矩为零.

3. 力矩是矢量,效果是使物体的转动状态发生改变,即使角速度变化.

4. 对力臂不方便找的力矩平衡问题,有时也可以先分解力,再求各分力的力矩和作为该力的力矩.

三、一般物体的平衡

1. 平衡条件:所有力的合力为零;对任意轴的合力矩为零.

2. 有三条途径列方程:

① $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum M_z = 0$(对任意 z 轴).

② $\sum F_x = 0, \sum M_z = 0$(对 O 轴), $\sum M_z' = 0$(对 O' 轴,但 O、O' 的连线不可与 x 轴垂直).

③ $\sum M_z = 0, \sum M_z' = 0, \sum M_z'' = 0$(但 O、O'、O'' 三点不在同一直线上).

四、常用解题技巧总结

1. 三力汇交原理：若一个物体只受三个力作用处于平衡状态，则这三个力不平行必共点.

【例 1】 如图 1-1 所示，轻杆 BC 的 C 端铰接于墙，B 点用绳子拉紧，挂重物 G. 当重物 G 从 C 缓慢移动到 B 的过程中，墙对轻杆 BC 的作用力 N 大小变化为______，绳子上拉力 T 的变化为______.

解析 以 C 点为轴，$\overline{CO}=x$，$\overline{CE}=L$.

由 $Gx=T\cdot L$，得 x 变大时 T 变大.

而墙在 C 处对杆的作用力过 T、G 两力的交点，由图 1-2 所示变化关系可知，N 先变小后变大，T 不断变大.

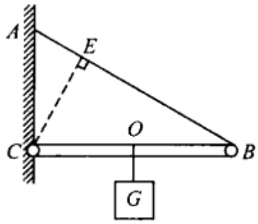


图 1-1

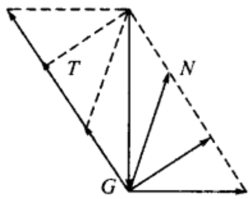


图 1-2

【例 2】 如图 1-3 所示，均匀直杆一端放在地上，一端斜靠在立方体上（B 处光滑），作图画出地面对杆作用力的方向.

如果杆长 L，重 mg，立方体边长为 a，杆与水平面成 θ 角，具体求出 A 处弹力 N_A 和摩擦力 f.

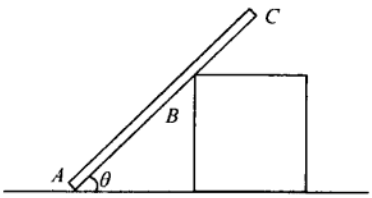


图 1-3

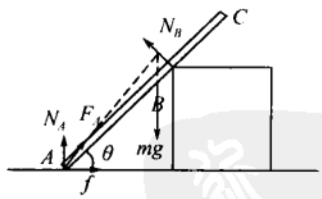


图 1-4

解析 地面对杆的作用力（弹力和摩擦力的合力，即为全反力）必和 N_B、mg 交于一点，如图 1-4 所示.

以 A 点为轴，有

$$N_Ba/\sin\theta=mg(L/2)\cos\theta,$$

$$N_A+N_B\cos\theta=mg,$$

$$f = N_B \sin\theta,$$

得
$$f = [mgL/(2a)]\sin^2\theta\cos\theta,$$
$$N_A = mg - [mgL/(2a)]\sin\theta\cos^2\theta.$$

【例 3】 (05 上海交大)如图 1-5,一均匀细杆长 1 m,重量为 W,在距其上端 25 cm 处用一钉子将其钉在铅直墙面上,使细杆可绕此钉子无摩擦地旋转. 今施一水平力于其上端,使细杆偏离铅垂线 θ 角($\theta<90^\circ$)而平衡,则钉子作用在细杆上的力的量值为______.

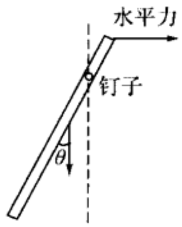


图1-5

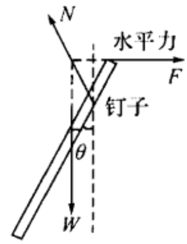


图1-6

解析　由三力共点知识可知 N 的方向如图 1-6 所示.

以钉为轴,有 $Wl\sin\theta = Fl\cos\theta$,其中 $l=0.25$ m.

得水平力
$$F = W\tan\theta.$$

因而
$$N = \sqrt{W^2+F^2} = W/\cos\theta.$$

【例 4】 如图 1-7 所示,两平行直杆竖直放置,间距为 d,质量分布不均匀的绳子长度大于 d,两端分别系在两杆上,系绳点位于同一水平面,已知系绳处与直杆的夹角分别为 θ_1 和 θ_2,试求绳子重心到两杆的垂直距离.

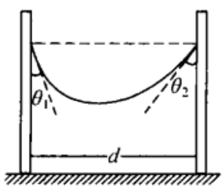


图1-7

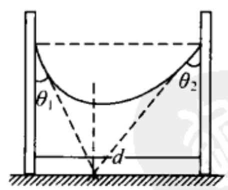


图1-8

解析　绳与杆两接触处的拉力都沿该处的切线方向,而绳的重力必过两切线的交点,如图 1-8 所示. 设绳子重心到左侧杆的距离为 x,则
$$x\cot\theta_1 = (d-x)\cot\theta_2,$$

得
$$x = d\cot\theta_2/(\cot\theta_1+\cot\theta_2).$$

【例 5】 如图 1-9 所示，光滑半球壳直径为 a，与一光滑竖直墙面相切，一根均匀直棒 AB 与水平方向成 60°角靠墙静止，求棒长.

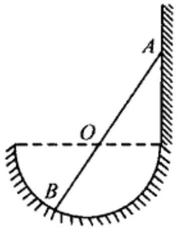


图1-9

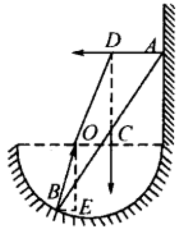


图1-10

解析 棒受三力作用必交于一点，如图 1-10 所示.

设 B 处弹力与水平方向成 θ 角，在 $\triangle BCD$ 中有

$$\frac{L/2}{\sin(90^\circ-\theta)}=\frac{(L/2)\sin 60^\circ}{\sin(\theta-60^\circ)},$$

得
$$\tan\theta=2\sqrt{3}.$$

在 $\triangle OBE$ 中，有

$$\cos\theta=\frac{L\cos 60^\circ-a/2}{a/2}=\frac{L}{a}-1,$$

得
$$L=(1+\frac{1}{\sqrt{13}})a.$$

2. 转轴的选取原则：选取未知又不需求的力的作用点为轴，可使力矩平衡方程中的未知量数目减少.

【例 6】 如图 1-11 所示，两个重力分别为 W_A、W_B 的小球用细线连着套在一个竖直固定着的大圆环上，如果连线对圆心的夹角为 α，当大圆环和小圆环之间的摩擦力及线的质量忽略不计时，求 A 处连线与竖直方向夹角 θ.

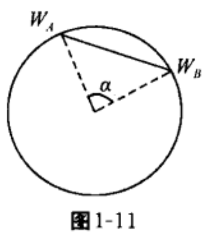


图1-11

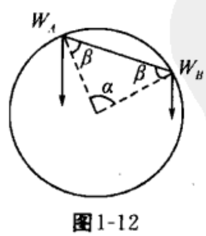


图1-12

解析 如图 1-12 所示，取两环及连线为整体，除受两个重力外，另受 A、B 两处弹力作用，但方向沿半径方向. 以圆心 O 为轴，设两线与半

径夹角都为 β,则

$$W_A R\sin(\theta-\beta)=W_B R\sin(180^\circ-\theta-\beta).$$

又
$$\beta=(180^\circ-\alpha)/2,$$

得
$$\tan\theta=\frac{W_A+W_B}{W_A-W_B}\cot\frac{\alpha}{2}.$$

【例 7】 如图 1-13 所示,长为 L 的均匀木杆重 Q,在木杆上离 A 端 $L/4$ 处放有一重 $Q/2$ 的重物,平衡时,木杆与水平面的夹角 α 多大?

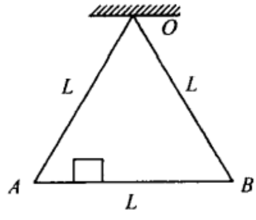


图 1-13

解析 以 O 点为轴,取整体为研究对象,有

$$\frac{Q}{2}\left[L\cos(60^\circ+\alpha)-\frac{L}{4}\cos\alpha\right]=$$

$$Q\left[L\cos(60^\circ-\alpha)-\frac{L}{2}\cos\alpha\right],$$

得
$$\alpha=\operatorname{arccot}(6\sqrt{3}).$$

【例 8】 如图 1-14 所示,三根相同的轻杆用铰链连接并固定在位于同一水平线上的 A、B 两点,A、B 间的距离是杆长的 2 倍,铰链 C 上悬挂一质量为 m 的重物,问为使杆 CD 保持水平,在铰链 D 上应施的最小力 $F_{\min}$ 为多少?

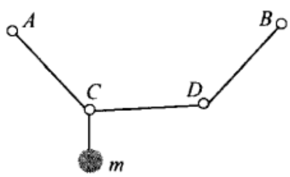


图1-14

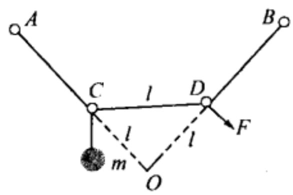


图1-15

解析 对铰链轻杆,杆作用在铰链上的力的方向是沿杆的,因此点 A 和点 B 处的外力分别沿 CA、DB.

设这两个力交于 O 点,因 $\overline{AB}=2\,\overline{CD}=2\,\overline{AC}$,故 $\overline{OC}=\overline{CD}=\overline{OD}$. 以 O 为轴,显然力 F 垂直于 OD 时 F 有最小值.

由
$$mg(l/2)=F_{\min}\cdot l,$$

得
$$F_{\min}=mg/2.$$

3. 一般物体的平衡条件:用两条力平衡方程、一条力矩平衡方程列式在实际解题中最常见,但有时也用三条力矩平衡方程,或两条力矩方

程、一条力平衡方程列式.

【例 9】 结构均匀的梯子 AB 靠在光滑竖直墙上，已知梯长 L，重为 G，与地面间的动摩擦因数为 μ，如图 1-16 所示.

(1)求梯子不滑动，梯子与水平地面夹角 θ 的最小值 θ_0.

(2)当 $\theta=\theta_0$ 时，一重为 P 的人沿梯子缓慢向上，他上到什么位置时梯子开始滑动？

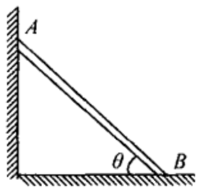


图1-16

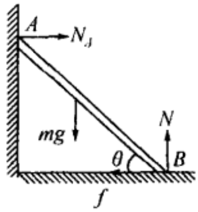


图1-17

解析 (1) θ_0 最小对应 B 处摩擦力达最大值，杆受力如图 1-17 所示. 以 A 点为轴，有

$$mg(L/2)\cos\theta_0+fL\sin\theta_0=NL\cos\theta_0.$$

而

$$N=mg,\ f=\mu N,$$

得

$$\theta_0=\operatorname{arccot}(2\mu).$$

(2)设人向上到距 A 点 x 处梯子滑动，则

$$mg(L/2)\cos\theta+Px\cos\theta+fL\sin\theta=NL\cos\theta.$$

而

$$N=mg+P,\ f=\mu N,$$

得

$x=L/2$(这一结果将人、梯子作为整体研究易得).

【例 10】 如图 1-18 所示，一根重为 G 的均匀硬杆 AB，杆的 A 端被细绳吊起，在杆的另一端 B 作用一水平力 F 把杆拉向右边. 整个系统平衡后，细线、杆与竖直方向的夹角分别为 α、β，求证：$\tan\beta=2\tan\alpha$.

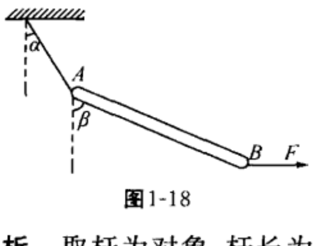


图1-18

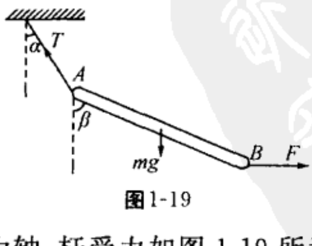


图1-19

解析 取杆为对象，杆长为 l，A 点为轴，杆受力如图 1-19 所示.

由

$$mg(l/2)\sin\beta=Fl\cos\beta,$$

得 $$\tan\beta=2F/(mg).$$

设绳中弹力为 T,则由平衡条件得

$$T\sin\alpha=F, T\cos\alpha=mg,$$

得 $$\tan\alpha=F/(mg).$$

故 $$\tan\beta=2\tan\alpha.$$

【例 11】 有一半径为 R 的均匀圆柱,今在其内平行于轴凿通一个半径为 $R/2$ 的孔,孔中心 O' 与圆柱中心 O 相距为 $R/2$,然后将此圆柱放在一块长木板上,慢慢抬高板的一端,要使圆柱在木板上还能保持平衡状态,求板的最大倾角 θ_0 是多少. 已知圆柱与木板间的静摩擦因数 $\mu_0=1/6$.

解析 圆柱的等效受力如图 1-20 所示. 其中

$$G=4mg, F'=mg.$$

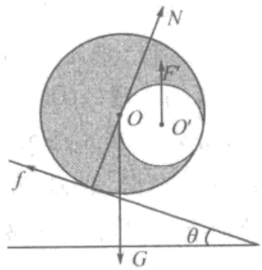


图 1-20

要使圆柱不滑动,须满足

$$(G-F')\sin\theta\leqslant\mu_0 N,$$

其中 $$N=(G-F')\cos\theta,$$

得 $$\tan\theta\leqslant\mu_0=1/6.$$

圆柱不滚动,以 O 为轴,F' 取力臂最大情况,有

$$F'(R/2)\geqslant fR,$$

且 $$f=(G-F')\sin\theta=3mg\sin\theta,$$

得 $$\sin\theta\leqslant 1/6.$$

两者比较,取小值,即 $$\theta\leqslant\arctan(1/6).$$

【例 12】 (08 上海交大)重为 80 kg 的人沿如图 1-21 所示的梯子从底部向上攀登,梯子质量为 25 kg,顶角为 30°. 已知 AC 和 CE 都为 5 m 长且用铰链在 C 点处相连. BD 为一段轻绳,两端固定在梯子高度一半处. 设梯子与地面的摩擦可以忽略,求在人向上攀登过程中轻绳中张力的变化规律.

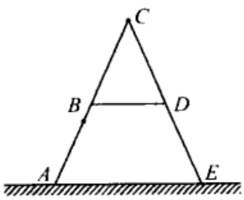


图1-21

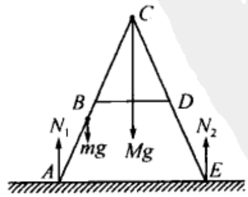


图1-22

解析 设梯子的质量为 M，人的质量为 m. 当人爬离 A 点的距离为 x 时有

$$N_1+N_2-mg-Mg=0.$$

以 A 为轴，梯子为研究对象，有

$$x\cos 75°mg+\overline{AC}\cos 75°Mg-2\,\overline{AC}\cos 75°N_2=0,$$

其中

$$\overline{AC}=5\ \text{m}.$$

设绳中张力为 T，以 C 为轴、左侧梯子为对象，有

$$(5-x)\sin 15°\cdot mg+\frac{5}{2}\cos 15°\cdot T+\frac{Mg}{2}\cdot\frac{5}{2}\sin 15°-5\sin 15°\cdot N_1=0,$$

得

$$T=(125+160x)\tan 15°.$$

4. 研究对象的选取：隔离法、整体法或二者并用，关键是列方程前一定要对自己选定的研究对象想清楚，并进行相应的受力分析.

【例 13】 (06 复旦外地)在如图 1-23 所示的系统中，活塞 n 插入活塞孔中的可移动塞栓 B 和密度为 ρ 的液体平衡. 容器的截面积为 S，孔的截面积为 S_0，各滑动表面摩擦可忽略，液体不能从间隙中出来. 问若在塞栓顶上放上质量为 m_0 的物体，塞栓相对初始位置下移多少？

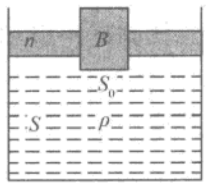


图 1-23

解析 设塞栓下降 x，则活塞升高

$$h=\frac{\Delta V}{S-S_0}=\frac{xS_0}{S-S_0},$$

则

$$x+h=\frac{xS}{S-S_0},$$

两个面上液体的压强差增加了 $\Delta p=\dfrac{\rho gxS}{S-S_0}$.

又

$$\Delta p=\frac{m_0g}{S_0},$$

故

$$x=\frac{m_0(S-S_0)}{\rho SS_0}.$$

【例 14】 3 根不可伸长的相同的轻绳，一端系在半径为 r_0 的环上，彼此间距相等. 绳子穿过半径为 r_0 的第 3 个圆环，另一端用同样的方法系在半径为 $2r_0$ 的圆环上. 如图

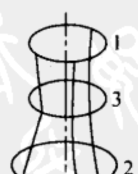


图 1-24

1-24，环 1 固定在水平面上，整个系统处于平衡状态. 试求第 2 个环中心与第 3 个环中心之间的距离.（3 个环都是用同种金属丝制成的，摩擦不计）

解析 环光滑，表明环 3 两侧绳子拉力必等大. 取环 2、3 为对象，绳中张力为 T，环 3 质量为 m，则

$$3T=mg+2mg.$$

设环 2、3 间绳与水平方向夹 θ 角，对环 2 有

$$3T\sin\theta=2mg,$$

得

$$\sin\theta=2/3,$$

即

$$\tan\theta=2\sqrt{5}/5.$$

又

$$\tan\theta=H/(2r_0-r_0)=H/r_0,$$

得

$$H=2\sqrt{5}r_0/5.$$

【例 15】（06 复旦外地）在一深度为 H 的容器中充满液体，液体密度从表面的 ρ_0 到容器底的 ρ 成线性变化. 液体里浸入两个体积同为 V 的小球，小球间用长为 l、不可伸长的轻细绳连接，第 1 个小球密度为 ρ_1，第 2 个小球密度为 ρ_2. 过一段时间后，两小球静止于图 1-25所示位置. 求绳中张力.

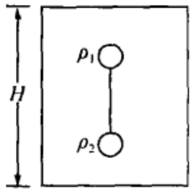


图 1-25

解析 设细绳中拉力为 T，对两个球分别有

$$F_{浮1}-T-mg=0,$$

$$F_{浮2}+T-mg=0.$$

在液体下深度 x 处时，球受到的浮力表示为

$$F_{浮x}=\rho_x gV,$$

而

$$\rho_x=\rho_0+(\rho-\rho_0)x/H,$$

这样可得

$$T=\frac{gV}{2}(\rho_2-\rho_1-\frac{\rho-\rho_0}{H}l).$$

这一关系只有在 $T\geqslant0$，$x_1>0$，$x_2<H$ 时才有可能成立.

【例 16】 如图 1-26 所示，均匀杆 L_1 的 A 端用铰链固定在墙上，B 端与 L_1 相接触，AB 水平；匀质杆 L_2 的 C 端也用铰链固定于 C 点，与墙壁成 30° 角. 两杆处于静止状态，L_1 重 $G_1=10$ N，L_2 重 $G_2=5$ N，求杆 L_1 的 B 端受杆

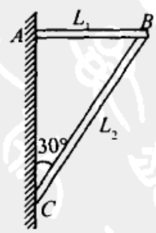


图 1-26

L_2 的作用力的大小.

解析 设杆 L_1 受 B 端的支持力为 N_1，摩擦力为 f_1（方向沿 AB）.对杆 L_1 有

$$N_1L_1=G_1\cdot(L_1/2),$$

得 $$N_1=5\ \mathrm{N}.$$

对杆 L_2 有

$$G_2\cdot(L_2/2)\sin 30^\circ+N_1L_2\sin 30^\circ=f_1L_2\cos 30^\circ,$$

得 $$f_1=5\sqrt{3}/2\ \mathrm{N},$$

故 $$F=\sqrt{N_1^2+f_1^2}=5\sqrt{7}/2\ \mathrm{N}.$$

【例 17】 (04 上海交大)半径为 R 的匀质半球体置于水平面上，其重心在球心 O 正下方 C 点处. $OC=3R/8$，半球质量为 m. 在半球的平面上放一质量为 $m/8$ 的物体，它与半球平面间的动摩擦系数为 0.2，如图 1-27所示，则物体刚要开始滑动时离球心的最大距离为______.

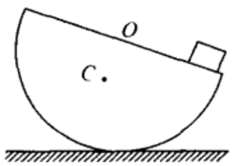


图1-27

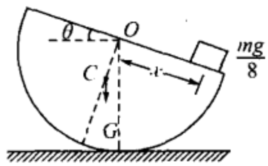


图1-28

解析 设临界情况下直径与水平面夹 θ 角，如图 1-28 所示. 对整体有

$$mg\cdot(3R/8)\sin\theta=(mg/8)x\cos\theta,$$

得 $$x=3R\tan\theta.$$

而对物体有 $$(mg/8)\sin\theta=\mu(mg/8)\cos\theta,$$

得 $$\tan\theta=\mu,$$

所以 $$x=3\mu R=0.6R.$$

【例 18】 (06 上海交大)两个质量分布均匀的球，半径为 r，重为 P，置于两端开口的圆筒内，圆筒半径为 $R(r<R<2r)$，并竖直放在水平面上(如图 1-29). 设所有接触面均光滑，为使圆筒不至于倾倒，圆筒的最小重量 Q 为多少？如果换成有底的圆筒，情况又如何？

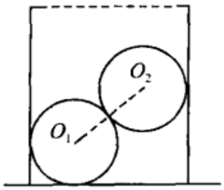


图1-29

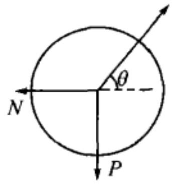


图1-30

解析　球 O_2 受力如图 1-30. 由共点力平衡条件得

$$N=P\cot\theta=P\cdot\frac{2R-2r}{\sqrt{(2r)^2-(2R-2r)^2}},$$

对圆筒有　$$QR=N\cdot\sqrt{(2r)^2-(2R-2r)^2},$$

即　$$Q=\frac{2(R-r)}{R}P.$$

若筒有底，则不会翻.

注：力偶矩等大、反向不在一直线上的两个力，力偶矩则为力与力偶臂（两平行力之间的距离）的乘积，因而力偶矩与转轴的具体位置无关.

【例 19】　如图 1-31 所示，在竖直墙上有两根相距为 d 的水平木桩 A 和 B，有一细棒置于 A 上、B 下且与水平方向成 θ 角，细棒与木桩之间的静摩擦因数为 μ. 求要使细棒静止，其重心与木桩 A 之间距离 x 应满足的条件.

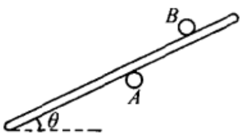


图1-31

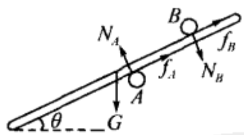


图1-32

解析　细棒受力如图 1-32 所示，则

$$G\sin\theta=f_A+f_B,$$

$$N_A=N_B+G\cos\theta,$$

$$f_A+f_B\leqslant\mu N_A+\mu N_B.$$

以 A 为轴有　$$Gx\cos\theta=N_Bd,$$

得　$$x\geqslant d(\tan\theta-\mu)/(2\mu).$$

显然上式只对 $\tan\theta\geqslant\mu$ 的情况适用.

故本题答案：若 $\tan\theta\geqslant\mu$，$x\geqslant 0$ 即可.

注：按常规方法求得结果后要养成一个习惯——对结果作适当观察，如量纲是否正确、结果是否有条件限制（比如根号内的值一定要大于等于零，分母不能为零，$\sin\alpha\leqslant 1$ 等）. 有时题设条件不能保证满足这些要求，则意味着要进行相关的讨论，如本题的情况.

5. 非共面力系的平衡问题：一般先通过力的合成与分解方法只研究同一平面内的力平衡关系.

【例 20】 质量 $m=1$ kg 的物体在图 1-33 所示斜面上受水平横向力 $F=5$ N 的作用时，恰能作匀速直线运动，则 μ 为多少？

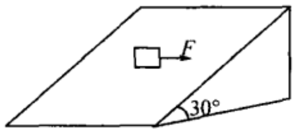


图1-33

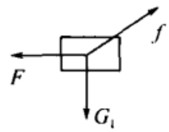


图1-34

解析 重力沿斜面方向的分力

$$G_1=mg\sin 30^\circ=5\ \text{N},$$

滑动摩擦力

$$f=\mu N=\mu mg\cos 30^\circ,$$

在斜面方向物体受力如图 1-34 所示，有

$$G_1^2+F^2=f^2,$$

得

$$\mu=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

【例 21】 如图 1-35 所示，有一半径为 r 的圆柱绕竖直轴 OO' 以角速度 ω 匀速转动. 如果用力 F 把质量为 m 的物体压在圆柱侧面，能使物体以速度 v 匀速下滑，求物体 m 与圆柱面之间的滑动摩擦因数.（已知物体 m 在水平方向受光滑挡板的作用使之不能随圆柱体一起转动）

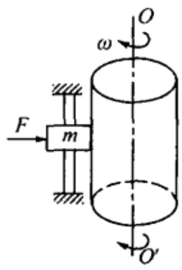


图1-35

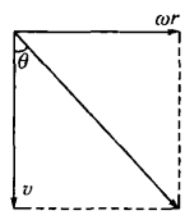


图1-36

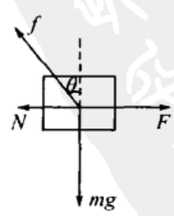


图1-37

解析　m 相对圆筒的分速度如图 1-36 所示，其中

$$\cos\theta=\frac{v}{\sqrt{v^2+\omega^2 r^2}}.$$

物体在纸面内受力如图 1-37 所示，

即
$$f\cos\theta=mg.$$
而
$$f=\mu N=\mu F,$$
得
$$\mu=\frac{mg\sqrt{v^2+\omega^2 r^2}}{Fv}.$$

注：解本题的关键是滑动摩擦力的方向应与相对运动方向相反.

【例 22】　在一个与平面成 α 角的粗糙斜面上放着一个物体，它系于一个不可伸长的细绳上，绳的另一端通过斜面上的一个小孔竖直穿过平面，如图 1-38 所示. 然后慢慢地拉动绳子，开始时，绳子处于水平位置，在这个物体缓慢到达小孔的过程中，物体在斜面上通过的轨迹正好是一个半圆周，求动摩擦因数 μ.

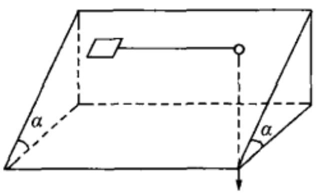


图 1-38

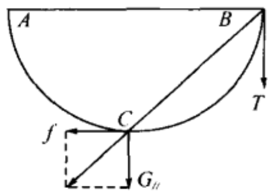


图 1-39

解析　物体在斜面上的运动可视为准静态平衡过程，各处合力都为 0. 物体在半圆周最低位置受力如图 1-39 所示. 因 $\angle ABC=45°$，则

$$f=G_{//}.$$

其中
$$f=\mu mg\cos\alpha,\ G_{//}=mg\sin\alpha,$$
故
$$\mu=\tan\alpha.$$

【例 23】　(09 清华)质量为 m、长为 l 的三根相同的匀质细棒对称地搁在地面上，三棒的顶端 O 重合，底端 A、B、C 的间距均为 l，如图 1-40 所示.

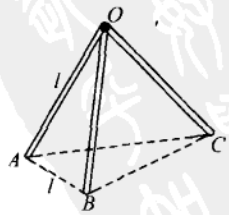


图 1-40

(1)求 A 棒顶端所受的作用力 F 的大小.

(2)若有一质量也是 m 的人(视为质点)坐在 A 棒的中点处，三棒仍保持不动，这时 A 棒顶端所受作

用力 F 的大小又为多大？

(3)在(2)情况下，地面与棒之间的静摩擦系数 μ 至少为多大？

解析　(1)如图 1-41 所示，由对称性知，F 必沿水平方向且在 $\triangle ADO$ 平面内(D 为 BC 中点)．

$$\overline{AD}=\overline{DO}=\frac{\sqrt{3}}{2}l,$$

因而 $$\alpha=\angle OAD=\arccos\frac{l/2}{\sqrt{3}l/2}=\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

以 A 为支点，由 A 棒平衡可得

$$F=\frac{1}{2}mg\cot\alpha=\frac{1}{2\sqrt{2}}mg.$$

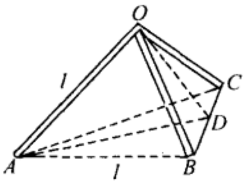


图1-41

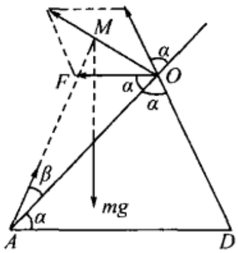


图1-42

(2)这时 B、C 棒受力情况相同，B 棒的受力可看作在原受力 F 外再受一力 G_B．既然 B 棒仍平衡，G_B 必沿着 B 棒方向．同理，也有一力 G_C 作用于 C 棒，且沿 C 棒方向．G_B 和 G_C 的合力必沿 OD 方向，它的反作用力 G 作用在 A 棒上，方向沿 DO，G 对 A 点力矩应与人对 A 的力矩平衡，如图 1-42 所示，即

$$mg\,\frac{l}{2}\cos\alpha=Gl\sin\alpha.$$

因此 $$G=F=\frac{1}{2\sqrt{2}}mg.$$

不难看出，G 与 AO 延长线夹角也是 α，由几何关系即可求出 F 与 G 的合力 $F'=2F\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}mg$，方向与 $\overline{AO}$ 垂直．

(3)地面与棒间动摩擦因数 μ 至少为 $\frac{2\sqrt{2}}{7}$．

6. 微元法：各处受力不相同时可取一微元对象或微元过程分析研究，借助一定的近似条件求得问题的结果. 常用的数学近似式：

$\sin\theta \approx \theta \approx \tan\theta, \cos\theta \approx 1-\theta^2/2$（$\theta$很小），$(1+x)^n \approx 1+nx$（$x \ll 1$）等.

【例 24】 如图 1-43 所示，静止的圆锥体竖直放置，顶角为 α. 质量为 m 且分布均匀的软绳水平地套在圆锥体上，忽略软绳与圆锥体之间的摩擦力. 试求软绳中的张力.

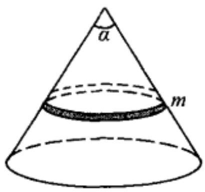


图1-43

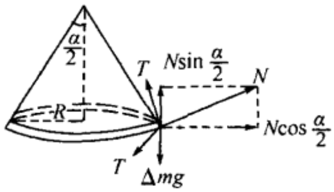


图1-44

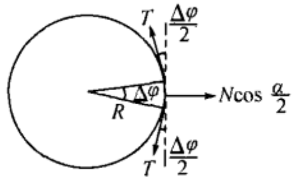


图1-45

解析 取软绳中 Δl 长微元段分析，受力情况如图 1-44 所示，其中 T 为软绳中的张力，N 为圆锥体对微元段的支持力.

微元段重量 $\quad \Delta mg = N\sin(\alpha/2)$，

软绳微元段俯视受力如图 1-45 所示，满足

$$2T\sin(\Delta\varphi/2) = N\cos(\alpha/2),$$

因 $\Delta\varphi$ 很小，有

$$\sin(\Delta\varphi/2) \approx \Delta\varphi/2,$$

得 $\quad T\,\Delta\varphi = N\cos(\alpha/2)$.

而 $\quad \Delta m = m[\Delta l/(2\pi R)] = m\Delta\varphi/(2\pi)$，

由此得 $\quad T = mg/[2\,\pi\tan(\alpha/2)]$.

【例 25】 如图 1-46 所示，一个半径为 R 的 $l/4$ 光滑球面置于水平桌面上. 球面上有一条光滑匀质软绳，一端固定于球面顶点 A，另一端恰好与桌面不接触，且单位长度软绳的质量为 ρ. 求软绳 A 端所受的水平拉力及软绳所受球面的支持力.

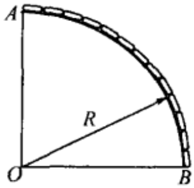


图1-46

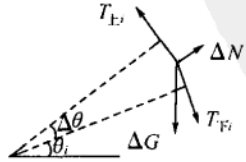


图1-47